Aplicaciones del cálculo integral vectorial a la física

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción

Ya hemos visto que las integrales dobles, triples, de línea y de superficie pueden utilizarse para calcular áreas de regiones planas y de otras superficies, volúmenes de sólidos y longitudes de curvas. Con el auxilio de estas integrales es posible definir y calcular otros muchos conceptos de especial interés en física e ingeniería, tales como promedios, masas, centros de masa, momentos de inercia, etc.

Sin ninguna pretensión de exhaustividad, el presente tema recoge algunas de estas aplicaciones. De carácter eminentemente práctico, su objetivo fundamental no es otro que servir como repaso de las distintas modalidades de integración estudiadas durante el curso.

2. Integral doble

Con anterioridad hemos utilizado la integral doble para calcular áreas de regiones planas y volúmenes de sólidos. Exponemos a continuación, muy brevemente, la definición y el cálculo mediante integrales dobles de masas, centros de masa, centroides y momentos de regiones planas, así como de promedios de funciones sobre estas regiones.

2.1. Motivación: el caso discreto

Sea $\overline{P}$ el vector que une el origen con un punto cualquiera P de $\mathbb{R}^3$.

Si n masas positivas $m_1,\ldots,m_n$ están localizadas en los puntos $P_1,\ldots,P_n$, respectivamente, el *centro de gravedad* del sistema se define como el punto determinado por el vector

$$\overline{C} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \overline{P}_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}.$$

El denominador, $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k$, se llama *masa total* del sistema.

Si cada masa m_k se traslada según el vector $\overline{A}$ a un nuevo punto Q_k tal que $\overline{Q}_k = \overline{P}_k + \overline{A}$ ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$), entonces:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \overline{Q}_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k (\overline{P}_k + \overline{A})}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k} = \overline{C} + \overline{A}.$$

Por tanto, el centro de gravedad también experimenta la traslación $\overline{A}$. Esto se expresa diciendo que **la posición del centro de gravedad depende de los puntos y sus masas, y no de la situación del origen**. El centro de gravedad es un punto calculado teóricamente que representa un ficticio «punto de equilibrio» del sistema.

Si las masas están en un plano, en los puntos de coordenadas (x_k, y_k) $(k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n)$, y si el centro de gravedad tiene coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$, la relación vectorial que define $\overline{C}$ puede expresarse con dos ecuaciones escalares:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad \overline{y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}.$$

En el numerador del cociente que define $\overline{x}$, $m_k x_k$ se denomina *momento de la masa m_k respecto al eje OY*. Si una masa m igual a la masa total del sistema estuviese situada en el centro de gravedad, su momento respecto al eje OY sería igual al *momento del sistema*:

$$m\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k.$$

Análogamente, $m_k y_k$ es el *momento de la masa m_k respecto al eje OX*. El momento respecto al eje OX de una masa m igual a la del sistema situada en el centro de gravedad es igual al *momento del sistema* respecto de dicho eje:

$$m\overline{y} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k.$$

2.2. El caso continuo

Cuando nos referimos a un sistema cuya masa total está distribuida en una cierta región del plano en lugar de estar situada en un número finito de puntos aislados, los conceptos de masa, centro de gravedad y momentos se definen mediante integrales en lugar de sumas.

Por ejemplo, consideremos una lámina que tenga la forma de una región plana D. Supongamos que la materia está distribuida por toda la lámina con una densidad (masa/unidad de área) conocida: existe $f = f(x,y) \geq 0$ definida en D, tal que $f(x,y)$ representa la masa por unidad de área en el punto (x,y).

2.2.1. Masa

Si la lámina está construida con un material homogéneo, la densidad es constante; en tal caso, la *masa total* de la lámina se define como el producto de la densidad por el área de la lámina. Cuando la densidad varía de un punto a otro, utilizamos la integral doble de la densidad como definición de la masa total: si la función densidad f es integrable en D, definimos la *masa total* $m(D)$ por

$$m(D) = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy.$$

2.2.2. Valor medio

El cociente

$$\frac{\text{masa}}{\text{área}} = \frac{m(D)}{|D|} = \frac{\displaystyle\iint_D f(x,y)\, dx\, dy}{\displaystyle\iint_D dx\, dy}$$

(donde $|D|$ es el área de D) se llama *densidad media* de la lámina. En general, para cualquier función f definida e integrable en una región $D \subset \mathbb{R}^2$, el cociente

$$\frac{\displaystyle\iint_D f(x,y)\, dx\, dy}{\displaystyle\iint_D dx\, dy}$$

se llama *promedio* o *valor medio* de f sobre D.

