Problemas propuestos con solución

Integración sobre curvas

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Integral de línea de campos escalares

1. Calcular las siguientes integrales curvilíneas:

   (a) $\int_C (x+y)\,ds$, donde C es el contorno del triángulo de vértices $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$;

   (b) $\int_C (x^2+y^2)\,ds$, donde C es la curva $x=a(\cos t+t\operatorname{sen} t)$, $y=a(\operatorname{sen} t-t\cos t)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$;

   (c) $\int_C (x^2+y^2+z^2)\,ds$, donde C es la hélice circular $x=a\cos t$, $y=a\operatorname{sen} t$, $z=bt$ $(0\leq t\leq 2\pi)$.

   Solución: (a) $1+\sqrt{2}$; (b) $2a^3\pi^2\left(1+2\pi^2\right)$; (c) $2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2+\frac{4}{3}\pi^2b^2\right)$.

2. Hallar las longitudes de los arcos de las curvas alabeadas siguientes:

   (a) $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$, desde $O(0,0,0)$ hasta $A(3,3,2)$;

   (b) $x^2+y^2=cz$, $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{z}{c}$, desde $O(0,0,0)$ hasta $A(x_0,y_0,z_0)$;

   (c) $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\operatorname{sen} t$, $z=e^{-t}$ $(0<t<+\infty)$.

   Solución: (a) 5; (b) $\sqrt{cz_0}\left(\frac{2z_0}{3c}+1\right)$; (c) $\sqrt{3}$.

2. Integral de línea de campos vectoriales

3. Calcular $\int_\gamma \omega$, siendo:

   (a) $\omega=\frac{1}{xy}\,dx+\frac{1}{x+y}\,dy$; γ el segmento descrito por el camino $\overline{\gamma}(t)=(2t,5t)$ $(1\leq t\leq 4)$, orientado negativamente.

   (b) $\omega=e^x(\cos y\,dx+\operatorname{sen} y\,dy)$; γ el contorno del cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, orientado positivamente.

   (c) $\omega=xy\,dx+(x^2-y^2)\,dy$; γ la elipse de ecuación $x^2+2y^2=4$, dotada de una orientación cualquiera.

   (d) $\omega=y^2\,dx+x^2\,dy$; γ la elipse de ecuación $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-2\left(\frac{x}{a}\right)=0$, dotada de la orientación canónica.

   Solución: $(a)-\frac{3}{20}-\frac{10}{7}\ln 2$; (b) $2(e-1)(1-\cos 1)$; (c) 0; (d) $2\pi a^2b$.

4. Sea el campo vectorial $\overline{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, definido por $\overline{F}(x,y)=(xy,x^2-y^2)$, y sea γ la circunferencia unidad orientada positivamente, con punto inicial $(1,0)$. Hallar $\oint_\gamma \overline{F}\cdot\,ds$.

   Solución: 0.

5. Calcular $\int_\gamma y\,dx - x\,dy$ a lo largo de la curva cerrada $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, siendo γ_1 el primer cuadrante de la elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ y γ_2 el segmento que une los puntos $(0,3)$ y $(4,0)$.

   Solución: $12 - 6\pi$.

6. Hallar todas las circunferencias del plano $\mathbb{R}^2$ tales que, con cualquier orientación, la integral curvilínea de la forma diferencial $\omega = y^2\,dx + x^2\,dy$ sea nula.

   Solución: $(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$ $(a \in \mathbb{R},\ r > 0)$.

7. Calcular $\int_\gamma x\,dx + y\,dy + z\,dz$ a lo largo del arco de hélice de ecuaciones paramétricas $x = 4\cos\lambda$, $y = 4\operatorname{sen}\lambda$, $z = 3\lambda$, para $0 \le \lambda \le 2\pi$.

   Solución: $18\pi^2$.

8. Evaluar $\int_\sigma y\,dx + (3y^3 - x)\,dy + z\,dz$, siendo σ las curvas descritas por cada uno de los caminos $\overline{\sigma}(t) = (t, t^n, 0)$ $\quad (0 \le t \le 1,\ n \in \mathbb{N})$.

   Solución: $\dfrac{3}{4} - \dfrac{n-1}{n+1}$.

9. Calcular $\oint_\gamma (y^2+z^2)\,dx + (z^2+x^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz$, siendo $\overline{\gamma}$ el camino cuya imagen γ viene dada por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2pz &= 0 \\ x + y - z + p &= 0, \end{cases}$$

   con una orientación cualquiera.

   Solución: 0.

