Problemas propuestos con solución

Integración múltiple: integrales triples

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Integrales iteradas 1

2. Teorema de Fubini 2

3. Cambio de variables 4

4. Cambio de variables: coordenadas cilíndricas 4

5. Cambio de variables: coordenadas esféricas 4

6. Aplicaciones: cálculo de volúmenes 5

1. Integrales iteradas

1. Calcular las siguientes integrales iteradas:

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2x+2y+2z)\,dx\,dy\,dz$;

   (b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^6\int_0^1 (x-3y+2)\,dx\,dy\,dz$;

   (c) $\displaystyle\int_0^{\ln 6}\int_0^{\ln 8}\int_0^{\ln 10} e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz$.

   Solución: (a) 3; (b) -78; (c) 315.

2. Expresar las integrales siguientes en el orden indicado en cada caso.

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$, en el orden $dz\,dy\,dx$;

   (b) $\displaystyle\int_0^4\int_0^{(4-x)/2}\int_0^{(12-3x-6y)/4} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$, en el orden $dy\,dx\,dz$.

   Solución: (a) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^3\int_0^{(12-4z)/3}\int_0^{(12-3x-4z)/6} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$.

3. Integrar cambiando el orden de todas las formas posibles:

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^y f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$;

   (b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$;

   (c) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$;

   (d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$.

   Solución:

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_z^x f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$; $\displaystyle\int_0^1\int_y^1\int_0^y f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$;
   $\displaystyle\int_0^1\int_0^y\int_y^1 f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$; $\displaystyle\int_0^1\int_z^1\int_y^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$;
   $\displaystyle\int_0^1\int_z^1\int_z^x f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$.

   (b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^x f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx+\int_0^1\int_{x^2}^{2x^2}\int_{\sqrt{z-x^2}}^x f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$;

   $\displaystyle\int_0^1\int_y^1\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$;

   $\displaystyle\int_0^1\int_0^{2y^2}\int_y^1 f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy+\int_0^1\int_{2y^2}^{1+y^2}\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$;

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{z/2}}^{\sqrt{z}} \int_{\sqrt{z-x^2}}^{x} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz + \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^{1} \int_0^x f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz +$$
$$+ \int_1^2 \int_{\sqrt{z/2}}^{1} \int_{\sqrt{z-x^2}}^{x} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz;$$
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{z/2}} \int_{\sqrt{z-y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \int_0^1 \int_{\sqrt{z/2}}^{1} \int_y^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz +$$
$$+ \int_1^2 \int_{\sqrt{z-1}}^{\sqrt{z/2}} \int_{\sqrt{z-y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \int_1^2 \int_{\sqrt{z/2}}^{1} \int_y^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

(c) $$\int_{-1}^0 \int_{-x}^1 \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx + \int_0^1 \int_x^1 \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx;$$
$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy;$$
$$\int_0^1 \int_{-z}^{z} \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz;$$
$$\int_{-1}^0 \int_{-y}^1 \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy + \int_0^1 \int_y^1 \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy;$$
$$\int_0^1 \int_{-z}^{z} \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz.$$

(d) $$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx + \int_0^1 \int_x^1 \int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx;$$
$$\int_0^1 \int_0^y \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy + \int_0^1 \int_y^1 \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy;$$
$$\int_0^1 \int_0^z \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \int_0^1 \int_z^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz;$$
$$\int_0^1 \int_0^z \int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz + \int_0^1 \int_z^1 \int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz;$$
$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy.$$

2. Teorema de Fubini

4. Evaluar $\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ para las siguientes funciones f y recintos W:

   (a) $f(x,y,z) = ze^{x+y}$, $\quad W = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$;

   (b) $f(x,y,z) = 2x+3y+z$, $\quad W = [1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$;

   (c) $f(x,y,z) = ye^{-xy}$, $\quad W = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$;

   (d) $f(x,y,z) = \dfrac{z^2y - zx^2 - zx^4}{1+x^2}$, $\quad W = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

   Solución: (a) $\dfrac{1}{2}(e-1)^2$; (b) 7; (c) $\dfrac{1}{e}$; (d) $\pi - \dfrac{4}{24}$.

5. Calcular la integral triple $\iiint_D xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, donde el recinto D está limitado por las superficies $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

   Solución: $\dfrac{1}{364}$.

6. Calcular la integral triple $\iiint_M \dfrac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, donde M es el recinto limitado por las superficies $x+y+z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

   Solución: $\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{5}{16}$.

7. Hallar $\iiint_D yz\,dx\,dy\,dz$, si D es el recinto limitado por los planos coordenados y los planos $x+y = 1$, $z = 4$.

   Solución: $\dfrac{4}{3}$.

8. Calcular $\iiint_M xyz\,dx\,dy\,dz$, siendo M el recinto limitado por las superficies:

   (a) $x^2+y^2-2x = 0,\ y = z^2,\ z = 0$; (b) $x^2+y^2-2z = 0,\ y = z^2$.

   Solución: (a) $\dfrac{\pi}{16}$; (b) 0.

