Integrales de superficie

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción

El objeto del presente tema es el estudio de la integral de superficie. Podemos considerar esta nueva integral como el equivalente bidimensional de la integral de línea, siendo la región de integración una superficie en vez de una curva.

Se impone, pues, comenzar el tema abordando el estudio de los objetos matemáticos de $\mathbb{R}^3$ conocidos como *superficies*. Estos objetos han aparecido ya con anterioridad, por ejemplo como gráficas de algunas funciones de dos variables. El estudio de las superficies tridimensionales es interesante en sí mismo y su análisis en profundidad corresponde a la rama de las matemáticas conocida como *geometría diferencial*. No pretendemos aventurarnos aquí en este análisis; simplemente daremos una definición formal, estudiaremos algunos casos particulares y precisaremos la propiedad de orientabilidad que presentan algunas de ellas, limitándonos, en definitiva, a recopilar el material necesario para trabajar con las superficies como regiones de integración y establecer a su debido tiempo los dos teoremas más importantes en este nuevo contexto: el *teorema de Stokes* y el *teorema de Gauss*.

2. Superficies

Informalmente hablando, una *superficie* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el espacio tridimensional con dos grados de libertad.

2.1. Representaciones de una superficie

Tres formas de expresar analíticamente un tal lugar son:

- **La representación implícita.** Una superficie es el lugar geométrico de los puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $F(x,y,z) = 0$ para cierto campo escalar F.

- **La representación explícita.** Es una ecuación de la forma $z = f(x,y)$, obtenida cuando en la expresión implícita $F(x,y,z) = 0$ podemos despejar una de las variables (z en este caso) en función de las otras dos.

- **La representación paramétrica o vectorial.** Es una terna de ecuaciones $x = X(u,v)$, $y = Y(u,v)$, $z = Z(u,v)$, que podemos expresar vectorialmente en la forma $\overline{r}(u,v) = X(u,v)\overline{i} + Y(u,v)\overline{j} + Z(u,v)\overline{k}$, donde (u,v) varía en un conjunto conexo $T \subset \mathbb{R}^2$. Supondremos que las funciones X, Y, Z son, al menos, continuas en T (Figura 1). Más precisamente:

Definición 2.1. *Una* superficie paramétrica *es la imagen* $S = \bar{r}(T)$ *de un conjunto conexo* $T \subset \mathbb{R}^2$ *mediante una función continua* $\bar{r} : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*, denominada* parametrización *de* S*. Si la función* $\bar{r}$ *es inyectiva sobre* T*, se dice que la superficie paramétrica* $\bar{r}(T)$ *es* simple.

Nótese que si $z = f(x,y)$ es una representación explícita de una superficie S, se obtiene una parametrización de S sin más que tomar $X(u,v) = u$, $Y(u,v) = v$, $Z(u,v) = f(u,v)$. Recíprocamente, obtenemos una representación explícita $z = f(x,y)$ de S si en su representación paramétrica es posible despejar u, v en función de x, y y las correspondientes expresiones se sustituyen en z; en tal caso, T es la proyección de S sobre el plano OXY.

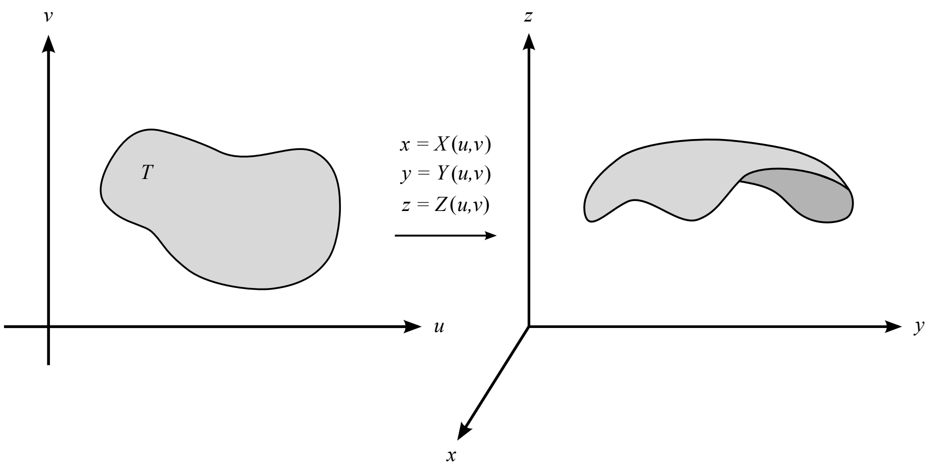

Figura 1. Una superficie paramétrica.

Por ejemplo, la esfera unidad tiene ecuación implícita $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Al despejar z en ella resultan dos soluciones, correspondientes a las ramas positiva y negativa de la raíz cuadrada, que proporcionan representaciones explícitas de los hemisferios superior e inferior, respectivamente: $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Una parametrización del hemisferio norte vendría dada por $\bar{r}_1(x,y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, mientras que la parametrización $\bar{r}_2(x,y) = (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})$ correspondería al hemisferio sur. En ambos casos, el dominio de variación de los parámetros sería el círculo unidad T del plano OXY: $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Otra posible representación paramétrica de la esfera unidad es:

$$x = \cos u \operatorname{sen} v, \qquad y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \qquad z = \cos v \qquad ((u,v) \in T = [0, 2\pi] \times [0, \pi]).$$

Adviértase que, a diferencia de las obtenidas anteriormente para los hemisferios, esta representación no proporciona una superficie simple, ya que, por ejemplo, todos los puntos de las rectas $u = 0$ y $u = 2\pi$ se aplican en un mismo meridiano sobre la esfera, mientras que todos los puntos con $v = \pi$ se transforman en el polo sur de la misma.

Puede ocurrir que una superficie paramétrica $\bar{r}(T)$ degenere en un punto o una curva: si X, Y, Z son constantes entonces $\bar{r}(T)$ es un solo punto, y si son independientes de v entonces $\bar{r}(T)$ es una curva alabeada. Para evitar estos casos excepcionales impondremos sobre $\bar{r}$ ciertas restricciones, que explicaremos a continuación.

