Integración múltiple

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción

Ya indicamos con anterioridad que la teoría desarrollada para integrales dobles es susceptible de ser generalizada a dimensiones superiores. Puesto que el proceso y los resultados que se obtienen son completamente análogos a los ya estudiados en el caso bidimensional, nos limitaremos a resumir los puntos principales.

2. Integrales múltiples

Supongamos que f es un campo escalar definido y acotado en un conjunto $S \subset \mathbb{R}^p$ $(p \in \mathbb{N},\ p \geq 3)$. La integral de f sobre S, llamada *integral p-múltiple* o, simplemente, *integral múltiple* si no hay ambigüedad sobre p, se denota por

$$\int \overset{(p)}{\cdots} \int_S f, \qquad \text{ó} \qquad \int \overset{(p)}{\cdots} \int_S f(x_1,\dots x_p)\, dx_1 \cdots dx_p,$$

o bien $\int_S f(\overline{x})\, d\overline{x}$, donde $\overline{x} = (x_1,\dots,x_p)$ $(x_i \in \mathbb{R};\ i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq p)$.

Si $\overline{a} = (a_1,\dots,a_p) \in \mathbb{R}^p$ y $\overline{b} = (b_1,\dots,b_p) \in \mathbb{R}^p$, llamamos *intervalo cerrado* (respectivamente, *abierto*) *p-dimensional* al conjunto $[\overline{a},\overline{b}] = \prod_{i=1}^p [a_i,b_i]$ (respectivamente, $]\overline{a},\overline{b}[= \prod_{i=1}^p]a_i,b_i[$). El proceso de definición de la integral comienza con funciones escalonadas definidas en un intervalo cerrado p-dimensional $[\overline{a},\overline{b}]$. Si P_i es una partición de $[a_i,b_i]$ $(i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq p)$, el producto cartesiano $P = \prod_{i=1}^p P_i$ será una partición de $[\overline{a},\overline{b}]$. Una función f definida en $[\overline{a},\overline{b}]$ se dice *escalonada* si toma un valor constante c_k en cada uno de los subintervalos abiertos Q_k determinados por una cierta partición P de $[\overline{a},\overline{b}]$. La integral p-múltiple de una tal f viene dada por la fórmula

$$\int \overset{(p)}{\cdots} \int_{[\overline{a},\overline{b}]} f = \sum_k c_k |Q_k|;$$

aquí, $|Q_k|$ denota el volumen de Q_k (producto de las longitudes de sus lados), y la suma se extiende al conjunto de estos subintervalos.

Una vez definida la integral múltiple de funciones escalonadas es posible definirla para funciones f más generales cuyo dominio sean intervalos. Si existe un único número real I tal que

$$\int \overset{(p)}{\cdots} \int_{[\overline{a},\overline{b}]} s \leq I \leq \int \overset{(p)}{\cdots} \int_{[\overline{a},\overline{b}]} t$$

cualesquiera sean las funciones escalonadas s, t que satisfacen $s \leq f \leq t$ en $[\overline{a},\overline{b}]$, entonces se dice que f es *integrable* en $[\overline{a},\overline{b}]$ y que I es la *integral p-múltiple* de f en $[\overline{a},\overline{b}]$:

$$I = \int \overset{(p)}{\cdots} \int_{[\overline{a},\overline{b}]} f.$$

Al igual que ocurría en el caso bidimensional, la integral existe si f es continua en $[\overline{a},\overline{b}]$, o si f es acotada en $[\overline{a},\overline{b}]$ y su conjunto de discontinuidades D tiene contenido p-dimensional nulo, esto es, si para cada $\varepsilon > 0$, existe una colección finita de intervalos p-dimensionales (abiertos o cerrados) que recubre D, tal que la suma de sus volúmenes no excede ε.