3. Campos conservativos: función potencial

10. Averiguar si la forma diferencial $(e^x y^2 + 3x^2 y)\,dx + (2ye^x + x^3)\,dy$ admite función potencial, y calcularla en caso afirmativo.

    Solución: $\Phi(x,y) = e^x y^2 + x^3 y + C$.

11. Averiguar si la forma diferencial $2xyz\,dx + (x^2 z + 2ye^z)\,dy + (x^2 y + y^2 e^z)\,dz$ admite función potencial, y calcularla en caso afirmativo.

    Solución: $\Phi(x,y,z) = x^2 yz + y^2 e^z + C$.

12. Sean las funciones $P(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$, y las curvas $\gamma_1 : x = \cos\lambda,\ y = \operatorname{sen}\lambda\ (0 \leq \lambda \leq \pi)$, $\gamma_2 : x = -\cos\mu,\ y = \operatorname{sen}\mu\ (\pi \leq \mu \leq 2\pi)$. Se pide:

    (a) Comprobar que en todo $\mathbb{R}^2$, excepto en el origen de coordenadas, se cumple $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

    (b) Decidir razonadamente si se verifica $\displaystyle\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy$.

    (c) Calcular ambas integrales por separado.

    Solución: (c) $\displaystyle\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = -\pi$, $\displaystyle\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \pi$.

13. Sea $\overline{F}(x,y,z) = (xy, y, z)$. ¿Puede existir una función f tal que $\overline{F} = \nabla f$?

    Solución: No.

14. Sea $\overline{F}(x,y,z) = (z^3 + 2xy, x^2, 3xz^2)$. Probar que la integral de $\overline{F}$ a lo largo del perímetro del cuadrado con vértices en $(1,1,5)$, $(-1,1,5)$, $(-1,-1,5)$, $(1,-1,5)$, es nula.

15. Sea $\overline{F}(x,y,z) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y, z^2)$. Evaluar $\displaystyle\int_{\sigma} \overline{F} \cdot\ ds$, donde σ es la curva descrita por el camino $\overline{\sigma}(t) = (\sqrt{t}, t^3, e^{\sqrt{t}})$ $(0 \leq t \leq 1)$.

    Solución: $e \operatorname{sen} 1 + \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{1}{3}$.

16. Calcular la integral curvilínea $\displaystyle\int_{\gamma} (6xy + y)\,dx + (3x^2 + x)\,dy$, siendo γ la curva descrita por los siguientes caminos:

    (a) $\overline{\gamma}(t) = (t^2, t^3)$ $(1 \leq t \leq 2)$, recorrida con la orientación canónica.

    (b) $\overline{\gamma}$ cualquier camino regular a trozos, uniendo $A(1,1)$ con $B(1,8)$.

    (c) $\overline{\gamma}$ un camino cerrado cualquiera regular a trozos.

    Solución: (a) 412; (b) 28; (c) 0.

17. Calcular la integral curvilínea $\displaystyle\int_{\gamma} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$, siendo γ la curva descrita por los siguientes caminos:

    (a) $\overline{\gamma}(t) = (t, t^2, t^3)$ $(0 \leq t \leq 1)$, recorrido con la orientación canónica.

    (b) $\overline{\gamma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{tg} t)$ $\left(0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{4}\right)$, con la orientación canónica.

    (c) $\overline{\gamma}$ cualquier camino regular a trozos, uniendo $A(1,-1,2)$ con $B(-2,-1,1)$.

    (d) $\overline{\gamma}$ un camino cerrado cualquiera regular a trozos.

    Solución: (a) 1; (b) $\dfrac{1}{2}$; (c) 4; (d) 0.

18. Sea D un dominio simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$, y sea $f(x,y)$ una función de clase C^2 en D. Probar que la condición de que f sea armónica en D (es decir, satisfaga $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$) es suficiente para que $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\partial f}{\partial x}\,dy-\frac{\partial f}{\partial y}\,dx=0$ cualquiera que sea la curva simple, cerrada y rectificable γ contenida en D.

4. Teorema de Green

19. Sean γ, γ^* dos curvas simples cerradas del plano OXY, disjuntas entre sí, positivamente orientadas, y tales que γ^* está contenida en el recinto encerrado por γ. Sean $P(x,y)$, $Q(x,y)$ dos funciones de clase C^1 en un abierto A que contenga a ambas curvas y a la región entre ellas, satisfaciendo $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. Probar que se verifica

$$\int_\gamma P\,dx+Q\,dy=\int_{\gamma^*} P\,dx+Q\,dy.$$

20. Calcular

$$\oint_\gamma \frac{y}{x^2+y^2}\,dx-\frac{x}{x^2+y^2}\,dy,$$

siendo γ la elipse de ecuación paramétrica $x=4\cos\lambda,\ y=3\operatorname{sen}\lambda\ (0\le\lambda\le 2\pi)$.