2.2.3. Centro de masa y centroide

Por analogía con el caso finito, definimos el *centro de gravedad* o *centro de masa* de la lámina como el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ determinado por las fórmulas:

$$\bar{x}\, m(D) = \iint_D x\, f(x,y)\, dx\, dy, \quad \bar{y}\, m(D) = \iint_D y\, f(x,y)\, dx\, dy.$$

Las integrales del segundo miembro son los *momentos* de la lámina *respecto a los ejes OY y OX*, respectivamente. Cuando la densidad es constante, $f(x,y) = c$, obtenemos

$$\bar{x}|D| = \iint_D x\, dx\, dy, \quad \bar{y}|D| = \iint_D y\, dx\, dy,$$

donde $|D|$ es el área de D. En este caso, $(\bar{x}, \bar{y})$ se denomina *centroide* de D.

2.2.4. Momentos de inercia respecto a los ejes y momento polar de inercia

Si L es una recta en el plano de la lámina D y $\delta(x,y)$ es la distancia de $(x,y) \in D$ a L, el número

$$I_L = \iint_D \delta^2(x,y) f(x,y)\, dx\, dy$$

se llama *momento de inercia* de la lámina D respecto a L. Si $f(x,y) = 1$, I_L se llama *momento de segundo orden* respecto a L. Los momentos de inercia respecto a los ejes OX y OY se designan I_x, I_y, respectivamente, y vienen dados por las expresiones:

$$I_x = \iint_D y^2 f(x,y)\,dx\,dy, \quad I_y = \iint_D x^2 f(x,y)\,dx\,dy.$$

La suma de ambas integrales es el *momento polar de inercia* o *momento de inercia respecto al origen*, I_0:

$$I_0 = \iint_D (x^2+y^2) f(x,y)\,dx\,dy.$$

Ejemplo 2.1. *Una lámina delgada de densidad constante c está limitada por dos circunferencias concéntricas de radios a y b y centro en el origen, siendo $0 < b < a$. Calcular el momento polar de inercia.*

RESOLUCIÓN. Se tiene que

$$I_0 = c\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

donde

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ b^2 \le x^2+y^2 \le a^2\right\}.$$

En polares:

$$I_0 = c\int_0^{2\pi} d\theta \int_b^a r^3\,dr = 2\pi c \frac{r^4}{4}\bigg|_b^a = \frac{\pi c(a^4-b^4)}{2}.$$

Como la masa de la lámina es

$$m = c\iint_D dx\,dy = \pi c(a^2-b^2),$$

encontramos que

$$I_0 = \frac{\pi c(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{2} = m\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Esto resuelve el ejemplo. □

Ejemplo 2.2. *Calcular el centroide de la región plana determinada por un arco de sinusoide.*

RESOLUCIÓN. Analíticamente, un arco de sinusoide viene dado por la ecuación

$$y = \operatorname{sen} x \quad (0 \le x \le \pi).$$

Las coordenadas del centroide del correspondiente conjunto de ordenadas son:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}.$$

Ahora bien:

$$\iint_D dx\,dy = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 2,$$

e, integrando por partes:

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^{\pi} x\,dx \int_0^{\operatorname{sen} x} dy = \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx = \pi.$$

Luego

$$\bar{x} = \frac{\pi}{2}$$

como cabía esperar, por simetría. Análogamente,

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\operatorname{sen} x} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} (1-\cos 2x)\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

En consecuencia:

$$\bar{y} = \frac{\pi}{8}.$$

Concluimos que

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{8}\right)$$

son las coordenadas del centroide. □

3. Integral triple

La integral triple puede emplearse para calcular volúmenes, masas, centros de gravedad, momentos de inercia, y otros conceptos físicos asociados a sólidos.

