

# Teorema de Green

ISABEL MARRERO  
Departamento de Análisis Matemático  
Universidad de La Laguna  
imarrero@ull.es

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Teorema de Green en regiones simplemente conexas</b>	<b>1</b>
2.1. Curvas de Jordan . . . . .	1
2.2. Teorema de Green . . . . .	1
2.3. Conjuntos simplemente conexos . . . . .	4
<b>3. Teorema de Green en regiones múltiplemente conexas</b>	<b>5</b>
3.1. Teorema de Green . . . . .	6
3.2. Invariancia de la integral de línea por deformación del camino . . . . .	7
<b>4. Aplicaciones del teorema de Green</b>	<b>7</b>
4.1. El número de giros . . . . .	7
4.2. Demostración del teorema del cambio de variables en el plano . . . . .	9
4.2.1. Un caso particular . . . . .	10
4.2.2. El caso general . . . . .	12
<b>5. Algunos ejemplos</b>	<b>13</b>





## 1. Introducción

La regla de Barrow para integrales de línea establece que la integral de línea de un gradiente  $\vec{f} = \nabla\phi$  a lo largo de un camino que une  $\bar{a}$  y  $\bar{b}$  puede expresarse en función de los valores  $\phi(\bar{a})$  y  $\phi(\bar{b})$ . Existe un teorema análogo en dos dimensiones, el *teorema de Green*, el cual permite escribir una integral doble extendida a una región  $R$  como una integral de línea a lo largo de la curva cerrada  $C$  que constituye la frontera de  $R$ :

$$\iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy.$$

Aquí, el símbolo  $\oint_C$  indica que la curva cerrada  $C$  es recorrida en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj. Esta orientación de una curva se denomina usualmente *canónica* o *positiva*, por razones que se expondrán más adelante.

Aunque el teorema de Green puede ser cierto bajo hipótesis menos restrictivas, exigiremos que  $P$  y  $Q$  sean de clase  $C^1$  en un entorno abierto  $S$  de  $R$  y que  $C$  sea una curva simple cerrada regular a trozos.

## 2. Teorema de Green en regiones simplemente conexas

### 2.1. Curvas de Jordan

**Definición 2.1.** Sea  $C$  una curva descrita por una función vectorial continua  $\bar{\alpha}$  definida en un intervalo  $[a, b]$ . Recordemos que si  $\bar{\alpha}(a) = \bar{\alpha}(b)$ , la curva se dice cerrada. Una curva cerrada tal que  $\bar{\alpha}(t_1) \neq \bar{\alpha}(t_2)$  ( $t_1 \neq t_2$ ,  $t_i \in ]a, b[$ ,  $i = 1, 2$ ) se llama curva cerrada simple. Las curvas cerradas simples planas se denominan curvas de Jordan.

Toda curva de Jordan  $C$  descompone el plano en dos conjuntos abiertos conexos disjuntos que tienen a  $C$  como frontera común, uno de ellos acotado (el *interior* de  $C$ ) y otro no acotado (el *exterior* de  $C$ ). Nótese que estos conceptos no se corresponden con el interior y el exterior topológicos del conjunto  $C$  y, por tanto, no deben ser confundidos con ellos. La demostración de este resultado en toda su generalidad no es sencilla; el primero en probar el llamado *teorema de la curva de Jordan* fue Oswald Veblen, en 1905.

### 2.2. Teorema de Green

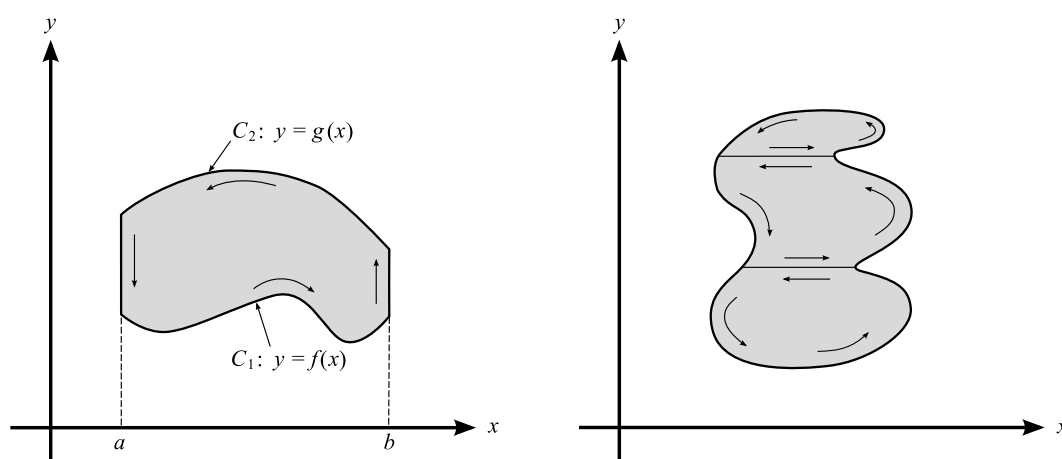
El teorema de Green vale para curvas de Jordan regulares a trozos  $C$  y regiones  $R$  constituidas por la curva  $C$  y su interior.

