Integrales paramétricas impropias

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción

Hasta ahora sólo hemos considerado integrales paramétricas propias; nos ocupamos a continuación de las impropias.

El estudio de las integrales paramétricas impropias múltiples reviste cierta complejidad, al igual que acontece con las impropias simples con parámetros en los límites de integración. Es por ello que aquí nos limitaremos a considerar integrales impropias de los tipos

$$\int_{\to a}^{b} f(\lambda,x)\,dx, \qquad \int_{a}^{\to b} f(\lambda,x)\,dx.$$

Nótese que el primero de ellos puede ser reducido al segundo, por cuanto

$$\int_{\to a}^{b} f(\lambda,x)\,dx = -\int_{b}^{\to a} f(\lambda,x)\,dx,$$

de modo que sólo trataremos este último.

Recordemos que si $I = [a,b[$, $-\infty < a < b \leq +\infty$ y $g : I \to \mathbb{R}$ es tal que existe $\int_a^k g(x)\,dx$ para cada $k \in I$, se define la *integral impropia*

$$\int_{a}^{\to b} g(x)\,dx = \lim_{k\to b-} \int_a^k g(x)\,dx.$$

Esta integral será *convergente*, *divergente* u *oscilante* según que el límite del segundo miembro exista y sea finito, exista y sea infinito, o no exista, respectivamente.

En lo que sigue, p denotará cualquier entero positivo.

2. Convergencia y convergencia uniforme

Definición 2.1. *Sean:* $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$, $I = [a,b[$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, *y* $f : \Lambda \times I \to \mathbb{R}$ *tal que existe* $\int_a^k f(\lambda,x)\,dx$ ($\lambda \in \Lambda$, $k \in I$). *Si la integral impropia*

$$\int_{a}^{\to b} f(\lambda,x)\,dx = \lim_{k\to b-} \int_a^k f(\lambda,x)\,dx$$

converge para cada $\lambda \in \Lambda$, *se dice que* $\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ converge *en* Λ. *Si este límite es uniforme en* $\lambda \in \Lambda$, *se dice que* $\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ converge uniformemente *en* Λ.

Más precisamente:

- $\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ *converge* en Λ si para todo $\lambda\in\Lambda$ y todo $\varepsilon>0$, existe $k_{\lambda\varepsilon}\in I$ tal que $k_{\lambda\varepsilon}\le k<b$ implica

$$\left|\int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

esto es,

$$\lim_{k\to b-}\int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx=0 \qquad (\lambda\in\Lambda).$$

- $\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ *converge uniformemente* en Λ si para todo $\lambda\in\Lambda$ y todo $\varepsilon>0$, existe $k_\varepsilon\in I$ tal que $k_\varepsilon\le k<b$ implica

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\left|\int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

esto es,

$$\lim_{k\to b-}\sup_{\lambda\in\Lambda}\left|\int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right|=0.$$

3. Criterios de convergencia uniforme

Sean: $\Lambda\subset\mathbb{R}^p$, $I=[a,b[$, $-\infty<a<b\le+\infty$, y $f:\Lambda\times I\to\mathbb{R}$ tal que existe $\int_a^k f(\lambda,x)\,dx$ $(\lambda\in\Lambda,\ k\in I)$.

Proposición 3.1 (Criterio de Cauchy)**.** *En las condiciones anteriores,* $\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ *converge uniformemente en* Λ *si, y sólo si, para cada* $\varepsilon>0$*, existe* $k_\varepsilon\in I$ *tal que* $k_\varepsilon\le k<k'<b$ *implica*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\left|\int_k^{k'} f(\lambda,x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ converge uniformemente en Λ, de modo que para todo $\varepsilon>0$, existe $k_\varepsilon\in I$ tal que $k_\varepsilon\le k<b$ implica

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\left|\int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right|<\varepsilon/2.$$

Si $k_\varepsilon\le k<k'<b$, entonces:

$$\begin{aligned}
\sup_{\lambda\in\Lambda}\left|\int_k^{k'} f(\lambda,x)\,dx\right| &= \sup_{\lambda\in\Lambda}\left|\int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx-\int_{k'}^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right|\\
&\le \sup_{\lambda\in\Lambda}\left|\int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right|+\sup_{\lambda\in\Lambda}\left|\int_{k'}^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right|\\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_\varepsilon \in I$ tal que $k_\varepsilon \leq k < k' < b$ implica

