Teoremas de Stokes y Gauss

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción

Nos ocupamos ahora de dos generalizaciones del segundo teorema fundamental del cálculo a integrales de superficie: el *teorema de Stokes* y el *teorema de Gauss*. Éstos, junto con el teorema de Green, constituyen los tres teoremas fundamentales del cálculo integral vectorial.

Los teoremas de Stokes y Gauss proporcionarán la interpretación física de los conceptos de rotacional y divergencia, con cuya definición y propiedades comenzamos esta sección.

1.1. El rotacional y la divergencia de un campo vectorial

Sea ∇ el operador

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}.$$

Recuérdese que el *gradiente* de un campo escalar $\varphi \in C^1$ viene dado por

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k},$$

expresión que puede interpretarse como una multiplicación formal del operador ∇ por el campo escalar φ.

Si $\overline{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$ es un campo vectorial de clase C^1, el *rotacional* de $\overline{F}$ es otro campo vectorial definido mediante la ecuación

$$\operatorname{rot}\overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k},$$

que formalmente escribimos

$$\operatorname{rot}\overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \overline{F}.$$

Si un campo vectorial $\overline{F}$ representa el flujo de un fluido entonces $\operatorname{rot}\overline{F} = \overline{0}$ significa físicamente que el fluido no tiene rotaciones, o es *irrotacional*: esto es, no genera remolinos. La justificación de esta idea se verá más adelante, como consecuencia del teorema de Stokes; sin embargo, podemos decir informalmente que si el campo es irrotacional entonces una pequeña rueda con aspas colocada en el fluido se moverá con éste, pero no girará alrededor de su propio eje.

Similarmente, considerando el producto escalar $\nabla \cdot \overline{F}$ de un modo puramente formal obtenemos la expresión que define el campo escalar llamado *divergencia* de $\overline{F}$, div $\overline{F}$:

$$\operatorname{div} \overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \overline{F}.$$

El significado físico de la divergencia se presentará en conexión con el teorema de Gauss, pero podemos adelantar que si imaginamos $\overline{F}$ como el campo de velocidad de un fluido entonces div $\overline{F}$ representa la tasa de expansión por unidad de volumen del fluido. Una divergencia negativa significa que el fluido se comprime.

1.2. Propiedades

Para todo campo escalar φ y cualesquiera campos vectoriales $\overline{F}$, $\overline{G}$ suficientemente regulares, se tiene:

- **Linealidad:** Si a, b son constantes,

  (i) $\operatorname{div}\,(a\overline{F} + b\overline{G}) = a \operatorname{div} \overline{F} + b \operatorname{div} \overline{G}$,

  (ii) $\operatorname{rot}\,(a\overline{F} + b\overline{G}) = a \operatorname{rot} \overline{F} + b \operatorname{rot} \overline{G}$.

- **Acción sobre un producto:**

  (i) $\operatorname{div}\,(\varphi\overline{F}) = \varphi \operatorname{div} \overline{F} + \nabla\varphi \cdot \overline{F}$, ó bien $\nabla \cdot (\varphi\overline{F}) = \varphi \nabla \cdot \overline{F} + \nabla\varphi \cdot \overline{F}$,

  (ii) $\operatorname{rot}\,(\varphi\overline{F}) = \varphi \operatorname{rot} \overline{F} + \nabla\varphi \times \overline{F}$, ó bien $\nabla \times (\varphi\overline{F}) = \varphi \nabla \times \overline{F} + \nabla\varphi \times \overline{F}$.

- **Divergencia y rotacional de un gradiente:**

  (i) $\operatorname{div}\,(\nabla\varphi) = \Delta\varphi$, donde Δ es el *operador laplaciano* $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$.

  (ii) $\operatorname{rot}\,(\nabla\varphi) = \overline{0}$.

- **Divergencia y rotacional de un rotacional:**

  (i) $\operatorname{div}\,(\operatorname{rot} \overline{F}) = 0$.

  (ii) $\operatorname{rot}\,(\operatorname{rot} \overline{F}) = \nabla(\operatorname{div} \overline{F}) - \Delta\overline{F}$, donde si $\overline{F} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ entonces $\Delta\overline{F} = (\Delta P)\overline{i} + (\Delta Q)\overline{j} + (\Delta R)\overline{k}$.

La demostración de estas propiedades queda al cuidado del lector.