2.2. Producto vectorial fundamental

Sea una superficie de ecuación vectorial $\bar{r}(u,v) = X(u,v)\bar{i} + Y(u,v)\bar{j} + Z(u,v)\bar{k}$ $((u,v) \in T)$. Si X, Y, Z son derivables, podemos considerar los vectores

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u}\bar{i} + \frac{\partial Y}{\partial u}\bar{j} + \frac{\partial Z}{\partial u}\bar{k},$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v}\bar{i} + \frac{\partial Y}{\partial v}\bar{j} + \frac{\partial Z}{\partial v}\bar{k}.$$

Definición 2.2. *El producto vectorial $\partial \bar{r}/\partial u \times \partial \bar{r}/\partial v$ se denomina* producto vectorial fundamental *de la representación $\bar{r}$.*

Nótese que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_u & Z_u \\ Y_v & Z_v \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} Z_u & X_u \\ Z_v & X_v \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} X_u & Y_u \\ X_v & Y_v \end{vmatrix} \bar{k} \\ &= \frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\bar{i} + \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\bar{j} + \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\bar{k}. \end{aligned} \tag{1}$$

2.2.1. Puntos regulares y singulares

Definición 2.3. *Si en $(u,v) \in T$, las derivadas parciales $\partial \bar{r}/\partial u$ y $\partial \bar{r}/\partial v$ son continuas y el producto vectorial fundamental no es nulo, se dice que $\bar{r}(u,v)$ es un* punto regular *de $\bar{r}$. Los puntos donde $\partial \bar{r}/\partial u$ ó $\partial \bar{r}/\partial v$ no son continuas, o bien el producto vectorial fundamental es el vector nulo, se llaman* puntos singulares *de $\bar{r}$. Se dirá que $\bar{r}$ es una parametrización* regular *si todos sus puntos son regulares.*

Ejemplo 2.4. *Considérese la superficie dada por la parametrización*

$$\bar{r}(u,v) = (u\cos v, u\,\mathrm{sen}\, v, u) \qquad (u \geq 0,\ 0 \leq v \leq 2\pi).$$

¿Es esta parametrización regular?

RESOLUCIÓN. Si elevamos al cuadrado las ecuaciones $x = u\cos v$, $y = u\,\mathrm{sen}\, v$, $z = u$ $(u \geq 0,\ 0 \leq v \leq 2\pi)$ vemos que describen la superficie $z = \sqrt{x^2+y^2}$, que es un semicono superior con vértice en el origen de coordenadas. Todos los puntos de esta parametrización son regulares, con la excepción, precisamente, del vértice. En efecto, para $u \geq 0$ y $0 \leq v \leq 2\pi$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} &= (\cos v, \mathrm{sen}\, v, 1), \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} &= (-u\,\mathrm{sen}\, v, u\cos v, 0). \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = -u(\cos v, \mathrm{sen}\, v, -1)$$

es el vector nulo si, y sólo si, $u = 0$. □

Nótese que nos referimos a puntos regulares y singulares *de una parametrización*, y no de una superficie: toda superficie admite más de una representación paramétrica, y puede ocurrir que un punto de una superficie sea regular para una parametrización y singular para otra.

Para ilustrar esta afirmación, consideremos la ecuación explícita $z = f(x,y)$ de una superficie S, que proporciona la representación paramétrica $\bar{r}(x,y) = (x,y,z(x,y))$ $((x,y) \in T)$, siendo T la proyección de S sobre el plano OXY. Si f es derivable, entonces

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Consecuentemente,

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\bar{i} - f_y\bar{j} + \bar{k} = (-f_x, -f_y, 1).$$

Como este producto vectorial fundamental nunca es nulo, los puntos singulares de la representación corresponden a puntos de discontinuidad de f_x y f_y.

En particular, si S es el hemisferio unidad norte parametrizado mediante $\bar{r}(x,y) = (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$ $((x,y) \in T)$, donde $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\right\}$, entonces

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}(x,y) = \left(1,0,-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right), \qquad \frac{\partial \bar{r}}{\partial y}(x,y) = \left(0,1,-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) \qquad ((x,y) \in T),$$

de modo que los puntos singulares son los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2+y^2 = 1$, correspondientes al **ecuador** de la esfera.

Si consideramos el mismo hemisferio parametrizado mediante

$$\bar{r}(u,v) = (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v) \qquad (0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq \pi/2),$$

entonces

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u \operatorname{sen} v, 0), \qquad \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = (\cos u \cos v, \operatorname{sen} u \cos v, -\operatorname{sen} v) \qquad (0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq \pi/2).$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & \cos u \operatorname{sen} v & 0 \\ \cos u \cos v & \operatorname{sen} u \cos v & -\operatorname{sen} v \end{vmatrix} = -\operatorname{sen} v\, \bar{r}(u,v) \qquad (0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq \pi/2).$$

El único punto singular para esta parametrización es el **polo norte**, $v = 0$.

2.2.2. Interpretación geométrica

Dada una representación paramétrica derivable $\bar{r}(u,v)$ $((u,v) \in T)$ de una superficie $\bar{r}(T)$, consideremos un segmento rectilíneo horizontal en T, de modo que v es constante sobre dicho segmento. La función $\bar{r}$ aplica este segmento sobre una curva (llamada *curva u*) de la superficie $\bar{r}(T)$. Si u es un parámetro que representa el tiempo, entonces $\partial \bar{r}/\partial u$ es el vector velocidad de la curva u. Similarmente, $\partial \bar{r}/\partial v$ representa el vector velocidad de una *curva v* obtenida haciendo u constante. Por cada punto de $\bar{r}(T)$ pasan una curva u y una curva v.

Consideremos ahora un rectángulo infinitesimal de lados Δu y Δv. En el tiempo Δu, un punto de la curva u

se desplaza una distancia aproximadamente igual a $\|\partial\overline{r}/\partial u\|\,\Delta u$ a lo largo de dicha curva. Análogamente, en el tiempo Δv un punto de una curva v recorre sobre la misma una distancia aproximadamente igual a $\|\partial\overline{r}/\partial v\|\,\Delta v$. La región rectangular de lados Δu y Δv en T se transforma, de forma aproximada, en un paralelogramo en $\overline{r}(T)$ cuyos lados son los vectores $\Delta u\partial\overline{r}/\partial u$, $\Delta v\partial\overline{r}/\partial v$ y cuya área es es la norma del producto vectorial de ambos:

$$\left\|\left(\Delta u\frac{\partial\overline{r}}{\partial u}\right)\times\left(\Delta v\frac{\partial\overline{r}}{\partial v}\right)\right\| = \left\|\frac{\partial\overline{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial v}\right\|\Delta u\Delta v.$$

Así pues, el módulo del producto vectorial fundamental puede ser interpretado como un factor de proporcionalidad de áreas. En los puntos donde el producto vectorial fundamental es nulo, el paralelogramo degenera en una curva o un punto. Por otra parte, en cada punto regular de la superficie los vectores $\partial\overline{r}/\partial u$, $\partial\overline{r}/\partial v$ determinan un plano que tiene al producto vectorial fundamental por normal (Figura 2).

