Problemas propuestos con solución

Integración múltiple: integrales impropias y paramétricas

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Integrales impropias múltiples 1

2. Integrales paramétricas propias 2

3. Integrales paramétricas impropias 3

1. Integrales impropias múltiples

1. Demostrar que
$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy = \frac{1}{2}, \qquad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx = -\frac{1}{2}.$$
¿Son contradictorios estos resultados? Razonar la respuesta.

   Solución: No.

2. Hallar $\iint_{\mathbb{R}}^{2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ y utilizarla para calcular
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

   Solución: π.

3. Estudiar la convergencia y calcular, si es posible, la integral impropia $\iint_D \frac{y}{x^2}\, dx\, dy$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$.

   Solución: $\frac{1}{2}$.

4. Estudiar la convergencia y, en su caso, calcular el valor de la integral $\iint_D xe^{-xy}\, dx\, dy$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ y \geq 1\}$.

   Solución: e^{-1}.

5. Discutir la convergencia de la integral
$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)^{-p/2}\, dx\, dy\, dz$$
para los distintos valores del parámetro p, siendo $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 16\}$.

   Solución: Converge a $\frac{4^{4-p}\pi}{3-p}$ si, y sólo si, $p < 3$.

6. Discutir según los valores de p la convergencia de la integral
$$\iiint_D \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^p}\, dx\, dy\, dz,$$
siendo $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \geq 1\}$.

   Solución: Converge absolutamente a $\frac{\pi}{p-2}$ si, y sólo si, $p > 2$.

7. Discutir según los valores de p, q y r la convergencia de la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{x^p\,y^q\,z^r},$$

y hallar su valor cuando sea convergente.

Solución: Converge si, y sólo si, $p, q, r < 1$, a $\dfrac{1}{(1-p)(1-q)(1-r)}$.

2. Integrales paramétricas propias

8. Calcular $\lim\limits_{t\to 0} \displaystyle\int_1^3 (3x-1)\cos xt\,dx$.

Solución: 10.

9. Sea $I(t) = \displaystyle\int_{t^2}^{t} \operatorname{sen}(x^2+t^2)\,dx$. Hallar $I'(t)$.

Solución: $I'(t) = 2\displaystyle\int_{t^2}^{t} t\cos(x^2+t^2)\,dx + \operatorname{sen} 2t^2 - 2t\operatorname{sen}(t^4+t^2)$.

10. Calcular por derivación respecto a un parámetro $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$.

Solución: $\dfrac{3\pi+8}{32a^5}$.

11. Calcular $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_t^{t^2} \frac{\operatorname{sen} tx}{x}\,dx$.

Solución: $\dfrac{3}{t}\operatorname{sen} t^3 - \dfrac{2}{t}\operatorname{sen} t^2$.

12. Calcular $I'(k)$, donde $I(k) = \displaystyle\int_{\sqrt{k}}^{1/k} \cos kx^2\,dx$.

Solución: $I'(k) = -\dfrac{1}{2k^2}\cos\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{\sqrt{k}}\cos k^2 - \dfrac{1}{2k}I(k)$.

13. Dada $I(t) = \displaystyle\int_{1/2t}^{t/2} \operatorname{sen}^2 \pi xt\,dx$:

   (a) Calcular $I'(t)$ aplicando derivación bajo el signo integral.

   (b) Comprobar que se obtiene el mismo resultado calculando la integral $I(t)$ y después derivando esta función.

   Solución: $I'(t) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4t^2} - \dfrac{1}{2}\cos \pi t^2 + \dfrac{1}{4\pi t^2}\operatorname{sen} \pi t^2$.

14. Se define la función real F de variable real x mediante $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\frac{dt}{1+t^2}$.

   (a) Razonar si es convergente la integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\frac{dt}{1+t^2}$.

(b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-x}{x^3}$.

(c) Suponiendo que tuviéramos tabulados los valores de la función F frente a los de x, explicar cómo podríamos calcular el valor de la integral

$$I(a) = \int_{-a}^{a} e^{-\operatorname{tg}^2 u} du, \quad [-a,a] \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

conocido el valor de a y haciendo uso de esas tablas.

Solución: (a) Sí; (b) $-\dfrac{2}{3}$; (c) $I(a) = 2F(\operatorname{tg} a)$.

3. Integrales paramétricas impropias

15. Estudiar la convergencia uniforme de $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen} tx \, dx$.

    Solución: Converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

16. Demostrar que la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^t}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$, con $t \geq 0$, es uniformemente convergente.

17. ¿Es uniformemente convergente en $[0,1]$ la integral $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{t} e^{-tx^2} \, dx$? Razonar la respuesta.

    Solución: No.

18. (a) Demostrar que $I(t) = \displaystyle\int_0^\infty x e^{-x} \cos tx \, dx$ converge uniformemente en cualquier intervalo $[a,b]$.

    (b) Hallar $I(t)$, sabiendo que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen} tx \, dx = \frac{t}{1+t^2} \quad (t \in \mathbb{R})$.

    Solución: (b) $I(t) = \dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \quad (t \in \mathbb{R})$.

19. Hallar $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-tx} \, dx$ para $t \geq t_0 > 0$.

    Solución: $\dfrac{2}{t^3}$.

20. Sabiendo que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calcular $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\left[(x^4+a^2)/x^2\right]} \, dx$.

    Solución: $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$.

21. Hallar $\displaystyle\int_0^1 x^a \ln^n x \, dx$, con $a \geq a_0 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

    Solución: $\dfrac{(-1)^n n!}{(a+1)^{n+1}}$.

22. Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}-1}{\ln x}\,dx$.

    Solución: $\ln n$.

23. Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{m-1}-x^{n-1}}{\ln x}\,dx$.

    Solución: $\ln \dfrac{m}{n}$.

24. Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(1+a\,\mathrm{sen}^2 x)\frac{dx}{\mathrm{sen}^2 x}$, siendo $a>-1$.

    Solución: $\pi\left(\sqrt{1+a}-1\right)$.

25. Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)\,dx$.

    Solución: πa.

26. Hallar $f'(x)$, si $f(x)=\displaystyle\int_x^{\infty} e^{-xy}\,dy \quad (x>0)$.

    Solución: $-\dfrac{2x^2+1}{x^2e^{x^2}}$.