2. Teorema de Stokes

El teorema de Stokes es una extensión directa del teorema de Green, en tanto que relaciona la integral de línea de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada simple C en $\mathbb{R}^3$ con la integral sobre una superficie S de la cual C es frontera.

Más precisamente, el teorema de Stokes establece que la integral de la componente normal del rotacional de un campo vectorial $\overline{F}$ sobre una superficie S es igual a la integral de la componente tangencial de $\overline{F}$ alrededor de la frontera C de S (Figura 1).

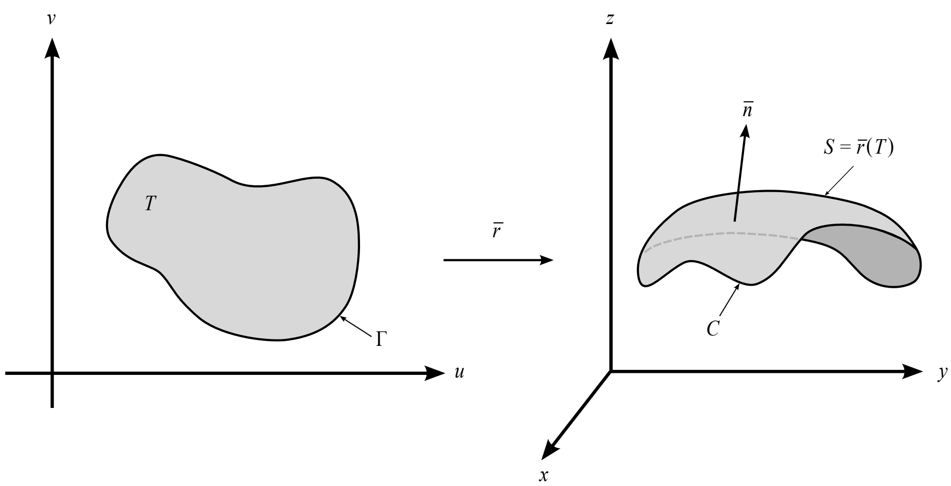

Figura 1. Aplicación del teorema de Stokes.

2.1. Teorema de Stokes

Teorema 2.1 (Stokes)**.** *Sea $S = \overline{r}(T)$ una superficie paramétrica regular simple, donde T es una región del plano OUV limitada por una curva de Jordan Γ descrita por un camino regular a trozos $\overline{\gamma}$. Supongamos también que $\overline{r}$ es una aplicación inyectiva de clase C^2 en un entorno abierto de $T \cup \Gamma$. Sea C la imagen de Γ por $\overline{r}$, y sea $\overline{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial de clase $C^1(S)$. Entonces:*

$$\iint_S \left(\operatorname{rot} \overline{F}\right) \cdot dS = \int_C \overline{F} \cdot d\overline{\alpha},$$

donde $\overline{\alpha} = \overline{r} \circ \overline{\gamma}$ es una parametrización de C y Γ se recorre en sentido positivo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\overline{\gamma}$ la parametrización de Γ dada por $\overline{\gamma}(t) = (U(t), V(t))$ $(t \in [a, b])$. Si $\overline{F} = (P, Q, R)$ entonces

$$\operatorname{rot} \overline{F} = \nabla \times \overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Por otra parte, si $\overline{r}(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$ $((u,v) \in T)$ entonces

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} \right).$$

Necesitamos probar:

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\operatorname{rot} \overline{F}\right) \cdot dS &= \iint_T \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} \right) du\, dv \\ &= \int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz, \end{aligned}$$

y a tal fin basta demostrar las tres igualdades siguientes:

$$\iint_T \left[\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} \right] du\, dv = \int_C P\, dx, \tag{1}$$

$$\iint_T \left[\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)} \right] du\, dv = \int_C Q\, dy,$$

$$\iint_T \left[\frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)} \right] du\, dv = \int_C R\, dz.$$

Nos ocuparemos solamente de establecer la primera de ellas, ya que las dos restantes admiten un tratamiento análogo.

