Problemas propuestos con solución

Integración múltiple: integrales dobles

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Integrales iteradas

1. Evaluar las siguientes integrales iteradas:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(x^4y+y^2)\,dy\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}xye^{x+y}\,dy\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}(-x\ln y)\,dy\,dx$; (d) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\ln\left[(x+1)(y+1)\right]\,dx\,dy$.

Solución: (a) $\dfrac{13}{15}$; (b) 1; (c) 0; (d) $4\ln 2-2$.

2. Evaluar las siguientes integrales iteradas y trazar las regiones determinadas por los límites:

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2}dy\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{1}^{e^x}(x+y)\,dy\,dx$; (c) $\displaystyle\int_{-3}^{2}\int_{0}^{y^2}(x^2+y)\,dx\,dy$;

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos x}y\operatorname{sen}x\,dy\,dx$; (e) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-2|x|}^{|x|}e^{x+y}\,dy\,dx$; (f) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2\sqrt{1-x^2}}x\,dy\,dx$.

Solución: (a) $\dfrac{1}{3}$; (b) $\dfrac{e^2-1}{4}$; (c) $\dfrac{7895}{84}$; (d) $\dfrac{1}{6}$; (e) $\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{3e^3}-\dfrac{5}{6}$; (f) $-\dfrac{2}{3}$.

3. Cambiar el orden de integración en cada una de las integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{x^4}^{x^2}f(x,y)\,dy\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{-y}^{y}f(x,y)\,dx\,dy$; (c) $\displaystyle\int_{1}^{4}\int_{x}^{2x}f(x,y)\,dy\,dx$.

Solución:

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}}f(x,y)\,dx\,dy$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{-x}^{1}f(x,y)\,dy\,dx+\int_{0}^{1}\int_{x}^{1}f(x,y)\,dy\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{1}^{y}f(x,y)\,dx\,dy+\int_{2}^{4}\int_{y/2}^{y}f(x,y)\,dx\,dy+\int_{4}^{8}\int_{y/2}^{4}f(x,y)\,dx\,dy$.

4. Cambiar el orden de integración en las integrales del problema 2 y evaluarlas.

Solución:

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{y}}^{1}dx\,dy=\frac{1}{3}$; (b) $\displaystyle\int_{1}^{e}\int_{\ln y}^{1}(x+y)\,dx\,dy=e^2-\frac{1}{4}$;

(c) $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{x}}^{2}(x^2+y)\,dy\,dx+\int_{0}^{4}\int_{-3}^{-\sqrt{x}}(x^2+y)\,dy\,dx+\int_{4}^{9}\int_{-3}^{-\sqrt{x}}(x^2+y)\,dy\,dx=\frac{7895}{84}$;

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\arccos y}y\operatorname{sen}x\,dx\,dy=\frac{1}{6}$;

(e) $\displaystyle\int_{-2}^{0}\int_{-1}^{y/2}e^{x+y}\,dx\,dy+\int_{-2}^{0}\int_{-y/2}^{1}e^{x+y}\,dx\,dy+\int_{0}^{1}\int_{-1}^{-y}e^{x+y}\,dx\,dy+\int_{0}^{1}\int_{y}^{1}e^{x+y}\,dx\,dy=$

$\displaystyle=\frac{e^2}{2}+\frac{1}{e}+\frac{1}{3e^3}-\frac{5}{6}$;

(f) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}}^{0}x\,dx\,dy=-\frac{2}{3}$.

5. Cambiar el orden de integración, esbozar las regiones correspondientes y evaluar las integrales de las dos maneras:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 xy\,dy\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} \cos\theta\,dr\,d\theta$;

   (c) $\displaystyle\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2}\,dx\,dy$; (d) $\displaystyle\int_{-3}^1 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x^2\,dx\,dy$.