**Teorema 2.2 (Green).** Sean  $P, Q$  campos escalares de clase  $C^1$  en un conjunto abierto  $S$  del plano  $OXY$ . Sea  $C$  una curva de Jordan regular a trozos, y sea  $R$  la reunión de  $C$  y su interior. Si  $R \subset S$ , entonces

$$\iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$$

donde la integral de línea se toma alrededor de  $C$  en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj.

DEMOSTRACIÓN. Se probará el resultado para el caso particular de que  $R$  pueda ser descompuesta en un número finito de recintos que son simultáneamente de tipos I y II.



**Figura 1.** Demostración del teorema de Green para una región de tipo I (i) y para una región más general.

Suponiendo demostrado el teorema para regiones que son simultáneamente de tipos I y II, se efectúa la descomposición de  $R$  en un número finito de regiones de esta clase, se aplica el teorema a cada una y se suman los resultados miembro a miembro. Las integrales a lo largo de las fronteras interiores de las distintas subregiones se cancelan dos a dos (pues se recorren dos veces en sentidos opuestos), y la suma de las integrales a lo largo de las fronteras exteriores de dichas subregiones proporciona la integral de línea a lo largo de  $C$ ; véase la Figura 1. Por otra parte, la suma de las integrales dobles sobre cada una de las subregiones da lugar a la integral doble extendida a todo  $R$ . Esto demostraría el caso particular enunciado.

Así pues, nuestro objetivo se reduce a establecer el resultado para regiones que son simultáneamente de tipos I y II. A tal fin, probaremos que

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_C P dx$$

si  $R$  es una región de tipo I, y

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_C Q dy$$

si  $R$  es una región de tipo II. Dado que ambas demostraciones son completamente análogas, consideraremos solamente el primer caso.

Sea entonces

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

con  $f, g \in C[a, b]$  y  $f(x) \leq g(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ), una región de tipo I (Figura 1). Por una parte, se tiene:

$$-\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\int_a^b \left[ \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b [P(x, f(x)) - P(x, g(x))] dx.$$

Por otra parte, poniendo  $\bar{\alpha}(t) = (t, f(t))$  ( $a \leq t \leq b$ ) y denotando por  $C_1$  la gráfica de  $\bar{\alpha}$ :

$$\int_{C_1} P dx = \int_a^b (P(t, f(t)), 0) \cdot (1, f'(t)) dt = \int_a^b P(t, f(t)) dt.$$

Análogamente, poniendo  $\bar{\beta}(t) = (t, g(t))$  ( $a \leq t \leq b$ ) y denotando por  $C_2$  la gráfica de  $\bar{\beta}$ , recorrida en sentido opuesto:

$$\int_{C_2} P dx = -\int_a^b P(t, g(t)) dt.$$

Ya que la integral de línea a lo largo de cada segmento vertical de  $C$  es nula, resulta

$$\int_C P dx = \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx.$$

Se concluye que

$$\int_C P dx = \int_a^b P(t, f(t)) dt - \int_a^b P(t, g(t)) dt = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy,$$

como pretendíamos. □

**Ejemplo 2.3.** La integral doble que da el área  $|R|$  de una región  $R$  puede expresarse en la forma

$$|R| = \iint_R dx dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

siempre que  $P$  y  $Q$  sean tales que  $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 1$ . Si, por ejemplo, tomamos  $P(x, y) = -y/2$  y  $Q(x, y) =$

$x/2$ , el teorema de Green permite obtener el área de la región  $R$  encerrada por una curva de Jordan  $C$ , como la siguiente integral de línea:

$$|R| = \oint_C P dx + Q dy = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

### 2.3. Conjuntos simplemente conexos

**Definición 2.4.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^2$  un abierto conexo. Se dice que  $S$  es simplemente conexo si la región interior a toda curva de Jordan  $C$  contenida en  $S$  es también un subconjunto de  $S$ . Si  $S$  no es simplemente conexo, se dice múltiplemente conexo.

**Teorema 2.5.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^2$  simplemente conexo, y sea  $\vec{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  un campo vectorial de clase  $C^1(S)$ . Entonces  $\vec{f}$  es un gradiente en  $S$  si, y sólo si,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{en } S.$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que esta condición es necesaria para que  $\vec{f}$  sea un gradiente. Demostraremos ahora que también es suficiente.