Para definir la integral p-múltiple de una función acotada f sobre un conjunto acotado más general S, consideramos una extensión $\widetilde{f}$ de f a un rectángulo cerrado R que contenga a S y que sea nula fuera de S, y definimos

$$\int \overset{(p)}{\cdots} \int_S f = \int \overset{(p)}{\cdots} \int_R \widetilde{f}.$$

Existen muchas fórmulas de integración iterada para las integrales p-múltiples. Por ejemplo, si Q es un intervalo k-dimensional y R un intervalo l-dimensional, entonces una integral $(l+k)$-múltiple sobre $Q\times R$ es la iteración de una integral k-múltiple y otra l-múltiple:

$$\int \overset{(l+k)}{\cdots} \int_{Q\times R} f = \int \overset{(k)}{\cdots} \int_Q \left[\int \overset{(l)}{\cdots} \int_R f \, dx_1 \cdots dx_l \right] dx_{l+1} \cdots dx_{l+k},$$

siempre que las integrales involucradas existan.

Señalaremos, finalmente, que también es posible extender el concepto de medibilidad Jordan al caso p-dimensional y desarrollar una teoría de la integración en este contexto. El concepto de volumen puede ser generalizado a conjuntos p-medibles Jordan de tal manera que si S es medible, su volumen $V(S)$ es igual a la integral, extendida a S, de la función constantemente igual a 1:

$$V(S) = \int \overset{(p)}{\cdots} \int_S dx_1 \cdots \, dx_p.$$

3. Caso particular: la integral triple

Cuando $p = 3$ escribimos (x,y,z) en vez de (x_1,x_2,x_3) y denotamos la integral triple de f sobre S por

$$\iiint_S f \qquad \text{ó} \qquad \iiint_S f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

Algunas de estas integrales pueden calcularse mediante integrales iteradas de dimensión inferior. Por ejemplo, supongamos que

$$S = \left\{ (x,y,z) \in R^3 : (x,y) \in Q,\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y) \right\},$$

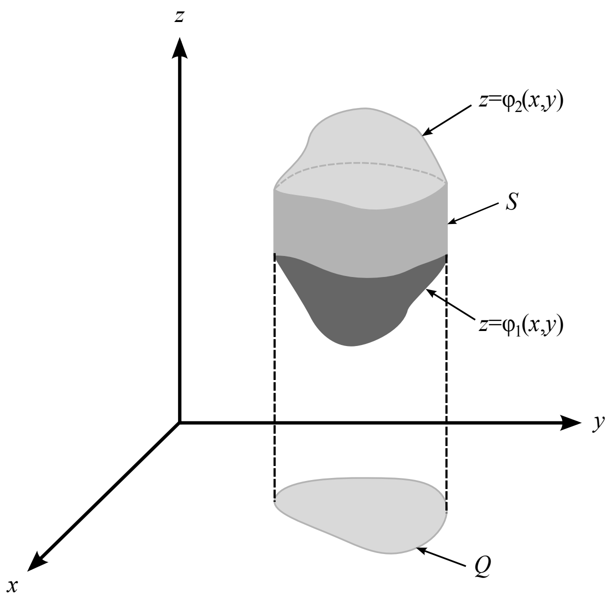

Figura 1. Sólido OXY-proyectable.

donde Q es la región plana obtenida proyectando S sobre el plano OXY, y φ_1, φ_2 son funciones continuas en Q. Los conjuntos de este tipo, que llamaremos *OXY-proyectables*, están limitados por las dos superficies $z = \varphi_1(x,y)$ y $z = \varphi_2(x,y)$ $((x,y) \in Q)$ y posiblemente una porción de superficie cilíndrica cuya generatriz es una recta que se desplaza a lo largo de la frontera de Q, manteniéndose paralela al eje OZ (Figura 1).

Cuando f es continua en el interior de S vale la fórmula

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_Q \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy,$$

que se acostumbra a escribir

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_Q dx\,dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

y que reduce el cálculo a una integral doble sobre la proyección Q. Concretamente, si

$$Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\right\},$$

donde g, h son funciones continuas (recinto de tipo I), entonces

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

En particular, el volumen de S viene dado por la expresión, ya obtenida,

$$V(S) = \iiint_S dx\,dy\,dz = \iint_Q [\varphi_2(x,y) - \varphi_1(x,y)]\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} [\varphi_2(x,y) - \varphi_1(x,y)]\,dy,$$

según la cual $V(S)$ se calcula integrando sobre la proyección Q la «tapa» de S menos su «fondo» .