   Solución: (a) $\dfrac{1}{8}$; (b) $\dfrac{\pi}{4}$; (c) e^4-1; (d) $\dfrac{43\sqrt{2}}{6}+\dfrac{81}{4}\operatorname{arc\,sen}\dfrac{1}{3}+\dfrac{81\pi}{8}$.

2. Teorema de Fubini

6. Evaluar las siguientes integrales en los recintos que se indican:

   (a) $\displaystyle\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy,\quad R=[0,1]\times[0,1]$; (b) $\displaystyle\iint_R \operatorname{sen}(x+y)\,dx\,dy,\quad R=[0,1]\times[0,1]$;

   (c) $\displaystyle\iint_R \left(-xe^x \operatorname{sen}\frac{\pi y}{2}\right) dx\,dy,\quad R=[0,2]\times[-1,0]$; (d) $\displaystyle\iint_R |y|\cos\frac{\pi x}{4}\,dx\,dy,\quad R=[0,2]\times[-1,0]$.

   Solución: (a) $\dfrac{2}{3}$; (b) $2\operatorname{sen}1-\operatorname{sen}2$; (c) $\dfrac{2}{\pi}\left(1+e^2\right)$; (d) $\dfrac{2}{\pi}$.

7. Sea $I=[0,2]\times[0,3]$. Calcular $\displaystyle\iint_I (x^2+4y)\,dx\,dy$.

   Solución: 44.

8. Sea D el recinto plano limitado por las rectas $y=0$, $y=1$, $x=-1$, $x=y$. Hallar $\displaystyle\iint_D (xy-y^3)\,dx\,dy$.

   Solución: $-\dfrac{23}{40}$.

9. Hallar $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy$, siendo D la región del primer cuadrante encerrada por las parábolas $y^2=x$, $y=x^2$.

   Solución: $\dfrac{1}{12}$.

10. Sea D la región acotada por las partes positivas de los ejes OX, OY y la recta $3x+4y=10$. Calcular $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$.

    Solución: $\dfrac{15625}{1296}$.

11. Sea D la región dada como el conjunto de los puntos (x,y) del plano donde $1\le x^2+y^2\le 2$ e $y\ge 0$. Evaluar $\displaystyle\iint_D (1+xy)\,dx\,dy$.

    Solución: $\dfrac{\pi}{2}$.

12. Calcular $\iint_D (x^2 - y)\,dx\,dy$, siendo D la región comprendida entre las gráficas de las parábolas $y = -x^2$, $y = x^2$, y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

    Solución: $\dfrac{4}{5}$.

13. Hallar $\iint_D xy\,dx\,dy$, siendo D el conjunto de los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen $0 \le y \le x + 2$, $4x^2 + 9y^2 \le 36$.

    Solución: $\dfrac{23}{6}$.

3. Cambio de variables

14. Sea D el paralelogramo limitado por $y = -x$, $y = -x + 1$, $y = 2x$, $y = 2x - 3$. Calcular $\iint_D (x+y)^2\,dx\,dy$.

    Solución: $\dfrac{1}{3}$.

15. Sea D la región del primer cuadrante delimitada por las curvas $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 4$, $x^2 - y^2 = 1$. Hallar $\iint_D xy\,dx\,dy$.

    Solución: $\dfrac{15}{8}$.

16. Sea D la región $0 \le y \le x$, $0 \le x \le 1$. Evaluar $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$ haciendo el cambio $x = u + v$, $y = u - v$. Verificar la respuesta calculando directamente la integral doble mediante integrales iteradas.

    Solución: $\dfrac{1}{2}$.

17. Sea $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (4u, 2u + 3v)$. Sea $D^* = [0, 1] \times [1, 2]$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular:

    (a) $\iint_D xy\,dx\,dy$, (b) $\iint_D (x - y)\,dx\,dy$,

    haciendo un cambio para evaluarlas como integrales sobre D^*.