2.2.3. Plano tangente

Definición 2.5. *El plano determinado por $\partial\overline{r}/\partial u$ y $\partial\overline{r}/\partial v$ en cada punto regular de una superficie se llama* plano tangente *a la superficie en el punto considerado.*

Si $\partial\overline{r}/\partial u$ y $\partial\overline{r}/\partial v$ son continuas en todo punto entonces $\partial\overline{r}/\partial u\times\partial\overline{r}/\partial v$ también lo es, así que el plano tangente se mueve con suavidad, indicando la ausencia de aristas o puntas en la superficie (compárese con el Ejemplo 2.4).

2.2.4. El producto vectorial fundamental como normal a la superficie

Demostraremos a continuación que el producto vectorial fundamental es normal a toda curva regular sobre la superficie.

Sea $\overline{r}(T)$ una superficie paramétrica regular, y sea C^* una curva regular en T, de modo que $C=\overline{r}(C^*)$ es una curva regular en $\overline{r}(T)$. Si $\overline{\alpha}(t)=(U(t),V(t))$ $(t\in[a,b])$ es un camino que describe C^*, entonces $\overline{\rho}(t)=\overline{r}[\overline{\alpha}(t)]=(X[\overline{\alpha}(t)],Y[\overline{\alpha}(t)],Z[\overline{\alpha}(t)])$ $(t\in[a,b])$ es un camino que describe C. Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}
\overline{\rho}'(t) &= \big(\nabla X\cdot\overline{\alpha}'(t),\nabla Y\cdot\overline{\alpha}'(t),\nabla Z\cdot\overline{\alpha}'(t)\big)\\
&= \big(X_uU'(t)+X_vV'(t),Y_uU'(t)+Y_vV'(t),Z_uU'(t)+Z_vV'(t)\big)\\
&= (X_u,Y_u,Z_u)\,U'(t)+(X_v,Y_v,Z_v)\,V'(t)\\
&= \frac{\partial\overline{r}}{\partial u}U'(t)+\frac{\partial\overline{r}}{\partial v}V'(t).
\end{aligned}$$

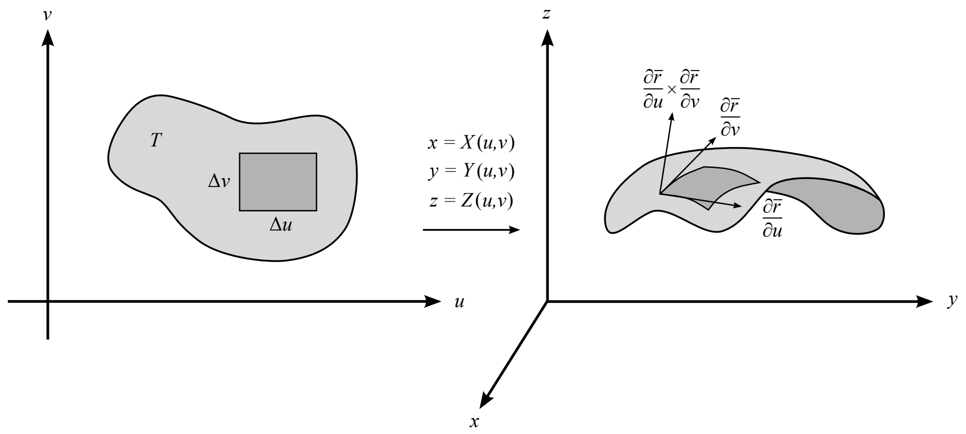

Figura 2. Interpretación geométrica del producto vectorial fundamental.

Ya que $\partial\overline{r}/\partial u$ y $\partial\overline{r}/\partial v$ son perpendiculares a $\partial\overline{r}/\partial u \times \partial\overline{r}/\partial v$ en cada punto lo mismo ocurre con $\overline{\rho}'(t)$, así que el producto vectorial fundamental es normal a C, como queríamos probar.

Por esta razón, el vector $\partial\overline{r}/\partial u \times \partial\overline{r}/\partial v$ se llama *normal* a la superficie $\overline{r}(T)$.

3. Área de una superficie

3.1. Representación paramétrica

Sea $S = \overline{r}(T)$ una superficie paramétrica representada por la función $\overline{r}$ definida en una región T del plano OUV. Ya justificamos por qué el módulo del producto vectorial fundamental $\partial\overline{r}/\partial u \times \partial\overline{r}/\partial v$ puede ser interpretado como un factor de proporcionalidad de áreas: un rectángulo en T de área infinitesimal $\Delta u \Delta v$ es aplicado por $\overline{r}$ en un paralelogramo curvilíneo en S de área aproximadamente igual a

$$\left\| \frac{\partial\overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\overline{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v.$$

Esta observación sugiere la siguiente

Definición 3.1. *Si $S = \overline{r}(T)$, se define el área de S mediante*

$$|S| = \iint_T \left\| \frac{\partial\overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\overline{r}}{\partial v} \right\| du\, dv.$$

Nótese que, por (1),

$$|S| = \iint_T \left\{ \left(\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} \right)^2 \right\}^{1/2} du\, dv,$$

expresión análoga a la integral que da la longitud de un arco de curva.

3.2. Representación explícita

Si $z = f(x,y)$ es la ecuación explícita de una superficie S y tomamos x, y como parámetros, entonces

$$\left\| \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \right\| = \left\| -f_x \bar{\imath} - f_y \bar{\jmath} + \bar{k} \right\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2},$$

y la integral para el área de S adopta la forma

$$|S| = \iint_T \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy, \tag{2}$$

donde T es ahora la proyección de S sobre el plano OXY.

En el caso particular en que S esté en un plano paralelo al plano OXY entonces la función f es constante, de modo que $f_x = f_y = 0$, y la ecuación anterior se convierte en

$$|S| = \iint_T dx\, dy,$$

que es la fórmula usual para el cálculo del área de regiones planas.

3.3. Representación implícita

Supongamos ahora que S viene dada implícitamente por la ecuación $F(x,y,z) = 0$. Si S se puede proyectar biunívocamente sobre OXY, la ecuación $F(x,y,z) = 0$ define z como función de x, y: $z = f(x,y)$, y las derivadas parciales f_x, f_y se relacionan con las de F por derivación implícita mediante las fórmulas

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} f_x = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} f_y = 0;$$

de aquí,

$$f_x = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \qquad f_y = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$$

en los puntos donde $\partial F/\partial z \neq 0$. Sustituyendo ambas expresiones en la fórmula del área en explícitas obtenemos:

$$|S| = \iint_T \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|}\, dx\, dy. \tag{3}$$

3.4. Algunos ejemplos

Ejemplo 3.2. *Calcular el área de un hemisferio.*

RESOLUCIÓN. Consideremos un hemisferio norte de radio $a > 0$ y centro el origen de coordenadas.