Fórmulas análogas a las anteriores valen para sólidos *OXZ-proyectables* y *OYZ-proyectables*, en las que los ejes OY y OX desempeñan el papel del eje OZ y la proyección Q se sitúa en los planos OXZ y OYZ, respectivamente. La mayoría de los sólidos tridimensionales que consideraremos en lo sucesivo son proyectables en, al menos, uno de los tres planos coordenados, o bien pueden descomponerse en un número finito de sólidos de alguno de estos tres tipos.

4. Algunos ejemplos

Ejemplo 4.1. *Calcular*

$$\iiint_S y\,dx\,dy\,dz,$$

donde S es el sólido limitado por el paraboloide hiperbólico $z = xy$, el cilindro $y = \sqrt{2x}$ y los planos $x + y = 4$, $y = 0$, $z = 0$.

RESOLUCIÓN. La proyección de S sobre el plano OXY es el recinto D del primer cuadrante limitado por $y = \sqrt{2x}$, $x + y = 4$ e $y = 0$. La «tapa» y el «fondo» de S son las superficies $z = xy$ y $z = 0$, respectivamente (Figura 2).

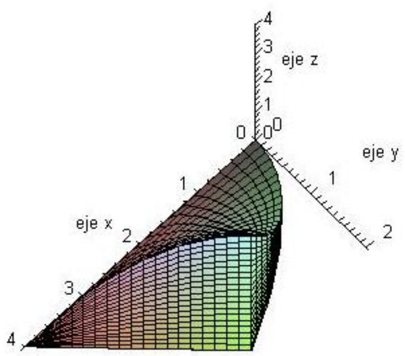

Figura 2. Sólido del Ejemplo 4.1.

El único punto de intersección de las curvas $y = \sqrt{2x}$, $x + y = 4$ en el primer cuadrante es $(2,2)$. Conside-

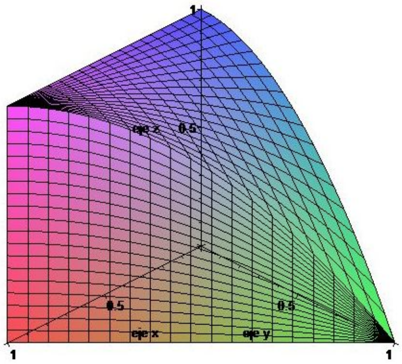

Figura 3. Sólido del Ejemplo 4.2.

rando D como una región de tipo II, podemos escribir:

$$\begin{aligned}\iiint_S y\,dx\,dy\,dz &= \iint_D y\,dx\,dy \int_0^{xy} dz = \iint_D xy^2\,dx\,dy = \int_0^2 y^2\,dy \int_{y^2/2}^{4-y} x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 y^2\left(16-8y+y^2-\frac{y^4}{4}\right)dy = \left[\frac{8y^3}{3}-y^4+\frac{y^5}{10}-\frac{y^7}{56}\right]_0^2 = \frac{656}{105}.\end{aligned}$$

El ejemplo queda resuelto. □

Ejemplo 4.2. *Calcular*

$$\iiint_S z\,dx\,dy\,dz,$$

siendo S el dominio determinado por las condiciones: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $z \leq 1-y^2$, $x+y \leq 1$.

RESOLUCIÓN. Nótese que S es la región del primer octante cuya proyección en el plano OXY es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$, y cuya «tapa» está sobre el cilindro parabólico $z = 1-y^2$ (Figura 3).

Por tanto,

$$\begin{aligned}&\iiint_S z\,dx\,dy\,dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-y^2} z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-y^2)^2\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-2y^2+y^4)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[(1-x)-\frac{2(1-x)^3}{3}+\frac{(1-x)^5}{5}\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{(1-x)^2}{2}+\frac{(1-x)^4}{6}-\frac{(1-x)^6}{30}\right]_0^1 = \frac{11}{60}\end{aligned}$$

es el valor pedido. □