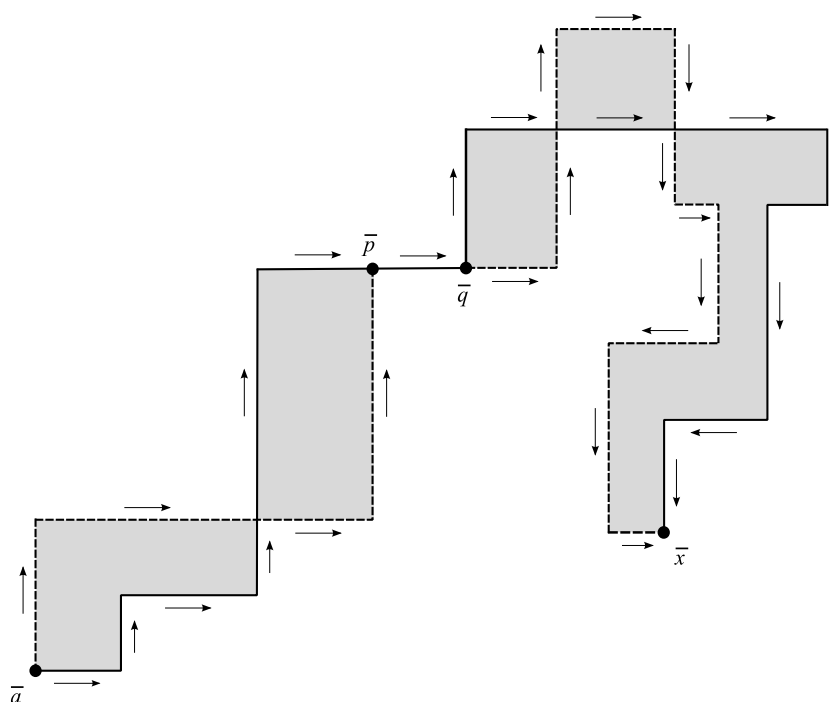
Se prueba que si  $S \subset \mathbb{R}^2$  es abierto y conexo entonces todo par de puntos  $\bar{a}, \bar{x} \in S$  puede ser conectado mediante una *poligonal escalonada simple*, esto es, una poligonal de tramos paralelos a los ejes coordenados y que no se cortan a sí mismos.

Si la integral de línea de  $\vec{f}$  desde  $\bar{a}$  hasta  $\bar{x}$  es independiente de la poligonal escalonada simple que une  $\bar{a}$  y  $\bar{x}$  en  $S$ , el argumento utilizado en la demostración del primer teorema fundamental del cálculo para integrales de línea establece que  $\vec{f}$  es un gradiente en  $S$ . Probemos entonces esta independencia.

Sean  $C_1, C_2$  dos poligonales escalonadas simples en  $S$  que unen  $\bar{a}$  con  $\bar{x}$ , descritas por los caminos  $\bar{\alpha}$  y  $\bar{\beta}$ , respectivamente. Algunos tramos de estas poligonales pueden coincidir, y los restantes se cortarían, a lo sumo, un número finito de veces, formando las fronteras de un número finito de polígonos  $R_1, \dots, R_m$ . Véase la Figura 2, donde la poligonal de trazo continuo representa a  $C_1$  y la de trazo discontinuo a  $C_2$ . Ambas poligonales coinciden a lo largo del segmento  $\overline{pq}$ . Las regiones sombreadas son las  $R_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq m$ ).

Como  $S$  se supone simplemente conexo, se tiene que  $R_k \subset S$  ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq m$ ). Al calcular

$$\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\bar{\alpha} - \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\bar{\beta}$$



**Figura 2.** Independencia del camino en un dominio simplemente conexo.

encontramos que las integrales de  $\vec{f}$  a lo largo de los segmentos comunes a ambas poligonales se cancelan dos a dos, ya que cada uno de estos segmentos se recorre dos veces en sentidos opuestos. Además, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq m$ , la integral sobre la frontera  $\Gamma_k$  de  $R_k$  es nula, pues en virtud del teorema de Green,

$$\oint_{\Gamma_k} P dx + Q dy = \pm \iint_{R_k} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Por tanto,

$$\int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{\alpha} = \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{\beta}.$$

Esto completa la prueba. □

### 3. Teorema de Green en regiones múltiplemente conexas

Extendemos ahora el teorema de Green a regiones múltiplemente conexas y analizamos algunas consecuencias de esta extensión.

