# Criterios de simetría y paridad

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

## Índice

1. Introducción 1

2. Integrales dobles 1

3. Integrales triples 3

# 1. Introducción

Bajo determinadas condiciones de simetría en el recinto de integración y paridad del integrando, una integral doble o triple es nula o bien se puede calcular en un recinto más reducido. A continuación daremos algunos de estos criterios que permiten simplificar el cómputo del valor de la integral en cuestión.

# 2. Integrales dobles

Se considera $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$.

(i) Si $f$ es par en $x$: $f(x,y) = f(-x,y)$ $((x,y) \in D)$, y $D$ es simétrico respecto del eje $OY$: $x = 0$, entonces

$$\iint_D f = 2 \iint_{D^*} f,$$

donde

$$D^* = \{(x,y) \in D : x \geq 0\}.$$

(ii) Si $f$ es par en $y$: $f(x,y) = f(x,-y)$ $((x,y) \in D)$, y $D$ es simétrico respecto del eje $OX$: $y = 0$, entonces

$$\iint_D f = 2 \iint_{D^*} f,$$

donde

$$D^* = \{(x,y) \in D : y \geq 0\}.$$

(iii) Si $f$ es par en $x$ y en $y$: $f(x,y) = f(-x,y) = f(x,-y)$ $((x,y) \in D)$, y $D$ es simétrico respecto de ambos ejes coordenados: $x = y = 0$, entonces

$$\iint_D f = 4 \iint_{D^*} f,$$

donde

$$D^* = \{(x,y) \in D : x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

(iv) Si $f$ es impar en $x$: $f(-x,y) = -f(x,y)$ $((x,y) \in D)$, y $D$ es simétrico respecto del eje $OY$: $x = 0$, entonces

$$\iint_D f = 0.$$

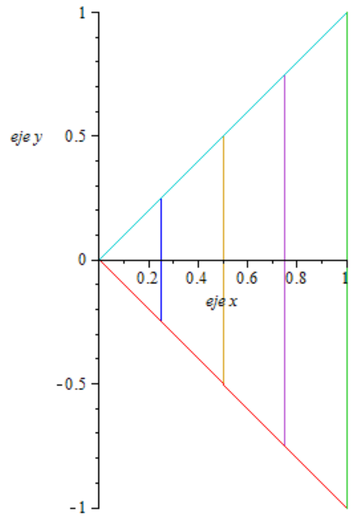


**Figura 1.** Recinto del Ejemplo 2.1 (i).

(v) Si $f$ es impar en $y$: $f(x,-y) = -f(x,y)$ $((x,y) \in D)$, y $D$ es simétrico respecto del eje $OX$: $y = 0$, entonces

$$\iint_D f = 0.$$

**Ejemplo 2.1.** *Hallar:*

*(i)* $\displaystyle\iint_D x^2\,dx\,dy$, *siendo D el recinto limitado por las rectas* $y = x$, $y = -x$, $x = 1$.

*(ii)* $\displaystyle\iint_D \frac{x^3 \operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 1 + \operatorname{tg}^2 y}\,dx\,dy$, *siendo* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1,\ |y| \le 1\right\}$.

RESOLUCIÓN.

(i) El integrando es par en $y$, y el recinto simétrico respecto al eje $OX$ $(y = 0)$. Tomando

$$D^* = \{(x,y) \in D : y \ge 0\},$$

encontramos que

$$\iint_D x^2\,dx\,dy = 2\iint_{D^*} x^2\,dx\,dy = 2\int_0^1 dy \int_y^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(1 - y^3\right)\,dy = \frac{1}{2}.$$

(ii) El integrando es impar en $x$, y el recinto de integración simétrico respecto al eje $OY$ $(x = 0)$. Por consiguiente, la integral es nula. □

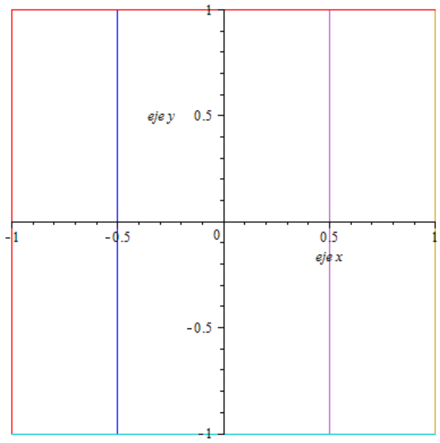


**Figura 2.** Recinto del Ejemplo 2.1 (ii).

# 3. Integrales triples

Se considera $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

(i) Si $f$ es par en $x$: $f(x,y,z) = f(-x,y,z)$ $((x,y,z) \in D)$, y $D$ es simétrico respecto del plano $x = 0$, entonces