Como $\overline{\alpha}(t) = \overline{r}[\overline{\gamma}(t)] = (X[U(t),V(t)], Y[U(t),V(t)], Z[U(t),V(t)])$ $(t \in [a,b])$, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_C P\, dx &= \int_a^b (P[\overline{\alpha}(t)], 0, 0) \cdot \overline{\alpha}'(t)\, dt \\ &= \int_a^b P[\overline{r}(\overline{\gamma}(t))] \left(\frac{\partial X}{\partial u} U'(t) + \frac{\partial X}{\partial v} V'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b p(\overline{\gamma}(t)) \left(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right)\Big|_{\overline{\gamma}(t)} \cdot \overline{\gamma}'(t)\, dt = \int_\Gamma p \left(\frac{\partial X}{\partial u}\, du + \frac{\partial X}{\partial v}\, dv \right), \end{aligned}$$

siendo $p = P \circ \overline{r}$.

Ahora aplicamos el teorema de Green:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma p \left(\frac{\partial X}{\partial u}\, du + \frac{\partial X}{\partial v}\, dv \right) &= \iint_T \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(p \frac{\partial X}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(p \frac{\partial X}{\partial u} \right) \right] du\, dv \\ &= \iint_T \left(\frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + p \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} - p \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right) du\, dv \\ &= \iint_T \left(\frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right) du\, dv. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $p(u,v) = P(X(u,v),Y(u,v),Z(u,v))$, sigue que

$$\begin{aligned}
&\iint_T \left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right) du\,dv = \\
&= \iint_T \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial u}\right)\frac{\partial X}{\partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial v}\right)\frac{\partial X}{\partial u}\right] du\,dv \\
&= \iint_T \left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\right] du\,dv.
\end{aligned}$$

Esto establece (1), como se pretendía. □

Observación 2.2. *Nótese que para aplicar el teorema de Stokes es necesario elegir una orientación en C compatible con la orientación de S. Para recordar mnemotécnicamente esta orientación, basta apelar a la «regla del sacacorchos»: si se gira un sacacorchos siguiendo la orientación considerada en C, el sentido en el que avanza la punta del mismo ha de ser el de la normal considerada en S.*

Ejemplo 2.3. *Sea S la porción superior de una esfera que corta al plano $z = 0$ en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Sea $\overline{F}(x,y,z) = (y,-x,e^{xz})$. Evaluar*

$$\iint_S (\nabla \times \overline{F}) \cdot dS,$$

si S está orientada en el sentido de la normal exterior.

RESOLUCIÓN. Parametrizamos C mediante $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 0$ $(0 \le t \le 2\pi)$. Por el teorema de Stokes,

$$\iint_S (\nabla \times \overline{F}) \cdot\, dS = \int_C \overline{F} \cdot\, ds = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t, -\cos t, 1) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\, dt = -\int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\right)\, dt = -2\pi$$

es el valor de la integral pedida. □

2.2. Interpretación física del rotacional

Supongamos que $\overline{V}$ representa el campo de velocidad de un fluido. Consideremos un punto P y un vector unitario $\overline{n}$ y denotemos por S_ρ el disco de centro P y radio ρ que es perpendicular a $\overline{n}$ (Figura 2). Por el teorema de Stokes:

$$\int_{\partial S_\rho} \overline{V} \cdot ds = \iint_{S_\rho} \operatorname{rot} \overline{V} \cdot dS = \iint_{S_\rho} \operatorname{rot} \overline{V} \cdot \overline{n}\, dS,$$

donde ∂S_ρ tiene la orientación inducida por $\overline{n}$.

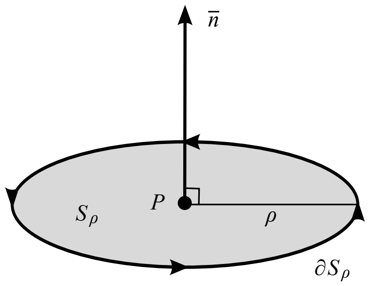

Figura 2. Interpretación física del rotacional.

Aplicando el teorema de la media,

$$\iint_{S_\rho} \operatorname{rot} \overline{V} \cdot \overline{n}\, dS = \operatorname{rot} \overline{V}(Q) \cdot \overline{n}(Q)\, |S_\rho|,$$

donde $Q \in S_\rho$, $|S_\rho| = \pi\rho^2$ es el área de S_ρ, y rot $\overline{V}$ y $\overline{n}$ se evalúan en Q. Así,

$$\lim_{\rho\to 0+} \frac{1}{|S_\rho|} \int_{\partial S_\rho} \overline{V} \cdot ds = \lim_{\rho\to 0+} \operatorname{rot} \overline{V}(Q) \cdot \overline{n}(Q) = \operatorname{rot} \overline{V}(P) \cdot \overline{n}(P). \tag{2}$$

