Problemas propuestos con solución

Integración sobre superficies

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Parametrizaciones

1. Determinar una representación paramétrica de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$.

   Solución: $\bar{r}(u,v)=(a\cos u\operatorname{sen} v, a\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v, a\cos v)$ $((u,v)\in[0,2\pi]\times[0,\pi])$.

2. Determinar una representación paramétrica del cilindro $x^2+y^2=4$, $0\leq z\leq 1$.

   Solución: $\bar{r}(u,v)=(2\cos u, 2\operatorname{sen} u, v)$ $((u,v)\in[0,2\pi]\times[0,1])$.

3. Encontrar una representación paramétrica para el paraboloide circular $z=x^2+y^2$.

   Solución: $\bar{r}(u,v)=(v\cos u, v\operatorname{sen} u, v^2)$ $((u,v)\in[0,2\pi]\times[0,\infty[)$.

4. Encontrar una representación paramétrica y la ecuación vectorial de un semicono con semiángulo en el vértice igual a α y longitud de la generatriz igual a s.

   Solución: $\bar{r}(u,v)=(v\cos u\operatorname{sen}\alpha, v\operatorname{sen} u\operatorname{sen}\alpha, v\cos\alpha)$ $((u,v)\in[0,2\pi]\times[0,s])$.

5. Si dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ no son paralelos, encontrar la ecuación vectorial del plano que pasa por el origen y los contiene.

   Solución: $\bar{r}(\lambda,\mu)=(\lambda a_1+\mu b_1, \lambda a_2+\mu b_2, \lambda a_3+\mu b_3)$ $\left((\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right)$, donde $\bar{a}=(a_1,a_2,a_2)$, $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$.

6. Calcular el producto vectorial fundamental de la ecuación vectorial $\bar{r}(u,v)=(u^2-v^2)\,\bar{i}+(u^2+v^2)\,\bar{j}+2uv\,\bar{k}$.

   Solución: $\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial v}=4\left[(u^2-v^2)\,\bar{i}-(u^2+v^2)\,\bar{j}+2uv\,\bar{k}\right]$.

7. Calcular el producto vectorial fundamental de la ecuación vectorial $\bar{r}(u,v)=(u\cos v)\,\bar{i}+(u\operatorname{sen} v)\,\bar{j}+\bar{k}$.

   Solución: $\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial v}=u\bar{k}$.

2. Área de una superficie

8. Calcular las áreas de las siguientes superficies:

   (a) $z=x^2+y^2$, $0\leq z\leq 4$.

   (b) $y=x^2+z^2-1$, $0\leq y\leq 3$.

   (c) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$.

Solución: (a) $\dfrac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$; (b) $\dfrac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right)$; (c) $2\pi a^2$.

9. Calcular el área de la superficie σ: $x=\cos u\cos v$, $y=\cos u\operatorname{sen} v$, $z=\operatorname{sen} u$ $\left(0\le u\le\dfrac{\pi}{4},\ 0\le v\le u\right)$.

   Solución: $\dfrac{\pi+4-4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$.

10. Hallar las áreas de las superficies siguientes:

    (a) El tronco de cono de ecuación $z=a\sqrt{x^2+y^2}$ correspondiente a bases de radios b,c, con $b<c$.

    (b) La superficie esférica $x^2+y^2+z^2=9$ limitada por el cilindro $x^2+4y^2=9$.

    Solución: (a) $\pi\sqrt{1+a^2}(c^2-b^2)$; (b) 12π.

11. Hallar el área del toro circular obtenido al girar una circunferencia de radio R alrededor de un eje situado en el plano en el que se encuentra la circunferencia y a una distancia $a>R$ de su centro.

    Solución: $4\pi^2 aR$.

3. Integral de superficie de campos escalares

12. Evaluar $\displaystyle\iint_S xyz\,dS$, donde S es el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,1,1)$.

    Solución: $\dfrac{\sqrt{6}}{30}$.

13. Evaluar $\displaystyle\iint_S z^2\,dS$, siendo C la frontera del cubo $C=[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$.

    Solución: $\dfrac{40}{3}$.

14. Calcular $\displaystyle\iint_\sigma (x^2+y^2)\,d\sigma$, siendo σ la superficie del cono $z^2=3(x^2+y^2)$, con $0\le z\le 3$.

    Solución: 9π.

15. Sea σ la semiesfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\ge 0$. Hallar $\displaystyle\iint_\sigma (x^2+y^2)\,d\sigma$.

    Solución: $\dfrac{4\pi a^4}{3}$.

4. Integral de superficie de campos vectoriales

16. Se considera el campo vectorial $\overline{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\overline{F}(x,y,z)=y\bar{i}+2x\bar{k}$. Hallar $\displaystyle\iint_\sigma \overline{F}\cdot d\sigma$, donde σ es la superficie de ecuaciones paramétricas $x=\cos u\cos v$, $y=\operatorname{sen} u\cos v$, $z=\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} v$, para $0\le u,v\le\dfrac{\pi}{2}$.

    Solución: $\dfrac{5}{6}$.