(i) **Representación paramétrica:** $\overline{r}(u,v) = (a\cos u \operatorname{sen} v, a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, a\cos v)$ $(0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq \pi/2)$. El módulo del producto vectorial fundamental es

$$\left\| \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right\| = a^2 |\operatorname{sen} v| = a^2 \operatorname{sen} v \qquad (0 \leq v \leq \pi/2).$$

Si $T = [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$, entonces

$$|S| = a^2 \iint_T \operatorname{sen} v\, du\, dv = a^2 \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} v\, dv = 2\pi a^2.$$

(ii) **Representación explícita:** $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Poniendo $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ encontramos que

$$f_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \qquad f_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

El hemisferio norte se proyecta biyectivamente en el disco $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\right\}$ del plano OXY. De acuerdo con (2):

$$|S| = \iint_T \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy = a \iint_T \frac{dx\, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

donde el denominador del integrando se anula sobre ∂T. Se trata, por tanto, de una integral impropia de integrando positivo. Dicha integral existe (convergente o divergente) y se puede calcular considerando cualquier sucesión básica. Elegimos discos concéntricos $T(R)$, centrados en el origen, de radios R crecientes a a. Si $S(R)$ representa la porción correspondiente del hemisferio superior, entonces

$$|S(R)| = a \iint_{T(R)} \frac{dx\, dy}{\sqrt{a - x^2 - y^2}}.$$

Efectuando un cambio de variable a polares,

$$|S(R)| = a\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = 2\pi a\left(a-\sqrt{a^2-R^2}\right).$$

Finalmente,

$$|S| = \lim_{R\to a} |S(R)| = 2\pi a^2.$$

(iii) **Representación implícita:** $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$. Se tiene: $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2$, $F_x=2x$, $F_y=2y$, $F_z=2z$. De acuerdo con (3):

$$|S| = \iint_T \frac{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}}{|2z|}\,dx\,dy = a\iint_T \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

donde $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq a^2\right\}$. Se trata, por tanto, de la misma integral impropia que comparece en (ii), ya resuelta. □

Ejemplo 3.3. *Calcular el área del tronco de cono de ecuación $z=a\sqrt{x^2+y^2}$ y bases de radios b, c, con $a>0$ y $b<c$.*

RESOLUCIÓN. Sea S la superficie considerada, y sea $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : b^2\leq x^2+y^2\leq c^2\right\}$ su proyección en el plano OXY. Si $f(x,y)=a\sqrt{x^2+y^2}$ entonces

$$f_x = \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_y = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

y sigue de (2) que

$$|S| = \iint_T \sqrt{1+a^2}\,dx\,dy = \pi\sqrt{1+a^2}(c^2-b^2)$$

es el área pedida. □

4. Integral de superficie de campos escalares

Como ya hemos mencionado, las integrales de superficie son análogas a las de línea en muchos aspectos. Oportunamente definimos las integrales de línea mediante una representación paramétrica de la curva.

Ahora haremos lo propio con las integrales de superficie. Demostraremos luego que, bajo ciertas condiciones generales, el valor de la integral es independiente de la representación.

4.1. Definición

Definición 4.1. *Sea $S = \bar{r}(T)$ una superficie paramétrica descrita por una función $\bar{r} \in C^1(T)$, donde T es una región del plano OUV, y sea f un campo escalar definido y acotado en S. La integral de superficie de f sobre S se representa*

$$\iint_{\bar{r}(T)} f\, dS \qquad \text{ó} \qquad \iint_S f\, dS,$$

y está definida por la ecuación

$$\iint_{\bar{r}(T)} f\, dS = \iint_T f[\bar{r}(u,v)] \left\| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right\| du\, dv,$$

siempre que exista la integral doble del segundo miembro.

Si S es la unión de N superficies paramétricas S_i $(i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le N)$, disjuntas excepto quizá a lo largo de las curvas que definen sus fronteras, entonces la integral de f sobre S está definida por

$$\iint_S f\, dS = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} f\, dS.$$

Por ejemplo, la integral sobre la superficie de un cubo se puede expresar como la suma de las integrales sobre sus seis caras.

Ejemplo 4.2. *Sean $S : z = x^2 + y$, $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}$. Hallar $\iint_S x\, dS$.*

RESOLUCIÓN. Ponemos $f(x,y) = x^2 + y$ y consideramos la parametrización de S dada por $\bar{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$ $((x,y) \in T)$. El correspondiente producto vectorial fundamental viene dado por el vector $(-f_x, -f_y, 1) = (-2x, -1, 1)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \iint_S x\, dS &= \iint_T x\sqrt{4x^2+2}\, dx\, dy = \sqrt{2} \int_{-1}^{1} dy \int_0^1 x\sqrt{2x^2+1}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 4x\sqrt{2x^2+1}\, dx = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Para el cómputo de la última integral se ha efectuado el cambio de variable $2x^2 + 1 = t$. □

Ejemplo 4.3. *Calcular* $\iint_S z^2\, dS$*, siendo* S *la esfera unidad.*

RESOLUCIÓN. Consideramos la parametrización de S dada por

$$x = \cos u \operatorname{sen} v, \qquad y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \qquad z = \cos v \qquad ((u,v) \in T = [0,2\pi] \times [0,\pi]),$$

cuyo producto vectorial fundamental es $-\operatorname{sen} v\, \overline{r}(u,v)$, con módulo $\operatorname{sen} v$ $(0 \leq v \leq \pi)$. Entonces

$$\iint_S z^2\, dS = \iint_T \cos^2 v \operatorname{sen} v\, du\, dv = \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \cos^2 v \operatorname{sen} v\, dv = \frac{4\pi}{3}.$$

Esto resuelve el ejemplo. □

4.2. Motivación

Sea T un rectángulo particionado en n^2 subrectángulos R_{ij} $(i,j \in \mathbb{N},\ 1 \leq i,j \leq n)$. Para cada $i,j \in \mathbb{N},\ 1 \leq i,j \leq n$, sea $S_{ij} = \overline{r}(R_{ij})$ la parte de la superficie $\overline{r}(T)$ correspondiente a R_{ij}, y sea $|S_{ij}|$ el área de S_{ij}. Para n grande, f será aproximadamente constante en S_{ij}.