9. Hallar $\iiint_D yz\,dz\,dy\,dx$, siendo D el primer octante del sólido delimitado por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

   Solución: $\dfrac{ab^2c^2}{15}$.

10. Calcular $\iiint_D (xe^y + ye^z)\,dx\,dy\,dz$, donde D es la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 1-x$, $z = 1$.

    Solución: $-\dfrac{8}{3}+\dfrac{7e}{6}$.

11. Calcular $\iiint_D (1-x-y-z)\,dx\,dy\,dz$, donde D es la región limitada por los planos coordenados y el plano $x+y+z = 1$.

    Solución: $\dfrac{1}{24}$.

12. Calcular la integral triple de la función $f(x,y,z) = 1$ sobre la región D limitada por los paraboloides $z = x^2+y^2$, $z = 4x^2+4y^2$, el cilindro $y = x^2$ y el plano $y = 3x$.

    Solución: $\dfrac{9477}{35}$.

13. Calcular $\iiint_T z\,dx\,dy\,dz$, siendo T el dominio del primer octante delimitado por las superficies $y^2+z = 1$, $x^2+z = 1$.

    Solución: $\dfrac{1}{6}$.

3. Cambio de variables

14. Efectuando el cambio de variables

$$u = \frac{z}{x^2+y^2}, \quad v = xy, \quad w = \frac{y}{x},$$

calcular la integral triple de la función $f(x,y,z) = xyz$ sobre la región Ω del primer octante limitada por los paraboloides $z = x^2+y^2$, $z = 2x^2+2y^2$, los cilindros $xy = 1$, $xy = 4$, y los planos $y = x$, $y = 5x$.

Solución: $\dfrac{765}{8}\left(\dfrac{156}{25}+\ln 5\right)$.

4. Cambio de variables: coordenadas cilíndricas

15. Mediante un cambio de variable a coordenadas cilíndricas, calcúlense las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2)^2\,dx\,dy\,dz, \quad D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 2z \leq 4\right\};$

(b) $\displaystyle\iiint_D z\exp\{-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy\,dz, \quad D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2(x^2+y^2) \leq z^2 \leq x^2+y^2+1,\ z \geq 0\right\}.$

Solución: (a) $\dfrac{32\pi}{3}$; (b) $\dfrac{\pi}{2e}$.

16. Hallar $\displaystyle\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$, siendo $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z^2,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\right\}$.

Solución: $\dfrac{\pi}{8}$.

17. Integrar $ze^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro $x^2+y^2 \leq 4$, $2 \leq z \leq 3$.

Solución: $\dfrac{5\pi}{2}\left(e^4-1\right)$.

18. Calcular $\displaystyle\iiint_T y^2\,dx\,dy\,dz$, siendo T el tronco de cono de vértice en el origen y base en el plano $z = 4$, delimitada por la circunferencia $x^2+y^2-2y = 0$.

Solución: π.

5. Cambio de variables: coordenadas esféricas

19. Mediante un cambio de variable a coordenadas esféricas, calcúlense las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\iiint_D xyz\,dx\,dy\,dz, \quad D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\};$

(b) $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz, \quad D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2az \le x^2+y^2,\ x^2+y^2+z^2 \le 3a^2\right\}.$

Solución: (a) $\dfrac{1}{48}$; (b) $\dfrac{2\pi a^5}{5}\left(9\sqrt{3}+\dfrac{97}{12}\right)$.

20. Sea B la esfera unidad. Evaluar $\displaystyle\iiint_B \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}}$.

    Solución: $4\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\ln 1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

21. Calcular $\displaystyle\iiint_S \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, siendo S el sólido comprendido entre las esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, con $0<b<a$.

    Solución: $4\pi\ln\dfrac{a}{b}$.

22. Calcular la integral triple $\displaystyle\iiint_V (4x^2+9y^2+36z^2)\,dx\,dy\,dz$, siendo V el interior del elipsoide $4x^2+9y^2+36z^2=36$.

    Solución: $\dfrac{864\pi}{5}$.

6. Aplicaciones: cálculo de volúmenes

23. Calcular el volumen del sólido limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ y el cilindro $x^2+y^2-ay=0$.

    Solución: $\left(2\pi-\dfrac{8}{3}\right)\dfrac{a^3}{3}$.

24. Hallar el volumen del recinto $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 1\right\}$.

    Solución: 3π.

25. Calcular el volumen del sólido de revolución $z^2\ge x^2+y^2$ encerrado por la superficie $x^2+y^2+z^2=1$.

    Solución: $\dfrac{4\pi}{3}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

26. Determinar el volumen de la región acotada por las superficies $z=x^2+y^2$, $z=10-x^2-2y^2$.

    Solución: $25\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

27. Hallar el volumen del sólido determinado por las condiciones:

$$x^2+y^2+z^2-R^2\le 0, \quad x^2+y^2-4a(z+a)\ge 0 \quad (R>a>0).$$

Solución: $2\pi\left(\dfrac{a^3}{3}-aR^2+\dfrac{2R^3}{3}\right)$.