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\left|\int_k^{k'} f(\lambda,x)\,dx\right| < \varepsilon/2,$$

así que

$$\left|\int_k^{k'} f(\lambda,x)\,dx\right| < \varepsilon/2 \qquad (\lambda\in\Lambda).$$

Para $k_\varepsilon \leq k < b$,

$$\int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx = \lim_{k'\to b-}\int_k^{k'} f(\lambda,x)\,dx \qquad (\lambda\in\Lambda)$$

y, por tanto,

$$\left|\int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right| = \lim_{k'\to b-}\left|\int_k^{k'} f(\lambda,x)\,dx\right| \leq \varepsilon/2 \qquad (\lambda\in\Lambda),$$

de donde

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\left|\int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Esto completa la demostración. □

Proposición 3.2 (Criterio de Weierstrass)**.** *Sea $g : I \to \mathbb{R}$ una función positiva tal que $\int_a^{\to b} g(x)\,dx$ converge y $|f(\lambda,x)| \leq g(x)$ $(\lambda\in\Lambda,\ x\in I)$. Entonces $\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ converge uniformemente en Λ.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que $\int_a^{\to b} g(x)\,dx$ converge, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_\varepsilon \in I$ tal que $k_\varepsilon \leq k < b$ implica $\int_k^{\to b} g(x)\,dx < \varepsilon$. De aquí se sigue

$$\left|\int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right| = \lim_{k'\to b-}\left|\int_k^{k'} f(\lambda,x)\,dx\right| \leq \lim_{k'\to b-}\int_k^{k'} g(x)\,dx = \int_k^{\to b} g(x)\,dx < \varepsilon \qquad (\lambda\in\Lambda),$$

como necesitábamos probar. □

4. Límites de las integrales paramétricas impropias

Proposición 4.1. *Sean: $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$, $\lambda_0 \in \overline{\Lambda}$, $I = [a,b[$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, y $f : \Lambda \times I \to \mathbb{R}$. Supongamos que:*

(i) $\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(\lambda,x) = g(x)$ *uniformemente en $x \in I$, esto es: para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tal que $\lambda \in \Lambda$ y $\|\lambda-\lambda_0\| < \delta$ implica $|f(\lambda,x) - g(x)| < \varepsilon$ $(x \in I)$.*

(ii) $\int_a^{\to b} g(x)\,dx$ *converge.*

(iii) $\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ *converge uniformemente en* Λ.

Entonces:

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx = \int_a^{\to b}\left[\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(\lambda,x)\right]\,dx = \int_a^{\to b} g(x)\,dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$. Hemos de probar que existe $\delta > 0$ tal que $\lambda \in \Lambda$ y $\|\lambda-\lambda_0\| < \delta$ implica

$$\left|\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx - \int_a^{\to b} g(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Ya que $\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ converge uniformemente (por (iii)), existe $k'_\varepsilon \in I$ tal que $k'_\varepsilon \le k < b$ implica $\left|\int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right| < \varepsilon/3$ $(\lambda \in \Lambda)$.

Por otra parte, como $\int_a^{\to b} g(x)\,dx$ converge (por (ii)), existe $k''_\varepsilon \in I$ tal que $k''_\varepsilon \le k < b$ implica $\left|\int_k^{\to b} g(x)\,dx\right| < \varepsilon/3$.

Ahora ponemos $k = \text{máx}\{k'_\varepsilon, k''_\varepsilon\} < b$ y usamos (i) para elegir $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ de modo que $\lambda \in \Lambda$ y $\|\lambda-\lambda_0\| < \delta$ implica $|f(\lambda,x)-g(x)| < \varepsilon/3(k-a)$ $(x \in I)$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx - \int_a^{\to b} g(x)\,dx\right| \le \\
&\le \left|\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx - \int_a^{k} f(\lambda,x)\,dx\right| + \left|\int_a^{k} f(\lambda,x)\,dx - \int_a^{k} g(x)\,dx\right| + \left|\int_a^{k} g(x)\,dx - \int_a^{\to b} g(x)\,dx\right| \\
&\le \left|\int_a^{k} [f(\lambda,x)-g(x)]\,dx\right| + \left|\int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right| + \left|\int_k^{\to b} g(x)\,dx\right| \\
&\le \int_a^{k} |f(\lambda,x)-g(x)|\,dx + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&< \frac{\varepsilon}{3(k-a)}(k-a) + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

como se pretendía. □

5. Continuidad de las integrales paramétricas impropias

Proposición 5.1. *Sean:* $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$, *compacto,* $I = [a,b[$, $-\infty < a < b \le +\infty$, *y* $f : \Lambda \times I \to \mathbb{R}$. *Supongamos que:*