### 3.1. Teorema de Green

**Teorema 3.1.** Sean  $C_1, \dots, C_n$   $n$  curvas de Jordan regulares a trozos, satisfaciendo:

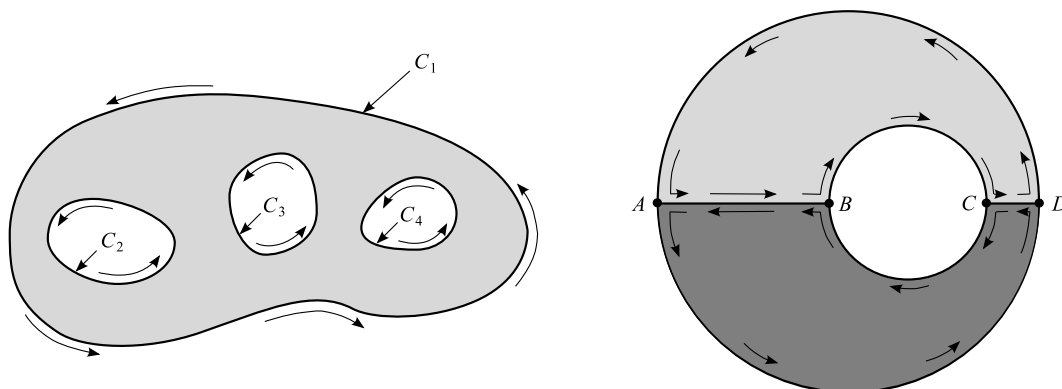
- (i) Dos curvas cualesquiera no se cortan.
- (ii) Todas las curvas  $C_2, \dots, C_n$  están en el interior de  $C_1$ .
- (iii) Cada  $C_i$  está en el exterior de  $C_j$  ( $i \neq j$ ,  $i, j = 2, \dots, n$ ).

Sea  $R$  la reunión de  $C_1$  con la porción interior a  $C_1$  que no está dentro de ninguna  $C_j$  ( $j = 2, \dots, n$ ). Si  $P, Q$  son de clase  $C^1$  en un abierto  $S$  que contiene a  $R$ , se verifica:

$$\iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{C_1} P dx + Q dy - \sum_{k=2}^n \oint_{C_k} P dx + Q dy,$$

donde las integrales del segundo miembro se toman en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj.

DEMOSTRACIÓN. Se introducen cortes que transformen  $R$  en una reunión finita de regiones simplemente conexas limitadas por curvas de Jordan, se aplica a cada una el teorema de Green, y se suman miembro a miembro los resultados. Este procedimiento puede justificarse fácilmente para  $n = 2$ ; el caso general sigue por inducción. Véase la Figura 3.



**Figura 3.** Región múltiplemente conexa (i); teorema de Green para una región doblemente conexa (d).



### 3.2. Invariancia de la integral de línea por deformación del camino

**Teorema 3.2.** Sean  $P, Q$  de clase  $C^1$  en un abierto conexo  $S \subset \mathbb{R}^2$ , y supongamos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{en } S. \quad (1)$$

Sean  $C_1, C_2$  dos curvas de Jordan regulares a trozos contenidas en  $S$ , satisfaciendo:

- (i)  $C_2$  está en el interior de  $C_1$ .
- (ii) Los puntos interiores a  $C_1$  que son exteriores a  $C_2$  están en  $S$ .

Si ambas curvas se recorren en el mismo sentido, entonces

$$\oint_{C_1} P dx + Q dy = \oint_{C_2} P dx + Q dy.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar el Teorema 3.1 con  $n = 2$  a la región  $R$  constituida por los puntos situados entre  $C_1$  y  $C_2$  junto con las propias curvas (Figura 4), teniendo en cuenta que

$$\iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

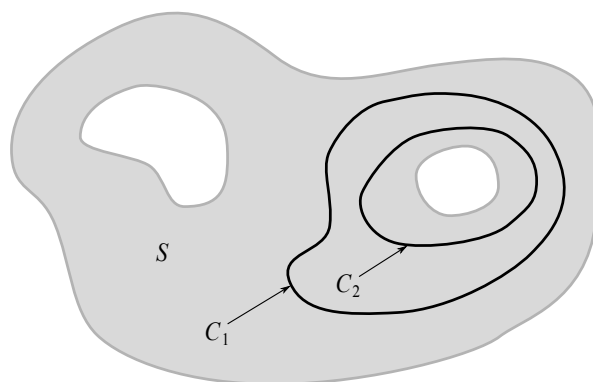
por (1). □

Este resultado se puede expresar diciendo que **si  $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$  en  $S$  entonces el valor de una integral de línea a lo largo de una curva de Jordan contenida en  $S$  no varía cuando ésta se deforma en otra curva de Jordan en  $S$  de manera que todas las curvas intermedias permanezcan dentro de  $S$ .**

## 4. Aplicaciones del teorema de Green

### 4.1. El número de giros

El valor de la integral de línea de un campo vectorial depende de la curva sobre la que se integra y del sentido en que ésta se recorre. El *número de giros* es un instrumento analítico que proporciona un método matemáticamente preciso para contar el número de veces que el radio vector  $\vec{\alpha}$  gira alrededor de un punto dado cuando va describiendo una curva determinada, y puede utilizarse para asignar una orientación a dicha curva.