En este punto hacemos un inciso para observar que, dada una curva C, si $\overline{V}$ apunta en el sentido de la tangente a C entonces $\int_C \overline{V} \cdot ds > 0$ y las partículas de C rotan en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj. Si $\overline{V}$ apunta en el sentido opuesto, entonces $\int_C \overline{V} \cdot ds < 0$. Si $\overline{V}$ es normal a C entonces las partículas no giran alrededor de C, y $\int_C \overline{V} \cdot ds = 0$. En general, al ser $\int_C \overline{V} \cdot ds$ la integral de la componente tangencial de $\overline{V}$, dicha integral representa la cantidad neta de giro de fluido en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj. Nos referimos a $\int_C \overline{V} \cdot ds$ como la *circulación* de $\overline{V}$ alrededor de C.

Volviendo a (2), ya que la circulación $\int_{\partial S_\rho} \overline{V} \cdot ds$ es la velocidad neta del fluido alrededor de ∂S_ρ, vemos que rot $\overline{V} \cdot \overline{n}$ representa el efecto de giro o rotación del fluido alrededor del eje $\overline{n}$. Más precisamente, (2) establece que rot $\overline{V}(P) \cdot \overline{n}(P)$ es la circulación de $\overline{V}$ por unidad de área en P en una superficie perpendicular a $\overline{n}(P)$. El módulo de rot $\overline{V} \cdot \overline{n}$ es máximo cuando $\overline{n} = \operatorname{rot} \overline{V} / \|\operatorname{rot} \overline{V}\|$; por tanto, el efecto de rotación en P es máximo alrededor de un eje paralelo a rot $\overline{V}$. Por esta razón, rot $\overline{V}$ se denomina *vector de vorticidad*.

3. Teorema de la divergencia o de Gauss

El teorema de la divergencia relaciona una integral triple extendida a un sólido con una integral de superficie tomada sobre la frontera de dicho sólido. Concretamente, asegura que el flujo de un campo vectorial hacia el exterior de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de dicho campo vectorial sobre el volumen encerrado por la superficie (Figura 3).

Se trata de un resultado paralelo a los teoremas de Green y Stokes, en el sentido de que vincula una integral sobre un objeto geométrico cerrado (curva o superficie) con otra integral sobre la región contenida (superficie o volumen).

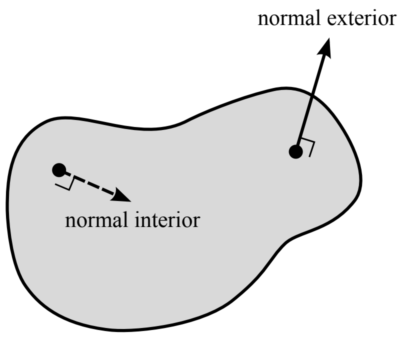

Figura 3. Aplicación del teorema de Gauss.

3.1. Teorema de Gauss

Teorema 3.1 (Gauss)**.** *Si V es un sólido en $\mathbb{R}^3$ limitado por una superficie orientable S, si $\overline{n}$ es la normal exterior a S, y si $\overline{F}$ es un campo vectorial de clase $C^1(V)$, entonces*

$$\iiint_V \operatorname{div} \overline{F}\, dx\, dy\, dz = \iint_S \overline{F} \cdot \overline{n}\, dS.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\overline{F} = (P, Q, R)$. Entonces

$$\iiint_V \operatorname{div} \overline{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz + \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy\, dz + \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz.$$

Por otra parte,

$$\iint_S \overline{F} \cdot \overline{n}\, dS = \iint_S (P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}) \cdot \overline{n}\, dS = \iint_S (P\bar{i} \cdot \overline{n} + Q\bar{j} \cdot \overline{n} + R\bar{k} \cdot \overline{n})\, dS.$$

Así pues, es suficiente establecer las igualdades:

$$\iint_S P\bar{\imath}\cdot\bar{n}\,dS = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz, \tag{3}$$

$$\iint_S Q\bar{\jmath}\cdot\bar{n}\,dS = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz, \tag{4}$$

$$\iint_S R\bar{k}\cdot\bar{n}\,dS = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz. \tag{5}$$

Probaremos que (3), (4) y (5) son válidas para sólidos V proyectables sobre los planos coordenados OYZ, OXZ y OXY, respectivamente. Esto demostrará el teorema para todos los sólidos que son proyectables simultáneamente sobre los tres planos coordenados, y también para sólidos descomponibles en recintos proyectables sobre los tres planos. En efecto, el teorema de la divergencia se extiende a estos últimos aplicándolo a cada una de las partes resultantes de la descomposición y teniendo en cuenta que los conjuntos de volumen nulo no contribuyen a la integral triple, mientras que las aportaciones a la integral de superficie de las caras comunes a los recintos adyacentes se cancelan dos a dos porque las normales exteriores tienen sentidos opuestos sobre esas caras.