(i) f *es continua.*

(ii) $\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ *converge uniformemente en* Λ.

Entonces $F(\lambda) = \int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ $(\lambda \in \Lambda)$ *es uniformemente continua en* Λ.

DEMOSTRACIÓN. Como Λ es compacto, basta ver que F es continua.

Sea $\lambda_0 \in \Lambda$. Se trata de probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\lambda \in \Lambda$ y $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$ implica $|F(\lambda) - F(\lambda_0)| < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$, por (ii) existe $k_\varepsilon \in I$ tal que $k_\varepsilon \leq k < b$ implica $\left|\int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right| < \varepsilon/3$ $(\lambda \in \Lambda)$.

Por otra parte, en virtud de (i), f es uniformemente continua en el compacto $\Lambda \times [a,k_\varepsilon]$, luego existe $\delta > 0$ tal que $\lambda \in \Lambda$, $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$ y $a \leq x \leq k_\varepsilon$ implica $|f(\lambda,x) - f(\lambda_0,x)| < \varepsilon/3(k_\varepsilon - a)$.

Ahora, para $\lambda \in \Lambda$ con $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
|F(\lambda) - F(\lambda_0)| &= \left|\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx - \int_a^{\to b} f(\lambda_0,x)\,dx\right| \\
&= \left|\int_a^{\to b} [f(\lambda,x) - f(\lambda_0,x)]\,dx\right| \\
&\leq \left|\int_a^{k_\varepsilon} [f(\lambda,x) - f(\lambda_0,x)]\,dx\right| + \left|\int_{k_\varepsilon}^{\to b} [f(\lambda,x) - f(\lambda_0,x)]\,dx\right| \\
&\leq \int_a^{k_\varepsilon} |f(\lambda,x) - f(\lambda_0,x)|\,dx + \left|\int_{k_\varepsilon}^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right| + \left|\int_{k_\varepsilon}^{\to b} f(\lambda_0,x)\,dx\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3(k_\varepsilon - a)}(k_\varepsilon - a) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

que es la conclusión deseada. □

6. Integración de las integrales paramétricas impropias

6.1. Integración propia

Proposición 6.1. *Sean:* $\Lambda = [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$, $I = [a,b[$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, *y* $f : \Lambda \times I \to \mathbb{R}$. *Supongamos que:*

(i) f *es continua.*

(ii) $\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ *converge uniformemente en* Λ.

Entonces $\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ *es integrable en* Λ*, y se verifica:*

$$\int_\alpha^\beta d\lambda \int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx = \int_a^{\to b} dx \int_\alpha^\beta f(\lambda,x)\,d\lambda.$$

DEMOSTRACIÓN. Ya que $F(\lambda) = \int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ $(\lambda \in \Lambda)$ es continua (Proposición 5.1), F es integrable sobre Λ. Además, por ser f continua, para $k \in I$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta F(\lambda)\,d\lambda &= \int_\alpha^\beta d\lambda \int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx \\
&= \int_\alpha^\beta \left[\int_a^k f(\lambda,x)\,dx + \int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right] d\lambda \\
&= \int_a^k dx \int_\alpha^\beta f(\lambda,x)\,d\lambda + \int_\alpha^\beta d\lambda \int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx.
\end{aligned}$$

En virtud de (ii), dado $\varepsilon > 0$ existe $k_\varepsilon \in I$ tal que $k_\varepsilon \le k < b$ implica

$$\left|\int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

Por tanto, si $k_\varepsilon \le k < b$:

$$\left|\int_\alpha^\beta F(\lambda)\,d\lambda - \int_a^k dx \int_\alpha^\beta f(\lambda,x)\,d\lambda\right| \le \int_\alpha^\beta \left|\int_k^{\to b} f(\lambda,x)\,dx\right| d\lambda < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha) = \varepsilon.$$