**Figura 4.** Invariancia de una integral de línea por deformaciones del camino.

**Definición 4.1.** Sea  $C$  una curva cerrada regular a trozos en el plano, descrita por una función vectorial  $\bar{\alpha}$  definida en  $[a, b]$ :

$$\bar{\alpha}(t) = (X(t), Y(t)) \quad (a \leq t \leq b).$$

Sea  $P_0(x_0, y_0)$  un punto no situado en  $C$ . El número de giros de  $\bar{\alpha}$  respecto al punto  $P_0$  se denota  $W(\bar{\alpha}; P_0)$ , y se define como el valor de la integral

$$W(\bar{\alpha}; P_0) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{[X(t) - x_0]Y'(t) - [Y(t) - y_0]X'(t)}{[X(t) - x_0]^2 + [Y(t) - y_0]^2} dt.$$

Nótese que

$$W(\bar{\alpha}; P_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{-(y - y_0)dx + (x - x_0)dy}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Se demuestra que el valor de esta integral es siempre un entero, y que si  $C$  es una curva de Jordan entonces este entero es 0 cuando  $P_0$  es exterior a  $C$  y  $\pm 1$  si es interior a  $C$ . Además,  $W(\bar{\alpha}; P_0)$  es  $+1$  ó  $-1$  para todo  $P_0$  interior a  $C$ .

En efecto, sea  $S$  la región abierta conexa que forman todos los puntos del plano excepto  $(x_0, y_0)$ . La integral de línea que define a  $W(\bar{\alpha}; P_0)$  puede ser escrita en la forma

$$\oint_C P dx + Q dy,$$

donde

$$P(x, y) = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

verifican

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en  $S$ . Por consiguiente, si  $(x_0, y_0)$  es interior a  $C$ , en esta integral podemos reemplazar  $C$  por una circunferencia de centro  $(x_0, y_0)$  y radio  $r > 0$ , recorrida en el mismo sentido que  $C$ , sin que su valor cambie (Teorema 3.2). Para una tal circunferencia (que podemos parametrizar mediante  $X(t) = x_0 + r \cos t$ ,  $Y(t) = y_0 + r \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ), el número de giros es siempre  $\pm 1$ .

Podemos entonces definir las orientaciones positiva y negativa para  $C$  del siguiente modo:

**Definición 4.2.** Si  $W(\bar{\alpha}; P_0) = +1$  para todo  $P_0$  interior a  $C$ , decimos que  $\bar{\alpha}$  describe  $C$  en sentido positivo: contrario al del movimiento de las agujas del reloj. Si  $W(\bar{\alpha}; P_0) = -1$ , decimos que  $\bar{\alpha}$  describe  $C$  en sentido negativo: el del movimiento de las agujas del reloj.

## 4.2. Demostración del teorema del cambio de variables en el plano

**Teorema 4.3** (Cambio de variables). Sean  $T, S$  conjuntos medibles Jordan en los planos  $OUV$  y  $OXY$ , respectivamente. Sea  $f$  una función integrable sobre  $S$ . Supongamos que las ecuaciones  $x = X(u, v)$ ,  $y = Y(u, v)$  ( $(u, v) \in T$ ) definen una transformación biyectiva de  $T$  en  $S$ , con inversa dada por las ecuaciones  $u = U(x, y)$ ,  $v = V(x, y)$  ( $(x, y) \in S$ ). Si  $X, Y \in C^2(T)$ ,  $U, V \in C^1(S)$ , y el jacobiano de la transformación:

$$J(u, v) = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

no se anula en  $T$ , entonces

$$\iint_S f(x, y) \, dx \, dy = \iint_T f[X(u, v), Y(u, v)] |J(u, v)| \, du \, dv,$$

donde  $|J(u, v)|$  representa el valor absoluto de  $J(u, v)$ .

El teorema de Green permite demostrar un caso particular del Teorema 4.3, del cual se infiere fácilmente el caso general. Estableceremos ambos casos a continuación.