Ya que las demostraciones de las igualdades (3), (4) y (5) admiten un tratamiento análogo, nos centraremos en establecer (5) para sólidos proyectables sobre el plano OXY.

Supongamos entonces que

$$V = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y)\le z\le g(x,y),\ (x,y)\in T\right\},$$

siendo T una región conexa del plano OXY y f, g funciones continuas en T tales que $f(x,y)\le g(x,y)$ $((x,y)\in T)$. Geométricamente, T es la proyección de V sobre el plano OXY. Toda recta paralela al eje OZ que atraviese T corta al sólido V a lo largo de un segmento rectilíneo que une las superficies $z=f(x,y)$ y $z=g(x,y)$. La superficie frontera S consta de un casquete superior S_1, con ecuación explícita $z=g(x,y)$, otro inferior S_2, con ecuación explícita $z=f(x,y)$, y quizá una porción de cilindro S_3, engendrado por una recta que se mueve a lo largo de la frontera de T manteniéndose paralela al eje OZ (Figura 4).

La idea de la demostración es muy sencilla: expresaremos la integral triple del segundo miembro de (5) como una doble extendida a la proyección T y demostraremos que ésta vale lo mismo que la integral de superficie del primer miembro de (5).

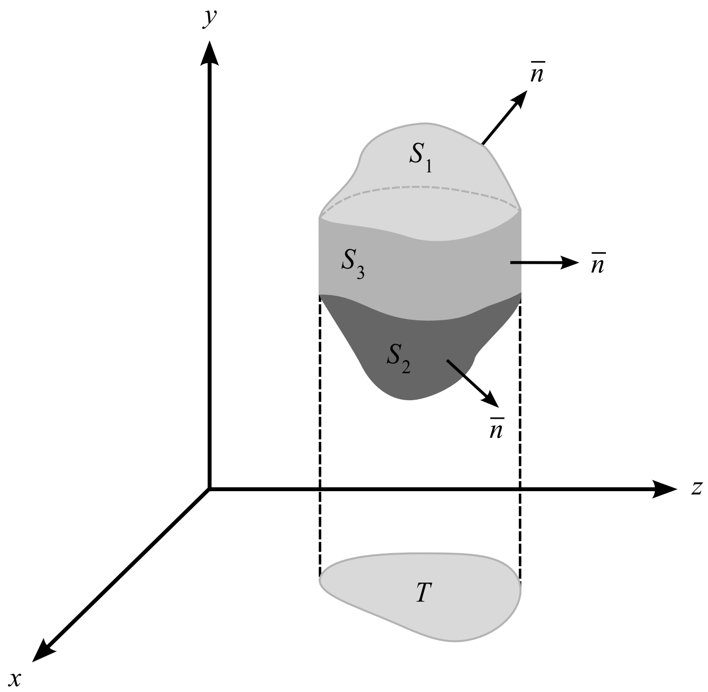

Figura 4. Sólido proyectable en el plano OXY.

Por una parte, se tiene:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_T \left[\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right] dx\,dy = \iint_T \left[R(x,y,g(x,y)) - R(x,y,f(x,y))\right] dx\,dy.$$

Por otra parte:

$$\iint_S R\overline{k}\cdot\overline{n}\,dS = \iint_{S_1} R\overline{k}\cdot\overline{n}\,dS + \iint_{S_2} R\overline{k}\cdot\overline{n}\,dS + \iint_{S_3} R\overline{k}\cdot\overline{n}\,dS.$$

Sobre S_3, $\overline{n}$ es paralelo al plano OXY, de modo que $\overline{k}\cdot\overline{n} = 0$. Sobre S_1 y S_2 usamos las parametrizaciones $\overline{r}_1(x,y) = (x,y,g(x,y))$ y $\overline{r}_2(x,y) = (x,y,f(x,y))$, respectivamente.