Parece natural definir

$$\iint_S f\, dS = \lim_{n\to\infty} I_n,$$

donde

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f[\overline{r}(u_i, v_j)]|S_{ij}|$$

con $(u_i, v_j) \in R_{ij}$. Ahora bien, por el teorema de la media,

$$|S_{ij}| = \iint_{R_{ij}} \left\| \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right\| du\, dv = \left\| \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right)\Big|_{(u_i^*, v_j^*)} \right\| \Delta u \Delta v$$

para algún $(u_i^*, v_j^*) \in R_{ij}$, y consecuentemente

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f[\overline{r}(u_i^*, v_j^*)] \left\| \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right)\Big|_{(u_i^*, v_j^*)} \right\| \Delta u \Delta v.$$

De aquí,

$$\iint_S f\,dS = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f[\overline{r}(u_i^*, v_j^*)] \left\| \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right)\Big|_{(u_i^*, v_j^*)} \right\| \Delta u \Delta v = \iint_T f[\overline{r}(u,v)] \left\| \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right\| du\,dv.$$

4.3. Cambios de parametrización

Supongamos que $\overline{r}$ aplica una región A del plano OUV en una superficie paramétrica $\overline{r}(A)$, y que A es la imagen de una región B del plano OST a través de una aplicación biyectiva $\overline{G}$ de clase C^1, dada por

$$\overline{G}(s,t) = U(s,t)\overline{i} + V(s,t)\overline{j} \qquad ((s,t) \in B).$$

Consideremos la función $\overline{R}$, definida en B mediante la ecuación

$$\overline{R}(s,t) = \overline{r}[\overline{G}(s,t)] \qquad ((s,t) \in B).$$

Dos funciones $\overline{r}$, $\overline{R}$ así relacionadas se dicen *regularmente equivalentes*. Representan la misma superficie, esto es, $\overline{r}(A) = \overline{R}(B)$ como conjuntos de puntos, pues $\overline{G}$ es biyectiva de A en B (Figura 3).

Proposición 4.4. *Sean $\overline{r}$, $\overline{R}$ dos funciones regularmente equivalentes ligadas por la relación $\overline{R}(s,t) = \overline{r}[\overline{G}(s,t)]$, donde $\overline{G}$ es una aplicación biyectiva de clase C^1 que transforma una región B del plano OST en una región A del plano OUV, dada por la ecuación*

$$\overline{G}(s,t) = U(s,t)\overline{i} + V(s,t)\overline{j} \qquad ((s,t) \in B).$$

Entonces

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \overline{R}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right) \frac{\partial (U,V)}{\partial (s,t)},$$

donde las derivadas parciales $\partial \overline{r}/\partial u$ y $\partial \overline{r}/\partial v$ están calculadas en el punto $(U(s,t), V(s,t))$.

DEMOSTRACIÓN. Las derivadas $\partial \overline{R}/\partial s$ y $\partial \overline{R}/\partial t$ se calculan a partir de la relación $\overline{R}(s,t) = \overline{r}[U(s,t), V(s,t)]$ mediante la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial s} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial s},$$

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial t}.$$

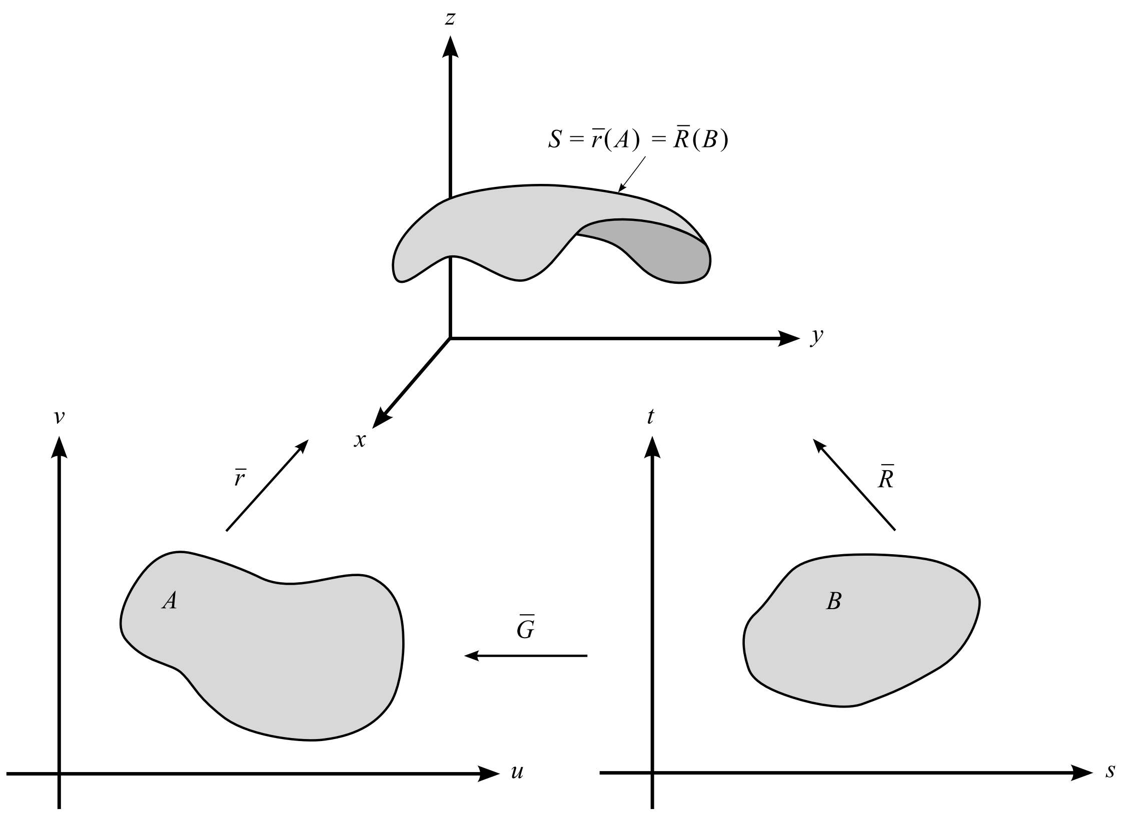

Figura 3. Dos funciones regularmente equivalentes representan la misma superficie.