Antes de proceder a ello es oportuno advertir que el Teorema 4.3 vale cuando la transformación es de clase  $C^1$ , y así quedó enunciado con anterioridad. Sin embargo, el argumento que expondremos ahora requiere que sea de clase  $C^2$ , pues utiliza el teorema de Schwarz sobre igualdad de las derivadas cruzadas.

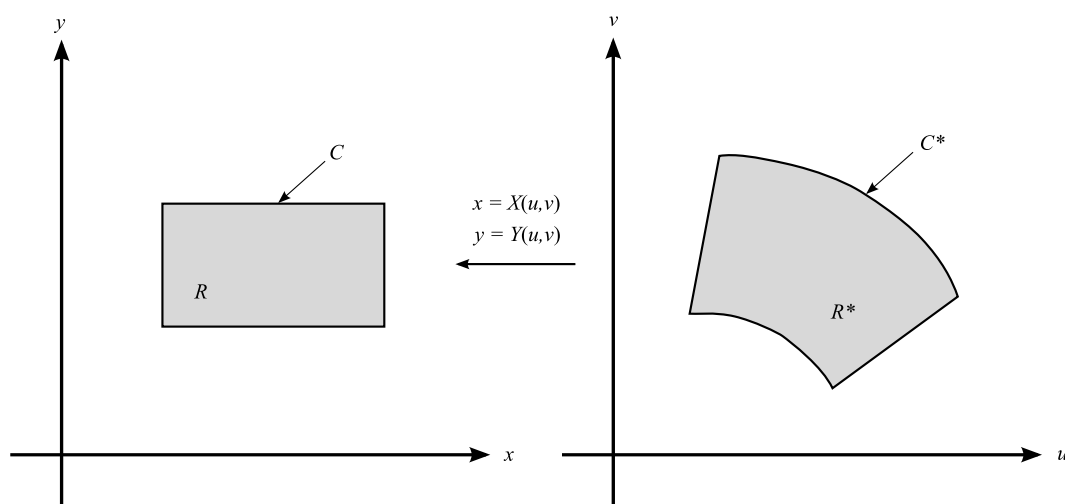


Figura 5. Deducción del teorema del cambio de variables para integrales dobles mediante el teorema de Green.

#### 4.2.1. Un caso particular

Sea  $R$  un rectángulo en el plano  $OXY$ , y sea  $R^*$  su imagen en el plano  $OUV$ , obtenida mediante la aplicación biyectiva

$$u = U(x, y), \quad v = V(x, y),$$

con inversa dada por

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v),$$

y siendo  $J(u, v)$  el determinante jacobiano

$$J(u, v) = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)}$$

(Figura 5). Utilizaremos el teorema de Green para probar que

$$\iint_R dx dy = \iint_{R^*} |J(u, v)| du dv. \quad (2)$$

Supondremos que  $X, Y$  son funciones de clase  $C^2$  y que  $J(u, v) \neq 0$  en  $R^*$ , de modo que  $J(u, v)$  es siempre positivo o siempre negativo. El significado de este signo de  $J(u, v)$  es el siguiente: cuando  $(x, y)$  recorre la frontera de  $R$  en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, su imagen  $(u, v)$  recorre la frontera de  $R^*$  en el mismo sentido o en sentido contrario según que  $J(u, v)$  sea positivo o negativo. En lo sucesivo asumiremos sin pérdida de generalidad que  $J(u, v) > 0$ .

Respecto al primer miembro de (2), se tiene:

$$\iint_R dx dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

donde  $Q(x,y) = x$ ,  $P(x,y) = 0$ . Según el teorema de Green, esta integral doble es igual a la integral de línea

$$\oint_C P dx + Q dy = \oint_C x dy,$$

siendo  $C$  la frontera de  $R$  recorrida en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj.

Análogamente, transformamos el segundo miembro de (2) en una integral de línea a lo largo de la frontera  $C^*$  de  $R^*$ . Utilizando el teorema de Schwarz, el integrando,  $J(u,v)$ , puede expresarse en la forma:

$$J(u,v) = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v} - X \frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left( X \frac{\partial Y}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( X \frac{\partial Y}{\partial u} \right).$$

Aplicamos el teorema de Green a la integral doble sobre  $R^*$  para escribir:

$$\iint_{R^*} J(u,v) du dv = \oint_{C^*} X \frac{\partial Y}{\partial u} du + X \frac{\partial Y}{\partial v} dv.$$

Ahora tenemos que ver que

$$\oint_C x dy = \oint_{C^*} X \frac{\partial Y}{\partial u} du + X \frac{\partial Y}{\partial v} dv. \quad (3)$$