Como sabemos, si R es un sólido, su *volumen* V viene dado por la integral triple

$$V = \iiint_R dx\,dy\,dz.$$

Si al sólido se le asigna una densidad $f(x,y,z)$ (masa/unidad de volumen) en cada uno de sus puntos (x,y,z), su *masa* M es

$$M = \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

y su *centro de gravedad* o *centro de masa* el punto de coordenadas $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_R x f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

e $\bar{y}$, $\bar{z}$ se calculan análogamente. El *momento de inercia* I_{xy} *respecto al plano* OXY se define por la igualdad

$$I_{xy} = \iiint_R z^2 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

con fórmulas parecidas para los momentos I_{xz} e I_{yz} respecto a los planos OXZ y OYZ. El *momento de inercia* I_L *respecto a una recta* L se define como

$$I_L = \iiint_R \delta^2(x,y,z) f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

donde $\delta(x,y,z)$ representa la distancia de un punto genérico de R a la recta L. Los *momentos de inercia respecto a los ejes coordenados* son entonces

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{xz} + I_{yz},$$

y el *momento polar de inercia*,

$$I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}.$$

Ejemplo 3.1. *Se considera el sólido V de densidad constante μ, limitado por la superficie esférica de radio R. Calcular los momentos de inercia:*

(i) Respecto a su centro.

(ii) Respecto a un plano que pase por su centro.

(iii) Respecto a un diámetro.

RESOLUCIÓN. Situamos el origen de coordenadas en el centro de la esfera.

(i) Llamando V^* a la parte de V que está en el primer octante,

$$I_0 = \mu \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz = 8\mu \iiint_{V^*} (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Hacemos un cambio de variables a coordenadas esféricas:

$$I_0 = 8\mu \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi \int_0^R \rho^4\, d\rho = \frac{4}{5}\pi\mu R^5.$$

Como la masa de la esfera es $M = 4\pi\mu R^3/3$, concluimos que

$$I_0 = \frac{3}{5}MR^2.$$

(ii) Razones de simetría aseguran que los momentos de inercia respecto a todos los planos que pasen por el centro de la esfera son iguales. Por tanto:

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{xz} = 3I_{xy},$$

de donde

$$I_{xy} = \frac{1}{3}I_0 = \frac{4}{15}\pi\mu R^5 = \frac{1}{5}MR^2.$$

(iii) Nótese que

$$I_0 = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z).$$

Nuevamente por simetría, los momentos de inercia respecto a todos los diámetros son iguales. Si L es cualquier diámetro, entonces $I_x = I_y = I_z = I_L$, así que

$$I_0 = \frac{3}{2}I_L.$$

De aquí,

$$I_L = \frac{2}{3}I_0 = \frac{8}{15}\pi\mu R^5 = \frac{2}{5}MR^2$$

resulta ser el momento pedido. □

4. Integrales de línea y superficie

Los entes físicos descritos con anterioridad admiten una extensión a curvas y superficies, con una expresión formal similar cuya explicitación queda al cuidado del lector.

Ejemplo 4.1. *Hallar las coordenadas del centro de masa de un arco de circunferencia de radio R y ángulo central α, suponiendo densidad lineal constante.*

RESOLUCIÓN. Situamos el arco γ en cuestión en un sistema de referencia cartesiano de manera que su vértice coincida con el origen de coordenadas y su bisectriz con el semieje OX positivo. Una parametrización de γ es entonces

$$x = R\cos\lambda, \quad y = R\operatorname{sen}\lambda, \quad z = 0 \qquad \left(-\frac{\alpha}{2} \le \lambda \le \frac{\alpha}{2}\right).$$

Por simetría, $\overline{y} = \overline{z} = 0$. Ahora:

$$\overline{x} = \frac{\int_\gamma x\,ds}{\int_\gamma ds} = \frac{R^2\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\cos\lambda\,d\lambda}{R\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}d\lambda} = \frac{2R}{\alpha}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.$$

Así pues,

$$\left(\frac{2R}{\alpha}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}, 0, 0\right)$$

son las coordenadas que se buscaban. □

Ejemplo 4.2. *Calcular el momento de inercia de la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=4$ respecto de uno de sus diámetros. Supóngase densidad superficial μ constante.*

RESOLUCIÓN. Nótese que por simetría basta calcular el momento de inercia respecto de, digamos, el eje OZ.

Se tiene:

$$I_z = \mu\iint_S (x^2+y^2)\,dS,$$

donde S, la superficie en cuestión, está parametrizada mediante:

$$x(\theta,\varphi) = 2\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \quad y(\theta,\varphi) = 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \quad z(\theta,\varphi) = 2\cos\varphi \qquad (0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi).$$

La norma del correspondiente producto vectorial fundamental es $4\operatorname{sen}\varphi$. Por tanto,

$$I_z = 16\mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\varphi \, d\varphi = 32\mu\pi \left[\frac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{128}{3}\mu\pi.$$

El ejemplo queda resuelto. $\square$