Hemos probado que

$$\int_\alpha^\beta d\lambda \int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx = \lim_{k\to b-} \int_a^k dx \int_\alpha^\beta f(\lambda,x)\,d\lambda = \int_a^{\to b} dx \int_\alpha^\beta f(\lambda,x)\,d\lambda,$$

tal como se afirmaba. □

6.2. Integración impropia

Proposición 6.2. *Sean:* $\Lambda = [\alpha,\beta[$, $I = [a,b[$, $-\infty < \alpha < \beta \le +\infty$, $-\infty < a < b \le +\infty$, *y* $f : \Lambda \times I \to \mathbb{R}$. *Supongamos que:*

(i) f *es continua y no negativa en* $\Lambda \times I$.

(ii) $\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ *converge uniformemente en* Λ.

(iii) $\int_\alpha^{\to\beta} f(\lambda,x)\,d\lambda$ *converge uniformemente en I.*

Entonces, si una de las integrales iteradas

$$\int_a^{\to b} dx \int_\alpha^{\to\beta} f(\lambda,x)\,d\lambda \qquad \text{ó} \qquad \int_\alpha^{\to\beta} d\lambda \int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$$

converge, también converge la otra, al mismo valor.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que

$$\int_a^{\to b} dx \int_\alpha^{\to\beta} f(\lambda,x)\,d\lambda$$

converge. Sea $\kappa \in \Lambda$. En virtud de la Proposición 6.1, se tiene:

$$\int_\alpha^{\kappa} d\lambda \int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx = \int_a^{\to b} dx \int_\alpha^{\kappa} f(\lambda,x)\,d\lambda \le \int_a^{\to b} dx \int_\alpha^{\to\beta} f(\lambda,x)\,d\lambda,$$

ya que f es no negativa. Por igual razón, existe el límite del primer miembro cuando $\kappa \to \beta-$, y no es mayor que el segundo miembro. El mismo argumento aplicado a la otra integral establece la igualdad de ambas. □

7. Derivación de integrales paramétricas impropias

Proposición 7.1 (Regla de Leibniz)**.** *Sean:* $\Lambda =]\alpha,\beta[\subset \mathbb{R}$, $I = [a,b[$, *con* $-\infty < a < b \le +\infty$, *y* $f : \Lambda \times I \to \mathbb{R}$. *Supongamos que:*

(i) f *es continua y* $\partial f/\partial\lambda$ *es continua.*

(ii) $\int_a^{\to b} f(\lambda_0,x)\,dx$ *converge para algún* $\lambda_0 \in \Lambda$.

(iii) $\int_a^{\to b} (\partial f/\partial\lambda)(\lambda,x)\,dx$ *converge uniformemente en* Λ.

Entonces $\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ *converge en* Λ*, es derivable respecto de* λ *en* Λ*, y*

$$\frac{d}{d\lambda}\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx = \int_a^{\to b} \frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda,x)\,dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\varphi(\lambda) = \int_a^{\to b} \frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda,x)\,dx \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

Para ver que la integral $F(\lambda)=\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ ($\lambda\in\Lambda$) converge, fijemos $\lambda\in\Lambda$ y, sin pérdida de generalidad, consideremos el intervalo $[\lambda_0,\lambda]$, donde λ_0 es como en (ii). En virtud de la Proposición 6.1,

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_0}^{\lambda}\varphi(\xi)\,d\xi &= \int_{\lambda_0}^{\lambda}\left[\int_a^{\to b}\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi,x)\,dx\right]d\xi\\
&= \int_a^{\to b}\left[\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi,x)\,d\xi\right]dx\\
&= \int_a^{\to b}\left[f(\lambda,x)-f(\lambda_0,x)\right]\,dx\\
&= \int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx-\int_a^{\to b} f(\lambda_0,x)\,dx.
\end{aligned}$$

Como φ es continua (por la Proposición 5.1, aplicada a $[\lambda_0,\lambda]\times I$), la integral que comparece en el primer miembro de la anterior cadena de igualdades existe. Además, $\int_a^{\to b} f(\lambda_0,x)\,dx$ converge, por (ii). Luego, $F(\lambda)=\int_a^{\to b} f(\lambda,x)\,dx$ también converge. Pero