A tal fin, introducimos una parametrización de  $C^*$ :

$$\bar{\alpha}(t) = (U(t), V(t)) \quad (a \leq t \leq b),$$

y llamamos

$$\bar{\beta}(t) = (X[U(t), V(t)], Y[U(t), V(t)]) \quad (a \leq t \leq b).$$

Cuando  $a \leq t \leq b$ ,  $\bar{\alpha}(t)$  describe  $C^*$  y  $\bar{\beta}(t)$  describe  $C$ . De acuerdo con la regla de la cadena,

$$\bar{\beta}'(t) = \left( \frac{\partial X}{\partial u} U'(t) + \frac{\partial X}{\partial v} V'(t), \frac{\partial Y}{\partial u} U'(t) + \frac{\partial Y}{\partial v} V'(t) \right).$$

Luego,

$$\oint_C x dy = \int_a^b X[U(t), V(t)] \left[ \frac{\partial Y}{\partial u} U'(t) + \frac{\partial Y}{\partial v} V'(t) \right] dt.$$

Por otra parte,

$$\oint_{C^*} X \frac{\partial Y}{\partial u} du + X \frac{\partial Y}{\partial v} dv = \int_a^b X[U(t), V(t)] \left[ \frac{\partial Y}{\partial u} U'(t) + \frac{\partial Y}{\partial v} V'(t) \right] dt.$$

Esto demuestra (3).

#### 4.2.2. El caso general

En el apartado anterior hemos probado, con ayuda del teorema de Green, la validez de la fórmula (2), correspondiente al teorema del cambio de variables en el caso particular en que  $R$  es un rectángulo del plano  $OXY$ ,  $R^*$  su imagen en el plano  $OUV$ , y el integrando la función idénticamente 1. Apoyándonos en ella estableceremos ahora la validez de dicho teorema en el caso general.

Sean  $s$  una función escalonada en  $R$ ,  $P$  una partición de  $R$  en  $m \cdot n$  subrectángulos  $R_{ij}$  de lados  $\Delta x_i$  y  $\Delta y_j$  en los que  $s$  es constante, y  $c_{ij}$  el valor de  $s$  en  $R_{ij}$  ( $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ ). Para cada  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ , (2) implica:

$$\Delta x_i \Delta y_j = \iint_{R_{ij}} dx dy = \iint_{R_{ij}^*} |J(u, v)| du dv,$$

donde  $R_{ij}^*$  denota la imagen de  $R_{ij}$ . Multiplicando por  $c_{ij}$  y sumando miembro a miembro:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \iint_{R_{ij}} dx dy = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \iint_{R_{ij}^*} |J(u, v)| du dv.$$

Como  $s$  es escalonada,

$$\iint_R s(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \iint_{R_{ij}^*} c_{ij} |J(u, v)| du dv = \iint_{R^*} s[X(u, v), Y(u, v)] |J(u, v)| du dv;$$

es decir,

$$\iint_R s(x, y) dx dy = \iint_{R^*} s[X(u, v), Y(u, v)] |J(u, v)| du dv. \quad (4)$$

Supongamos ahora que  $f$  es una función integrable en  $R$ , y sean  $s, t$  funciones escalonadas tales que

$$s(x, y) \leq f(x, y) \leq t(x, y) \quad ((x, y) \in R).$$

Entonces

$$s[X(u, v), Y(u, v)] \leq f[X(u, v), Y(u, v)] \leq t[X(u, v), Y(u, v)] \quad ((u, v) \in R^*),$$

y sigue de (4) que

$$\begin{aligned} \iint_R s(x,y) \, dx \, dy &= \iint_{R^*} s[X(u,v), Y(u,v)] |J(u,v)| \, du \, dv \\ &\leq \iint_{R^*} f[X(u,v), Y(u,v)] |J(u,v)| \, du \, dv \\ &\leq \iint_{R^*} t[X(u,v), Y(u,v)] |J(u,v)| \, du \, dv \\ &= \iint_R t(x,y) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Como  $s$  y  $t$  son arbitrarias, la integrabilidad de  $f$  obliga a que se tenga

$$\iint_R f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{R^*} f[X(u,v), Y(u,v)] |J(u,v)| \, du \, dv. \quad (5)$$

Finalmente, sea  $S$  un conjunto medible Jordan en el plano  $OXY$  que es imagen por la transformación  $(X(u,v), Y(u,v))$  del conjunto  $T$  del plano  $OUV$ . Si  $R$  es un rectángulo que contiene a  $S$  y  $\tilde{f}$  es la extensión de  $f$  a  $R$  que se anula fuera de  $S$ , (5) implica

$$\begin{aligned} \iint_S f(x,y) \, dx \, dy &= \iint_R \tilde{f}(x,y) \, dx \, dy \\ &= \iint_{R^*} \tilde{f}[X(u,v), Y(u,v)] |J(u,v)| \, du \, dv \\ &= \iint_T f[X(u,v), Y(u,v)] |J(u,v)| \, du \, dv. \end{aligned}$$

Esto completa la demostración.