En S_1, $\overline{n}$ tiene el sentido del producto vectorial fundamental $\partial\overline{r}_1/\partial x \times \partial\overline{r}_1/\partial y = (-g_x, -g_y, 1)$. Luego,

$$\iint_{S_1} R\overline{k}\cdot\overline{n}\,dS = \iint_T R(x,y,g(x,y))\,dx\,dy.$$

En S_2, $\overline{n}$ tiene sentido opuesto al del producto vectorial fundamental $\partial\overline{r}_2/\partial x \times \partial\overline{r}_2/\partial y = (-f_x, -f_y, 1)$.

Así pues,

$$\iint_{S_2} R\overline{k}\cdot\overline{n}\,dS = -\iint_T R(x,y,f(x,y))\,dx\,dy.$$

Consecuentemente,

$$\iint_S R\overline{k}\cdot\overline{n}\,dS = \iint_T \left[R(x,y,g(x,y)) - R(x,y,f(x,y))\right]\,dx\,dy.$$

Esto establece (5) y completa la prueba. □

Ejemplo 3.2. *Evaluar $\iint_S \overline{F}\cdot dS$, donde $\overline{F}(x,y,z) = xy^2\overline{i} + x^2y\overline{j} + y\overline{k}$ y S es la superficie del cilindro $x^2+y^2=1$, acotado por los planos $z=\pm 1$ e incluyendo las porciones $x^2+y^2\leq 1$ cuando $z=\pm 1$.*

RESOLUCIÓN. Aplicaremos el teorema de la divergencia. Ahora, S es la frontera de la región V descrita por las condiciones $x^2+y^2\leq 1$, $-1\leq z\leq 1$, de modo que

$$\iint_S \overline{F}\cdot\,dS = \iiint_V \operatorname{div}\overline{F}\,dx\,dy\,dz,$$

con

$$\iiint_V \operatorname{div}\overline{F}\,dx\,dy\,dz = \iiint_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1}\left[\iint_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\right]dz = 2\iint_T (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

donde $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\right\}$. Esta integral doble se evalúa fácilmente usando coordenadas polares, obteniéndose

$$\iint_T (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3\,dr = \frac{\pi}{2}.$$

Consecuentemente,

$$\iiint_V \operatorname{div}\overline{F}\,dx\,dy\,dz = \pi$$

es el valor de la integral pedida. □

3.2. Interpretación física de la divergencia

En un punto P, la divergencia $\operatorname{div}\overline{F}(P)$ es la tasa de flujo neto hacia el exterior en P por unidad de volumen. En efecto, sea Ω_ρ una bola en $\mathbb{R}^3$ centrada en P, de radio ρ. El teorema de la media proporciona $Q\in\Omega_\rho$ tal que

$$\iint_{\partial\Omega_\rho} \overline{F}\cdot\overline{n}\, dS = \iiint_{\Omega\rho} \operatorname{div} \overline{F}\, dx\, dy\, dz = \operatorname{div} \overline{F}(Q)\, |\Omega_\rho|,$$

donde $\overline{n}$ es la normal exterior a $\partial\Omega_\rho$. Ahora,

$$\operatorname{div} \overline{F}(P) = \lim_{\rho\to 0+} \operatorname{div} \overline{F}(Q) = \lim_{\rho\to 0+} \frac{1}{|\Omega_\rho|} \iint_{\partial\Omega_\rho} \overline{F}\cdot\overline{n}\, dS.$$

El punto P se dice una *fuente* o un *sumidero* según que $\operatorname{div} \overline{F}(P) > 0$ ó $\operatorname{div} \overline{F}(P) < 0$, ya que en el primer caso la tasa de flujo neto cerca de P se produce hacia el exterior, mientras que en el segundo se produce hacia el interior.

Si $\operatorname{div} \overline{F} = 0$ entonces $\iint_S \overline{F}\cdot\, dS = 0$ para toda superficie cerrada S, mostrando que el flujo de $\overline{F}$ a través de S es nulo. Así pues, si $\overline{F}$ es el campo de velocidad de un fluido, la cantidad neta de fluido que fluye hacia afuera es nula; esto es, entra la misma cantidad de fluido que sale, por unidad de tiempo. Un fluido con esta propiedad se denomina *incompresible*.