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda}\varphi(\xi)\,d\xi=F(\lambda)-F(\lambda_0),$$

y, siendo φ continua, el teorema fundamental del cálculo permite concluir que $F'(\lambda)=\varphi(\lambda)$, como se requería. $\square$

8. Algunos ejemplos

Ejemplo 8.1. *Estudiar la convergencia uniforme de*

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\operatorname{sen}\lambda x\,dx.$$

RESOLUCIÓN. Aplicamos el criterio de Weierstrass tomando $f(\lambda,x)=e^{-x}\operatorname{sen}\lambda x$ y $g(x)=e^{-x}$ ($\lambda\in\mathbb{R}$, $x\in[0,\infty[$). Se tiene que $|f(\lambda,x)|\le g(x)$ ($\lambda\in\mathbb{R}$, $x\in[0,\infty[$), con

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_0^{\infty}=1.$$

Por tanto, $\int_0^{\infty} f(\lambda,x)\,dx$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$. $\square$

Ejemplo 8.2. *Hallar $F'(x)$, si*

$$F(x) = \int_1^\infty e^{-xy}\,dy \qquad (x>0).$$

RESOLUCIÓN. Sea $f(x,y) = e^{-xy}$ $(x>0,\ y\in[1,\infty[)$. Entonces f es continua y $\partial f/\partial x = -ye^{-xy}$ es continua. Además,

$$\int_1^\infty f(x,y)\,dy = \int_1^\infty e^{-xy}\,dy = -\frac{1}{x}e^{-xy}\Big|_1^\infty = \frac{1}{xe^x} \qquad (x>0)$$

es convergente, y

$$\int_1^\infty \frac{\partial f}{\partial x}\,dy = -\int_1^\infty ye^{-xy}\,dy$$

converge uniformemente si $x > x_0 > 0$, por cuanto, integrando por partes,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty ye^{-xy}\,dy &\leq \int_1^\infty ye^{-x_0y}\,dy = -\frac{y}{x_0}e^{-x_0y}\Big|_1^\infty + \frac{1}{x_0}\int_1^\infty e^{-x_0y}\,dy\\ &= \frac{1}{x_0e^{x_0}} - \frac{1}{x_0^2}e^{-x_0y}\Big|_1^\infty = \frac{1}{x_0e^{x_0}} + \frac{1}{x_0^2e^{x_0}} = \frac{x_0+1}{{x_0}^2e^{x_0}}.\end{aligned}$$

En virtud de la Proposición 7.1,

$$F'(x) = -\int_1^\infty ye^{-xy}\,dy = -\frac{x+1}{x^2e^x} \qquad (x>x_0).$$

Ya que $x_0 > 0$ es arbitrario, concluimos:

$$F'(x) = -\frac{x+1}{x^2e^x} \qquad (x>0).$$

El ejemplo queda así resuelto. □

Ejemplo 8.3. *Hallar $F'(x)$, si*

$$F(x) = \int_x^\infty e^{-xy}\,dy \qquad (x>0).$$

RESOLUCIÓN. Escribimos $F(x) = G(x) + H(x)$, donde

$$G(x) = \int_x^1 e^{-xy}\,dy, \qquad H(x) = \int_1^\infty e^{-xy}\,dy \qquad (x>0).$$

A la vista del Ejemplo 8.2,

$$H'(x) = -\frac{x+1}{x^2 e^x} \qquad (x > 0).$$

Por otra parte, la regla de Leibniz para integrales paramétricas propias con límites de integración variables permite escribir:

$$G'(x) = -\int_x^1 y e^{-xy}\, dy - e^{-x^2} = \frac{y}{x} e^{-xy}\Big|_x^1 + \frac{1}{x^2}\, e^{-xy}\big|_x^1 - e^{-x^2} = \frac{x+1}{x^2 e^x} - \frac{2x^2+1}{x^2 e^{x^2}} \qquad (x > 0),$$

donde hemos integrado por partes.

Consecuentemente

$$F'(x) = G'(x) + H'(x) = -\frac{2x^2+1}{x^2 e^{x^2}} \qquad (x > 0),$$

lo que resuelve el ejemplo. □