Multiplicando vectorialmente y haciendo uso de las propiedades de los determinantes encontramos que

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \overline{R}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial s} \right) = \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right) \frac{\partial (U,V)}{\partial (s,t)},$$

como pretendíamos probar. □

Teorema 4.5. *En las condiciones de la Proposición 4.4, supongamos que la transformación $\overline{G}$ que relaciona $\overline{r}$ y $\overline{R}$ satisface las hipótesis del teorema del cambio de variables para integrales dobles. Si f es un campo escalar para el cual existe la integral de superficie $\iint_{\overline{r}(A)} f\, dS$, entonces también existe $\iint_{\overline{R}(B)} f\, dS$ y*

$$\iint_{\overline{r}(A)} f\, dS = \iint_{\overline{R}(B)} f\, dS.$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición,

$$\iint_{\overline{r}(A)} f\,dS = \iint_A f[\overline{r}(u,v)] \left\| \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right\| du\,dv.$$

El teorema del cambio de variables para integrales dobles establece que

$$\iint_A f[\overline{r}(u,v)] \left\| \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right\| du\,dv = \iint_B f\left[\overline{r}(\overline{G}(s,t))\right] \left\| \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right\| \left| \frac{\partial(U,V)}{\partial(s,t)} \right| ds\,dt,$$

donde las derivadas $\partial\overline{r}/\partial u$ y $\partial\overline{r}/\partial v$ del segundo miembro están calculadas en $(U(s,t),V(s,t))$. En virtud de la igualdad

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \overline{R}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right) \frac{\partial(U,V)}{\partial(s,t)}$$

(Proposición 4.4), la integral sobre B vale

$$\iint_B f[\overline{R}(s,t)] \left\| \frac{\partial \overline{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \overline{R}}{\partial t} \right\| ds\,dt,$$

que es la definición de

$$\iint_{\overline{R}(B)} f\,dS.$$

Esto demuestra el teorema. □

5. Integral de superficie de campos vectoriales

5.1. Definición

Definición 5.1. *Sea $S = \overline{r}(T)$ una superficie paramétrica descrita por una función $\overline{r} \in C^1(T)$, donde T es una región del plano OUV, y sea $\overline{F}$ un campo vectorial definido y acotado en S. La integral de superficie de $\overline{F}$ sobre S se denota por*

$$\iint_{\overline{r}(T)} \overline{F} \cdot dS \qquad \text{ó} \qquad \iint_S \overline{F} \cdot dS,$$

y se define mediante

$$\iint_{\overline{r}(T)} \overline{F} \cdot dS = \iint_T \overline{F}[\overline{r}(u,v)] \cdot \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right) du\,dv,$$

siempre que exista la integral doble del segundo miembro.

Ejemplo 5.2. *Se considera la esfera unidad, parametrizada por*

$$\overline{r}(u,v) = (\cos u \,\mathrm{sen}\, v, \mathrm{sen}\, u \,\mathrm{sen}\, v, \cos v) \qquad ((u,v) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]).$$

Calcular $\iint_S \overline{R} \cdot dS$, *donde* $\overline{R}(x,y,z) = (x,y,z)$ *es el vector de posición.*

RESOLUCIÓN. Sabemos que el producto vectorial fundamental correspondiente a $\overline{r}$ es el vector $\partial\overline{r}/\partial u \times \partial\overline{r}/\partial v = -\,\mathrm{sen}\, v\, \overline{r}(u,v)$. Por tanto,

$$\overline{R}[\overline{r}(u,v)] \cdot \left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\overline{r}}{\partial v}\right) = -\,\mathrm{sen}\, v\, \overline{r}(u,v) \cdot \overline{r}(u,v) = -\,\mathrm{sen}\, v\, \|\overline{r}(u,v)\|^2 = -\,\mathrm{sen}\, v.$$

Concluimos que

$$\iint_S \overline{R} \cdot dS = -\int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \mathrm{sen}\, v\, dv = -4\pi$$

es el valor de la integral pedida. □

5.2. Motivación: flujo de un fluido

Imaginemos que un fluido es una colección de puntos, llamados *partículas*. A cada partícula (x,y,z) le asignamos un vector $\overline{V}(x,y,z)$ que representa su velocidad; este es el campo de velocidad de la corriente, y puede o no cambiar con el tiempo. Consideraremos corrientes *estacionarias*, esto es, aquellas para las que la velocidad $\overline{V}(x,y,z)$ depende únicamente de la posición de la partícula, y no del tiempo.

Designamos por $\rho(x,y,z)$ la densidad (masa/volumen) del fluido en el punto (x,y,z). La densidad es un campo escalar asociado a la corriente. Representamos por $\overline{F}$ el producto de la densidad por la velocidad:

$$\overline{F}(x,y,z) = \rho(x,y,z)\overline{V}(x,y,z).$$

Este campo vectorial se denomina *densidad de flujo* de la corriente. El vector $\overline{F}(x,y,z)$ tiene la misma dirección que la velocidad, y su módulo tiene dimensiones

$$\frac{\text{masa}}{\text{volumen}} \cdot \frac{\text{longitud}}{\text{tiempo}} = \frac{\text{masa}}{\text{área} \cdot \text{tiempo}}.$$

En otras palabras, el vector densidad de flujo $\overline{F}(x,y,z)$ expresa cuánta masa de fluido circula por el punto (x,y,z) en la dirección de $\overline{V}(x,y,z)$ por unidad de área y tiempo.

Sea ahora $S = \overline{r}(T)$ una superficie paramétrica simple. En cada punto regular de S designamos con $\overline{n}$ el vector normal unitario que tiene el mismo sentido que el producto vectorial fundamental:

$$\overline{n} = \frac{\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \overline{r}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right\|}.$$

El producto escalar $\overline{F} \cdot \overline{n}$ representa la componente del vector densidad de flujo en la dirección de $\overline{n}$.

Queremos calcular la masa de fluido que pasa a través de S por unidad de tiempo en la dirección de $\overline{n}$. A tal fin, suponemos, por simplicidad, que T es un rectángulo y particionamos T en n^2 subrectángulos R_{ij} $(i, j \in \mathbb{N},\ 1 \leq i, j \leq n)$ de lados horizontal y vertical con longitudes respectivas Δu y Δv. Para cada $i, j \in \mathbb{N},\ 1 \leq i, j \leq n$, sean $(u, v) \in R_{ij}$ y $\overline{r}(u, v)$ el punto correspondiente en S. Consideramos el paralelogramo de lados $\Delta u \partial \overline{r}/\partial u$ y $\Delta u \partial \overline{r}/\partial v$, que está en el plano tangente a S en $\overline{r}(u, v)$, y el paralelepípedo formado por $\overline{F}$, $\Delta u \partial \overline{r}/\partial u$ y $\Delta v \partial \overline{r}/\partial v$. El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto

$$\overline{F}[\overline{r}(u,v)] \cdot \left(\Delta u \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \Delta v \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right) = \overline{F} \cdot \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right) \Delta u \Delta v,$$

y mide la cantidad de fluido que pasa a través del paralelogramo tangente por unidad de tiempo. Como el signo de

$$\overline{F}[\overline{r}(u,v)] \cdot \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right) \Delta u \Delta v$$

es positivo o negativo según que $\overline{F}$ apunte hacia afuera o hacia adentro,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{F}[\overline{r}(u,v)] \cdot \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right) \Delta u \Delta v$$

es una medida aproximada de la cantidad neta de fluido que fluye a través de la superficie por unidad de tiempo. Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{F}[\overline{r}(u,v)] \cdot \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right) \Delta u \Delta v &= \iint_T \overline{F}[\overline{r}(u,v)] \cdot \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right) du\, dv \\ &= \iint_S \overline{F} \cdot dS \end{aligned}$$

es la cantidad neta de fluido que fluye a través de la superficie por unidad de tiempo, esto es, la tasa de flujo. Por ello, la integral anterior se llama *flujo* de $\overline{F}$ a través de S.