## 5. Algunos ejemplos

**Ejemplo 5.1.** Utilizar el teorema de Green para calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas  $\vec{f}(x,y) = (y+3x, 2y-x)$  al mover una partícula rodeando una vez la elipse  $4x^2 + y^2 = 4$  en sentido positivo matemático.

RESOLUCIÓN. La elipse  $C$  tiene semiejes 1 y 2, luego encierra un área igual a  $2\pi$ . Por otra parte, las funciones  $P(x,y) = y+3x$ ,  $Q(x,y) = 2y-x$  son de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2$ . Ya que  $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = -2$ , el teorema de Green proporciona

$$\oint_C P \, dx + Q \, dy = -2 \iint_R dx \, dy = -2|R| = -4\pi,$$

que es el trabajo pedido. □

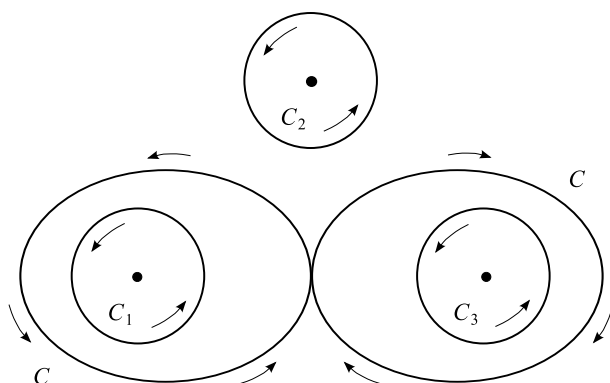


Figura 6. Ejemplo 5.2.

**Ejemplo 5.2.** Sean  $P, Q$  dos campos escalares de clase  $C^1$  que satisfacen  $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$  en todo el plano excepto en tres puntos. Sean  $C_1, C_2, C_3$  las tres circunferencias centradas en dichos puntos, y  $C$  la curva que rodea a  $C_1$  y  $C_3$ , que se muestran en la Figura 6. Finalmente, sea  $I_k = \oint_{C_k} P dx + Q dy$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Supongamos que  $I_1 = 12, I_2 = 10$  e  $I_3 = 15$ .

- (i) Hallar  $\oint_C P dx + Q dy$ .
- (ii) Dibujar una curva cerrada  $\Gamma$  a lo largo de la cual  $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = 1$ .
- (iii) Si  $I_1 = 12, I_2 = 9$  e  $I_3 = 15$ , ¿puede existir alguna curva cerrada  $\Gamma$  tal que  $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = 1$ ?

RESOLUCIÓN. Utilizaremos la invariancia de la integral de línea por deformación del camino (cf. Teorema 3.2).

- (i) Se tiene:

$$\oint_C P dx + Q dy = I_1 - I_3 = 12 - 15 = -3.$$

- (ii) Para la curva  $\Gamma$  de la Figura 7:

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = I_2 + I_3 - 2I_1 = 10 + 15 - 24 = 1.$$



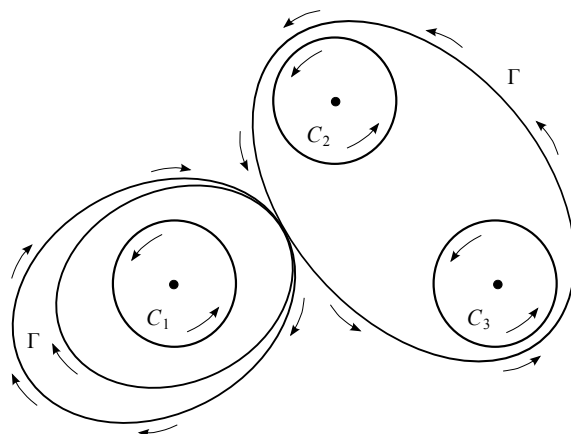


Figura 7. Solución al Ejemplo 5.2 (ii).

(iii) Si existiese un tal camino entonces para ciertos  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  se tendría

$$aI_1 + bI_2 + cI_3 = 12a + 9b + 15c = 1,$$

o bien

$$4a + 3b + 5c = \frac{1}{3},$$

donde el primer miembro está en  $\mathbb{Z}$  y el segundo en  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ : una contradicción, que responde negativamente a la pregunta.  $\square$