$$\iiint_D f = 2\iiint_{D^*} f,$$

donde

$$D^* = \{(x,y,z) \in D : x \geq 0\}.$$

(ii) Si $f$ es par en $y$: $f(x,y,z) = f(x,-y,z)$ $((x,y,z) \in D)$, y $D$ es simétrico respecto del plano $y = 0$, entonces

$$\iiint_D f = 2\iiint_{D^*} f,$$

donde

$$D^* = \{(x,y,z) \in D : y \geq 0\}.$$

(iii) Si $f$ es par en $z$: $f(x,y,z) = f(x,y,-z)$ $((x,y,z) \in D)$, y $D$ es simétrico respecto del plano $z = 0$, entonces

$$\iiint_D f = 2\iiint_{D^*} f,$$

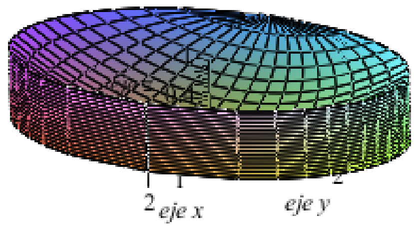


**Figura 3.** Recinto del Ejemplo 3.1 (i).

donde

$$D^* = \{(x,y,z) \in D : z \geq 0\}.$$

(iv) Si $f$ es par en $x$, en $y$ y en $z$: $f(x,y,z) = f(-x,y,z) = f(x,-y,z) = f(x,y,-z)$ $((x,y,z) \in D)$, y $D$ es simétrico respecto de los tres planos coordenados, entonces

$$\iiint_D f = 8 \iiint_{D^*} f,$$

donde

$$D^* = \{(x,y,z) \in D : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

(v) Si $f$ es impar en $x$: $f(-x,y,z) = -f(x,y,z)$ $((x,y,z) \in D)$, y $D$ es simétrico respecto del plano $x = 0$, entonces

$$\iiint_D f = 0.$$

(vi) Si $f$ es impar en $y$: $f(x,-y,z) = -f(x,y,z)$ $((x,y,z) \in D)$, y $D$ es simétrico respecto del plano $y = 0$, entonces

$$\iiint_D f = 0.$$

(vii) Si $f$ es impar en $z$: $f(x,y,-z) = -f(x,y,z)$ $((x,y,z) \in D)$, y $D$ es simétrico respecto del plano $z = 0$, entonces

$$\iiint_D f = 0.$$

**Ejemplo 3.1.** *(i) Hallar el volumen encerrado por el tronco de paraboloide elíptico*

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}.$$

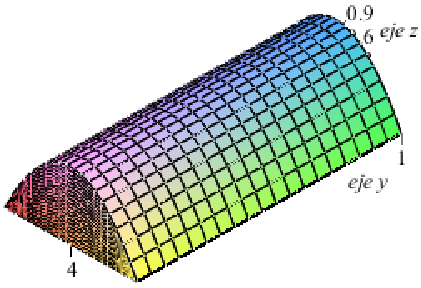


**Figura 4.** Recinto del Ejemplo 3.1 (ii).

*(ii) Sea D el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ delimitado por las superficies $y^2 = 1 - z$, $x = 0$, $x = 4$ y $z = 0$. Hallar*

$$\iiint_D y^3 \operatorname{sen}^2(x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

RESOLUCIÓN.

(i) En vista de la simetría del recinto y la paridad del integrando, sustituimos $D$ por el primer octante

$$D^* = \{(x,y,z) \in D : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$$

y multiplicamos por 4 la integral extendida a $D^*$ para obtener:

$$\begin{aligned}
\iiint_D dx\, dy\, dz &= 4\iiint_{D^*} dx\, dy\, dz \\
&= 4\int_0^2 dx \int_0^{3\sqrt{1-x^2/4}} dy \int_0^{x^2/4+y^2/9} dz \\
&= 4\int_0^2 dx \int_0^{3\sqrt{1-x^2/4}} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right) dy \\
&= 4\int_0^2 \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx \\
&= 3\pi.
\end{aligned}$$

La última integral se puede resolver aplicando el cambio de variable $x = 2\operatorname{sen} t$.

(ii) El integrando es impar en $y$, y el recinto de integración simétrico respecto al plano $y = 0$. Por consiguiente, la integral es nula. □