5.3. Cambios de parametrización

Definición 5.3. *Una* superficie orientada *es una superficie de dos caras, una de ellas la* exterior *o* positiva *y la otra la* interior *o* negativa.

En cada punto de una superficie orientada S hay dos vectores normales unitarios $\overline{n}_1$ y $\overline{n}_2$, donde $\overline{n}_1 = -\overline{n}_2$. Cada uno de ellos se puede asociar con una cara de la superficie. Habitualmente se escoge como cara positiva aquella en la que la normal unitaria apunta hacia afuera (Figura 4).

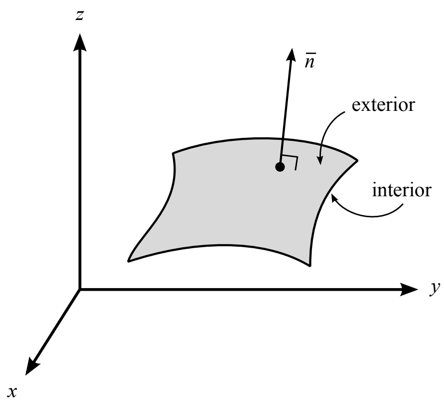

Figura 4. El vector $\overline{n}$ apunta hacia el exterior de la superficie.

En la Definición 5.3 usamos el término «cara» en sentido intuitivo, aunque este concepto se puede formular de manera rigurosa. La elección del lado llamado «exterior» viene impuesta a menudo por la propia superficie, como por ejemplo en el caso de una esfera, si bien en otros casos es arbitraria.

No toda superficie tiene dos caras. Un ejemplo de superficie de una sola cara es la *banda de Möbius* M, que puede verse en la Figura 5. En cada punto de M hay dos normales unitarias $\overline{n}_1$ y $\overline{n}_2$, pero ninguna de ellas determina de forma unívoca una cara de M. Para justificarlo intuitivamente, podemos deslizar $\overline{n}_2$ alrededor de la curva cerrada C de la Figura 5. Cuando $\overline{n}_2$ regrese a un punto fijo P de C coincidirá con $\overline{n}_1$, mostrando que tanto $\overline{n}_1$ como $\overline{n}_2$ apuntan desde la misma cara de M y, en consecuencia, M tiene una sola cara.

Sea $\overline{r}(u,v)$ $((u,v) \in T)$ una parametrización de una superficie orientada S que es regular en $\overline{r}(u_0,v_0)$ $((u_0,v_0) \in T)$, esto es, está definido el vector normal unitario

$$\overline{N}[\overline{r}(u_0,v_0)] = \frac{\left.\left(\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \overline{r}}{\partial v}\right)\right|_{(u_0,v_0)}}{\left\| \left.\left(\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \overline{r}}{\partial v}\right)\right|_{(u_0,v_0)} \right\|}.$$

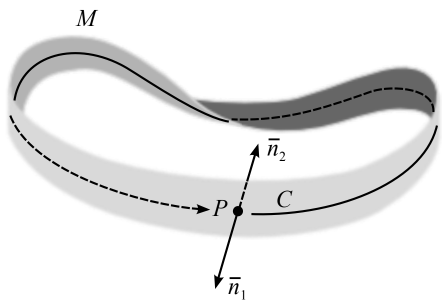

Figura 5. La banda de Möbius tiene una sola cara.

Si $\bar{n}[\bar{r}(u_0, v_0)]$ denota la normal unitaria exterior a S en $\bar{r}(u_0, v_0)$, entonces

$$\overline{N}[\bar{r}(u_0, v_0)] = \pm\bar{n}[\bar{r}(u_0, v_0)].$$

Definición 5.4. *Se dice que la parametrización $\bar{r}$* preserva la orientación *si en todo punto regular el producto vectorial fundamental tiene el mismo sentido que la normal exterior a la superficie $\bar{r}(T)$, esto es:*

$$\frac{\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right\|} = \bar{n}[\bar{r}(u, v)]$$

en todo $(u, v) \in T$ tal que $\bar{r}(u, v)$ es regular.

Se dice que la parametrización $\bar{r}$ invierte la orientación *si en todo punto regular el producto vectorial fundamental tiene sentido opuesto al de la normal exterior a la superficie $\bar{r}(T)$, esto es:*

$$\frac{\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right\|} = -\bar{n}[\bar{r}(u, v)]$$

en todo $(u, v) \in T$ tal que $\bar{r}(u, v)$ es regular.

Ejemplo 5.5. *Sea $S : z = f(x, y)$. Hay dos vectores normales unitarios a S en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, a saber, $\pm\bar{n}$, donde*

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2(x_0, y_0) + f_y^2(x_0, y_0) + 1}} \left(-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1\right).$$

Podemos orientar esta superficie tomando como cara positiva la determinada por la normal unitaria $\bar{n}$ con *componente $\overline{k}$ positiva. En tal caso, la parametrización de S dada por $\overline{r}(x,y) = (x,y,f(x,y))$* **preserva la orientación**.

Ejemplo 5.6. *Sea $S = x^2+y^2+z^2 = 1$ la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$. Podemos orientarla seleccionando el vector unitario $\overline{n}(x,y,z) = \overline{R}$, donde $\overline{R} = x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$, que tiene el sentido de la normal exterior a la superficie. Esta elección corresponde a nuestra idea intuitiva del exterior de la esfera.*

Si consideramos la parametrización $\overline{r}(u,v) = (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v)$ $(0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le \pi)$, entonces

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} = -\operatorname{sen} v\, \overline{r}(u,v).$$

Como $-\operatorname{sen} v \le 0$ si $0 \le v \le \pi$, este vector normal apunta hacia el interior de la esfera; así, la parametrización $\overline{r}$ **invierte la orientación**.

