

Problemas propuestos con solución

Aplicaciones físicas

ISABEL MARRERO

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

imarrero@ull.es

Índice

1. Integral doble: valor medio	1
2. Integral doble: masa y centro de masa	1
3. Integral doble: momentos de inercia	1
4. Integral triple: valor medio	2
5. Integral triple: masa y centro de masa	2
6. Integral triple: momentos de inercia	3
7. Integral de línea: centro de masa y momentos de inercia	4
8. Integral de superficie: centro de masa y momentos de inercia	4



1. Integral doble: valor medio

1. La temperatura de una placa es proporcional a su distancia al origen. Dicha placa se halla situada en la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}$. Sabiendo que en el punto $(1, 0)$ su temperatura es de 100°C , hallar la temperatura media de la placa.

Solución: $\frac{1000}{3}^\circ\text{C}$.

2. Integral doble: masa y centro de masa

2. Determinar la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región D acotada por la parábola $x = y^2$ y la recta $y = 2 - x$, y con función de densidad $\rho(x, y) = 3$.

Solución: $M = \frac{27}{2}$, $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{8}{5}, -\frac{1}{2}\right)$.

3. La densidad en cualquier punto de una lámina semicircular de radio a es proporcional a la distancia desde el centro del círculo. Determinar el centro de masa de la lámina.

Solución: $\left(0, \frac{3a}{2\pi}\right)$.

4. Una lámina ocupa la parte del disco $x^2 + y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante. Determinar su centro de masa si la densidad es proporcional al cuadrado de la distancia desde el eje OX para cualquier punto.

Solución: $\frac{16}{15\pi}(1, 2)$.

5. Se yuxtapone un rectángulo a un semicírculo de radio constante R , de modo que el diámetro coincida con uno de los lados del rectángulo. Se pide calcular las dimensiones a, b de éste para que el centro de masa de la figura completa coincida con el centro del semicírculo. Se supone la densidad superficial μ constante.

Solución: $a = R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $b = 2R$.

3. Integral doble: momentos de inercia

6. Calcular el momento de inercia del recinto encerrado por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ respecto al eje OY . Considérese la densidad superficial μ constante.

Solución: $I_y = \frac{1}{4}a^3b\mu\pi$.

7. Encontrar los momentos de inercia I_x , I_y , I_0 para la lámina D , siendo D la región del primer cuadrante acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$, y con una densidad dada por la función $\mu(x, y) = xy$.

$$\text{Solución: } I_x = \frac{1}{10}, \quad I_y = \frac{1}{16}, \quad I_0 = \frac{13}{80}.$$

4. Integral triple: valor medio

8. Hallar el valor promedio de la función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}}$$

en el interior de la esfera $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

$$\text{Solución: } \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

5. Integral triple: masa y centro de masa

9. Calcular la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ si la densidad es $\mu(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\text{Solución: } 3\pi.$$

10. Determinar la masa y el centro de masa del sólido que está bajo el plano $z = x + 2y$, sobre el plano $z = 0$, limitado por el cilindro parabólico $y = x^2$ y los planos $y = 0$, $x = 1$, y cuya función de densidad es $\mu(x, y, z) = 2$.

$$\text{Solución: } M = \frac{9}{10}, \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{22}{27}, \frac{25}{63}, \frac{152}{189}\right).$$

11. Determinar la masa y el centro de masa del cubo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$, si su función de densidad es $\mu(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$$\text{Solución: } M = a^5, \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{7a}{12}(1, 1, 1).$$

12. Hallar el centro de masa del sólido homogéneo limitado por el cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, con $0 \leq z \leq a$.

$$\text{Solución: } \left(0, 0, \frac{3a}{4}\right).$$

13. Calcular el centro de masa del cuerpo homogéneo Ω limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1$.

Solución: $\left(0, 0, \frac{2}{3}\right)$.

14. Determinar el centro de masa del sólido

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq \frac{1}{4}, (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \leq 1 \right\}.$$

Solución: $\left(\frac{107 - 48\sqrt{3}}{128 - 48\sqrt{3}}, 0, 0\right)$.

15. Determinar el centro de masa de un sólido con densidad constante que está acotado por el cilindro parabólico $x = y^2$ y los planos $x = z$, $z = 0$, $x = 1$.

Solución: $\left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14}\right)$.

6. Integral triple: momentos de inercia

16. Determinar los momentos de inercia para un cubo de densidad constante k y longitud de lado l , si uno de sus vértices está en el origen y tres de sus aristas están a lo largo de los ejes coordenados.

Solución: $I_x = I_y = I_z = \frac{2kl^5}{3}$.

17. Se considera el sólido V de densidad constante μ , limitado por la superficie esférica de radio R . Calcular los momentos de inercia:

- (a) Respecto a su centro.
- (b) Respecto a un plano que pase por su centro.
- (c) Respecto a un diámetro.

Solución: (a) $\frac{4}{5}\pi\mu R^5$; (b) $\frac{4}{15}\pi\mu R^5$; (c) $\frac{8}{15}\pi\mu R^5$.

18. Determinar el momento de inercia de una bola no homogénea de radio R y masa M respecto a un diámetro si la densidad de cada punto es proporcional a la distancia del punto al centro de la bola.

Solución: $\frac{4MR^2}{9}$.

7. Integral de línea: centro de masa y momentos de inercia

19. Hallar el centroide del arco del primer cuadrante de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.

Solución: $\left(\frac{10}{\pi}, \frac{10}{\pi}\right)$.

20. Hallar el centroide de un arco circular de radio r y ángulo central 2θ .

Solución: $\left(\frac{r \sin \theta}{\theta}, 0\right)$.

21. Hallar el momento de inercia de la circunferencia de un círculo con respecto a un diámetro.

Solución: πr^3 .

22. Hallar el momento de inercia con respecto al eje OX de la hipocicloide $x = a \sin^3 \theta$, $y = a \cos^3 \theta$.

Solución: $\frac{3}{2} a^3$.

8. Integral de superficie: centro de masa y momentos de inercia

23. Hallar el centro de masa del cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq a$, con densidad superficial constante.

Solución: $\left(0, 0, \frac{2a}{3}\right)$.

24. Calcular el momento de inercia de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ respecto de uno de sus diámetros.

Supóngase densidad superficial μ constante.

Solución: $216\mu\pi$.