    Solución: $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 4,\ \dfrac{x}{2} + 3 \le y \le \dfrac{x}{2} + 6\right\}$; (a) 140; (b) -42.

18. Efectuando un cambio de variables apropiado, calcular $\iint_R x^2 y^2\,dx\,dy$, siendo R la porción del primer cuadrante acotada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $y = x$, $y = 4x$.

    Solución: $\dfrac{7}{3}\ln 2$.

4. Cambio de variables: coordenadas polares

19. Sea D el círculo unidad. Evaluar $\iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$ haciendo un cambio de variables a coordenadas polares.

    Solución: $\pi(e-1)$.

20. Mediante un cambio de variable a coordenadas polares, calcúlense las siguientes integrales:

    (a) $\iint_D (1+x^2+y^2)^{-3/2}\,dx\,dy$, donde D es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$;

    (b) $\iint_D (x^3+y^3)\,dx\,dy$, siendo $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1,\ x^2+y^2-2x\geq 0\right\}$.

    Solución: (a) $\dfrac{\pi}{12}$; (b) $\dfrac{29\sqrt{3}}{64}+\dfrac{203}{960}-\dfrac{7\pi}{24}$.

21. Calcular $\iint_D (x^2+y^2)^{3/2}\,dx\,dy$, siendo D el disco $x^2+y^2\leq 4$.

    Solución: $\dfrac{64\pi}{5}$.

22. Hallar $\iint_D \left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy$, donde D es el recinto acotado por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$.

    Solución: $\dfrac{\pi ab}{2}$.

23. Calcular $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, donde D está determinado por las condiciones: $x^2+y^2-x<0$, $x^2+y^2-y>0$, $y>0$.

    Solución: $\dfrac{1}{8}$.

24. Siendo D el semicírculo limitado por el eje OX y la semicircunferencia $x^2+y^2-2Rx=0$, $y>0$, calcular la integral doble, extendida a D, de la función $f(x,y)=x^2-y^2$.

    Solución: $\dfrac{\pi R^4}{2}$.

25. Calcular $\iint_D \operatorname{arc\,sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy$, donde el recinto de integración D es el dominio plano limitado por la curva de ecuación polar $\rho=\sqrt{\operatorname{sen}\theta}$ $(0\leq\theta\leq\pi/2)$ y la perpendicular al eje polar trazada por el polo.

    Solución: $1-\dfrac{\pi}{4}$.

5. Aplicaciones: cálculo de áreas

26. Usar integrales dobles para calcular el área de un círculo de radio r.

    Solución: πr^2.

27. Hallar el área del recinto encerrado por una elipse de semiejes a y b.

    Solución: πab.

28. Hallar el área comprendida entre las circunferencias $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$ y las rectas $y=x$, $y=0$.

    Solución: $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$.

29. Se considera la lemniscata de ecuación $\rho^2=2a^2\cos 2\theta$ $(a>0)$, y el círculo de centro el origen y radio a. Calcular mediante una integral doble el área de la porción de plano limitada por un bucle de la lemniscata que es exterior a dicho círculo.

    Solución: $\frac{a^2}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$.

6. Aplicaciones: cálculo de volúmenes

30. Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x+2y+3z=6$. Representar el sólido y calcular su volumen por integración doble.

    Solución: 6.

31. Usar integrales dobles para calcular el volumen de una esfera de radio r.

    Solución: $\frac{4\pi r^3}{3}$.

32. Calcular el volumen del sólido acotado por los planos OXY, OYZ, OXZ, $x=1$, $y=1$ y la superficie $z=x^2+y^2$.

    Solución: $\frac{2}{3}$.

33. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z=x^2+y$, el rectángulo $R=[0,1]\times[1,2]$ y los lados verticales de R.

    Solución: $\frac{11}{6}$.

34. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide hiperbólico $z=xy$, el cilindro $y=\sqrt{2x}$ y los planos $x+y=4$, $y=0$, $z=0$.

    Solución: 6.