Solución: -2π.

21. Usar el teorema de Green para evaluar $\displaystyle\int_{C^+}(y^2+x^3)\,dx+x^4\,dy$, donde C^+ es el perímetro de $[0,1]\times[0,1]$ en dirección antihoraria.

Solución: 0.

22. Usar el teorema de Green para calcular el área encerrada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Solución: πab.

23. Usando el teorema de Green, hallar el área del recinto interior a la cardioide $\rho=1+\cos\theta\ (0\le\theta\le 2\pi)$.

Solución: $\dfrac{3\pi}{2}$.

5. Aplicaciones: trabajo realizado por un campo de fuerza

24. Calcular el trabajo del campo de vectores de $\mathbb{R}^2$ $\overline{W}(x,y)=\left(\dfrac{1}{1+y},-\dfrac{1}{1+x}\right)$ a lo largo del camino $\overline{\gamma}(t)=(t,t^2)\ (0\le t\le 1)$, dotado de la orientación canónica.

Solución: $\dfrac{\pi}{4}-2+2\ln 2$.

25. Calcular el trabajo del campo de vectores de $\mathbb{R}^3$ $\overline{W}(x,y,z) = (2y,x,z)$ a lo largo del camino $\overline{\gamma}(t) = (t^{1/2}, t^{-1/2}, t)$ $(1 \leq t \leq 2)$, dotado de la orientación canónica.

    Solución: $\dfrac{3}{2} + \ln\sqrt{2}$.

26. Se considera el campo de fuerzas $\overline{F}(x,y) = y\overline{i} + x\overline{j}$. Hallar el trabajo de $\overline{F}$ a lo largo de las curvas:

    (a) $\gamma_1 : y = x$, entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

    (b) $\gamma_2 : y = x^2$, entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

    (c) $\gamma_3 : y = x^3$, entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

    (d) $\gamma_4 : y = x^3(x-1)\log(x+2) + x$, entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

    Solución: 1, en todos los casos.

27. Hallar el trabajo realizado por una partícula sometida al campo de fuerzas $\overline{F}(x,y) = (e^x - y^3)\overline{i} + (\cos y + x^3)\overline{j}$, que recorre la circunferencia unidad en sentido antihorario.

    Solución: $\dfrac{3\pi}{2}$.

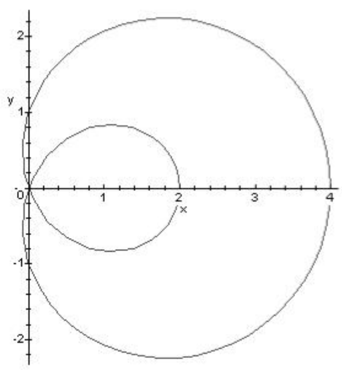

Figura 1. Curva del Ejercicio 29.

28. Se consideran el campo vectorial $\overline{F} = \dfrac{y}{x^2+y^2}\overline{i} - \dfrac{x}{x^2+y^2}\overline{j} + 3z^2\overline{k}$ y la curva γ de ecuación $x = \lambda,\ y = \lambda^3 + \lambda^2 - 1,\ z = \lambda + 3$. Calcular el trabajo necesario para llevar una masa unidad a lo largo de γ desde el punto $(-1,-1,2)$ al punto $(1,1,4)$.

    Solución: $56 - \pi$.

29. Sea $\overline{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ un campo vectorial de clase C^1 en $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$, tal que $P\,dx + Q\,dy$ admite función potencial en todo dominio simplemente conexo contenido en M. Sabiendo que el trabajo necesario para llevar una masa unidad a lo largo de la curva de ecuación $x = 13\cos\lambda,\ y = -13\,\mathrm{sen}\,\lambda$

$(0 \leq \lambda \leq \pi)$ es de 5 julios, mientras que el trabajo necesario para llevar una masa unidad a lo largo de la curva de la Figura 1 es de 18 julios, calcular el trabajo necesario para llevar una masa unidad a lo largo de la curva de ecuación $x = 13\cos\lambda,\ y = 9\,\mathrm{sen}\,\lambda\ (0 \leq \lambda \leq \pi)$.

Solución: 14 julios.