Teorema 5.7. *Sea S una superficie orientada, y sea $\overline{F}$ un campo vectorial continuo definido en S. Sean $\overline{r}_1(T_1)$, $\overline{r}_2(T_2)$ dos parametrizaciones regulares de S, satisfaciendo las hipótesis del Teorema 4.5. Si $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$ preservan (respectivamente, invierten) la orientación, entonces*

$$\iint_{\overline{r}_1(T_1)} \overline{F} \cdot dS = \iint_{\overline{r}_2(T_2)} \overline{F} \cdot dS.$$

Si $\overline{r}_1$ preserva la orientación y $\overline{r}_2$ la invierte, entonces

$$\iint_{\overline{r}_1(T_1)} \overline{F} \cdot dS = -\iint_{\overline{r}_2(T_2)} \overline{F} \cdot dS.$$

DEMOSTRACIÓN. Pongamos

$$\overline{n}_1 = \frac{\dfrac{\partial \overline{r}_1}{\partial u} \times \dfrac{\partial \overline{r}_1}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \overline{r}_1}{\partial u} \times \dfrac{\partial \overline{r}_1}{\partial v} \right\|}, \qquad \overline{n}_2 = \frac{\dfrac{\partial \overline{r}_2}{\partial s} \times \dfrac{\partial \overline{r}_2}{\partial t}}{\left\| \dfrac{\partial \overline{r}_2}{\partial s} \times \dfrac{\partial \overline{r}_2}{\partial t} \right\|}$$

de modo que

$$\overline{n}_1 = \pm \overline{n}_2,$$

donde se toma el signo «+» si ambas parametrizaciones preservan (respectivamente, invierten) la orientación, y el signo «−» si una de ellas la preserva pero la otra la invierte. Según esto, por el Teorema 4.5 se tiene:

$$\begin{aligned}
\iint_{\overline{r}_1(T_1)} \overline{F}\cdot d\overline{S} &= \iint_{T_1} \overline{F}[\overline{r}_1(u,v)]\cdot\left(\frac{\partial\overline{r}_1}{\partial u}\times\frac{\partial\overline{r}_1}{\partial v}\right) du\,dv \\
&= \iint_{T_1} \overline{F}[\overline{r}_1(u,v)]\cdot\overline{n}_1 \left\|\frac{\partial\overline{r}_1}{\partial u}\times\frac{\partial\overline{r}_1}{\partial v}\right\| du\,dv \\
&= \iint_{\overline{r}_1(T_1)} \overline{F}\cdot\overline{n}_1\,dS \\
&= \pm\iint_{\overline{r}_2(T_2)} \overline{F}\cdot\overline{n}_2\,dS \\
&= \pm\iint_{T_2} \overline{F}[\overline{r}_2(s,t)]\cdot\overline{n}_2 \left\|\frac{\partial\overline{r}_2}{\partial s}\times\frac{\partial\overline{r}_2}{\partial t}\right\| ds\,dt \\
&= \pm\iint_{T_2} \overline{F}[\overline{r}_2(s,t)]\cdot\left(\frac{\partial\overline{r}_2}{\partial s}\times\frac{\partial\overline{r}_2}{\partial t}\right) ds\,dt \\
&= \pm\iint_{\overline{r}_2(T_2)} \overline{F}\cdot d\overline{S},
\end{aligned}$$

como pretendíamos. □

5.4. Relación con la integral de superficie de campos escalares

Ya quedó dicho que si $S=\overline{r}(T)$ es una superficie paramétrica, el producto vectorial fundamental $\partial\overline{r}/\partial u\times\partial\overline{r}/\partial v$ es normal a S en cada punto regular de la superficie. En cada uno de tales puntos existen dos vectores normales unitarios: uno, $\overline{n}_1$, que tiene el mismo sentido que $\partial\overline{r}/\partial u\times\partial\overline{r}/\partial v$, y otro, $\overline{n}_2$, que tiene sentido opuesto. Así pues,

$$\overline{n}_1=\frac{\dfrac{\partial\overline{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\overline{r}}{\partial v}}{\left\|\dfrac{\partial\overline{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\overline{r}}{\partial v}\right\|},\qquad \overline{n}_2=-\overline{n}_1.$$

Sea $\overline{n}$ una de las dos normales $\overline{n}_1$ ó $\overline{n}_2$. Sea $\overline{F}$ un campo vectorial definido en S, y supongamos que existe la integral de superficie $\iint_S \overline{F}\cdot\overline{n}\,dS$. Podemos entonces escribir

$$\begin{aligned}
\iint_S \overline{F}\cdot\overline{n}\,dS &= \iint_T \overline{F}[\overline{r}(u,v)]\cdot\overline{n}(u,v)\left\|\frac{\partial\overline{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial v}\right\| du\,dv \\
&= \pm\iint_T \overline{F}[\overline{r}(u,v)]\cdot\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial v}\right) du\,dv \\
&= \pm\iint_S \overline{F}\cdot d\overline{S},
\end{aligned}$$

donde se usa el signo «+» ó «−» según que $\overline{n}=\overline{n}_1$ ó $\overline{n}=\overline{n}_2$.

La igualdad anterior expresa que la integral de superficie de $\overline{F}$ sobre S es igual a la integral de la componente normal de $\overline{F}$ sobre S si la parametrización considerada preserva la orientación, y a la opuesta de la integral de dicha componente normal si la orientación se invierte. Esta sencilla observación, que ya fue utilizada en la demostración del Teorema 5.7, ahorra frecuentemente cierto esfuerzo computacional, como se comprueba en el Ejemplo 5.8.

5.5. Aplicaciones físicas: flujo de calor

Sea $T(x,y,z)$ la temperatura en un punto $(x,y,z) \in W \subset \mathbb{R}^3$. Si $T \in C^1$ entonces

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

es el gradiente de temperatura, y el calor fluye según el campo vectorial $\overline{F} = -k\nabla T$, donde k es una constante positiva llamada *conductividad*. Nótese que el flujo de calor, como cabe esperar, se produce de las zonas calientes hacia las frías, pues $-\nabla T$ apunta en la dirección donde T decrece.

La tasa total de flujo o flujo de calor a través de la superficie S viene dada por $\iint_S \overline{F} \cdot dS$.

Ejemplo 5.8. *Supongamos que una función de temperatura está dada por $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Sea S la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientada según la normal exterior. Hallar el flujo de calor a través de S, si $k = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Se tiene que $\overline{F}(x,y,z) = -\nabla T(x,y,z) = -2(x,y,z)$. Como $\overline{n} = \overline{r} = (x,y,z)$, sigue que $\overline{F} \cdot \overline{n} = -2(x^2 + y^2 + z^2) = -2$. Por otra parte, la conocida fórmula para el área de una esfera establece que ésta es igual a 4π veces el cuadrado de su radio. Consecuentemente,

$$\iint_S \overline{F} \cdot dS = \iint_S \overline{F} \cdot \overline{n}\, dS = -2 \iint_S dS = -2|S| = -8\pi.$$

Esto resuelve el ejemplo. □