17. Sea σ la superficie de ecuaciones paramétricas $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u^2$, para $0 \leq u \leq 3$, $0 \leq v \leq \dfrac{\pi}{2}$. Sea el campo vectorial $\overline{R}(x,y,z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Calcular el flujo de $\overline{R}$ a través de σ en el sentido de la normal exterior.

    Solución: $\dfrac{81\pi}{8}$.

18. Sea σ la porción de superficie cilíndrica $x = 3\cos\theta$, $y = 3\operatorname{sen}\theta$, $z = z$ $(0 \leq \theta \leq \pi,\ -3 \leq z \leq 3)$, y sea el campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Hallar el flujo de $\overline{F}$ a través de σ en el sentido de la normal exterior.

    Solución: 54π.

5. Teorema de Stokes

19. Calcular $\displaystyle\oint_\gamma 2y\,dx + 3x\,dy - z^2\,dz$, siendo γ la circunferencia de ecuaciones paramétricas $x = 3\cos\lambda$, $y = 3\operatorname{sen}\lambda$, $z = 0$, para $0 \leq \lambda \leq 2\pi$.

    Solución: 9π.

20. Sea S el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Comprobar que se verifica el teorema de Stokes para $\overline{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$.

21. Evaluar $\displaystyle\iint_S (\nabla \times \overline{F}) \cdot dS$, donde $\overline{F}(x,y,z) = (x^2+y-4, 3xy, 2xz+z^2)$ y S es la superficie $x^2+y^2+z^2 = 16$, $z \geq 0$:

    (a) directamente;

    (b) mediante el teorema de Stokes.

    Solución: -16π.

22. Evaluar $\displaystyle\iint_S (\nabla \times \overline{F}) \cdot dS$, donde S es la porción de la superficie esférica $x^2+y^2+z^2 = 1$ tal que $x + y + z \geq 1$, y $\overline{F}(x,y,z) = (x,y,z) \times (1,1,1)$.

    Solución: $-\dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}$.

6. Teorema de Gauss

23. Hallar $\displaystyle\iint_S (\nabla \times \overline{F}) \cdot dS$, donde S es el elipsoide $x^2+y^2+2z^2 = 10$ y $\overline{F}(x,y,z) = (\operatorname{sen} xy, e^x, -yz)$.

    Solución: 0.

24. Sea V un sólido de volumen 13 unidades limitado por la superficie cerrada σ. Sea $\overline{R}$ el campo vectorial definido por el vector de posición: $\overline{R}(x,y,z) = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Hallar $\oint_\sigma \overline{R} \cdot d\sigma$.

    Solución: 39.

25. Se consideran el campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = xz\overline{i} + 3xy\overline{j} - 2z\overline{k}$ y la superficie σ, contorno del sólido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3\right\}.$$

    Calcular el flujo $\iint_\sigma \overline{F} \cdot d\sigma$:

    (a) por medio del teorema de la divergencia;

    (b) directamente.

    Solución: $-\dfrac{3\pi}{2}$.

26. Se consideran el casquete de paraboloide $\sigma : z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ y el campo vectorial

$$\overline{F}(x,y,z) = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\overline{i} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\overline{j} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\overline{k}.$$

    Hallar el flujo de $\overline{F}$ a través de σ hacia el exterior del paraboloide.

    Solución: 2π.

27. Sea $\overline{F}(x,y,z) = (y,z,xz)$. Evaluar $\iint_{\partial\Omega} \overline{F} \cdot dS$ para cada una de las siguientes regiones Ω:

    (a) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$;

    (b) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$, $x \geq 0$;

    (c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$, $x \leq 0$.

    Solución: (a) 0; (b) $\dfrac{4}{15}$; (c) $-\dfrac{4}{15}$.

28. Calcular $\iint_S \overline{F} \cdot dS$, donde $\overline{F}(x,y,z) = (3xy^2, 3x^2y, z^3)$ y S es la esfera unidad.

    Solución: $\dfrac{12\pi}{5}$.

29. Evaluar $\iint_S \overline{F} \cdot dS$, donde $\overline{F}(x,y,z) = \left(1,1,z(x^2+y^2)^2\right)$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

    Solución: $\dfrac{\pi}{3}$.

30. Sea $\overline{F}(x,y,z)=(2yz,-x+3y+2,x^2+z)$. Calcular $\displaystyle\iint_S (\nabla\times\overline{F})\cdot\, dS$, donde S es el cilindro $x^2+y^2=a^2$, $0\le z\le 1$: (a) incluyendo las bases; (b) excluyendo las bases.

   Solución: (a) 0; (b) $2\pi a^2$.

7. Aplicaciones: flujo a través de una superficie

31. Sea S la superficie cerrada formada por la semiesfera $x^2+y^2+z^2=1,\ z\ge 0$ y su base $x^2+y^2\le 1,\ z=0$. Sea también $\overline{E}(x,y,z)=(2x,2y,2z)$ un campo eléctrico definido en $\mathbb{R}^3$. Hallar el flujo de $\overline{E}$ a través de S.

   Solución: 4π.

32. Supongamos que el campo de velocidad de un fluido viene dado por $\overline{F}(x,y,z)=(1,x,z)$, medido en metros por segundo. Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan la superficie descrita por $x^2+y^2+z^2=1,\ z\ge 0$.

   Solución: $\dfrac{2\pi}{3}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$.