Prontuario

Aplicaciones del cálculo integral vectorial a la física

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Longitudes

La longitud de una curva plana o alabeada γ parametrizada por el camino regular a trozos $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(t)$ $(a \leq t \leq b)$ viene dada por

$$L = \int_{\gamma} ds = \int_{a}^{b} \|\overline{\alpha}'(t)\| \, dt.$$

2. Áreas planas

Sea D un recinto plano. El área de D es

$$|D| = \iint_{D} dx\, dy.$$

Si D está limitado por una curva de Jordan γ, el teorema de Green establece que

$$|D| = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} x\, dy - y\, dx.$$

3. Áreas no planas

Si σ es una superficie no plana, su área viene dada por la integral de superficie

$$\iint_{\sigma} d\sigma.$$

El cálculo efectivo de la integral dependerá de la expresión utilizada para definir la superficie:

- Representación paramétrica $\sigma = \overline{r}(T)$:

$$|\sigma| = \iint_{T} \left\| \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right\| du\, dv.$$

- Representación explícita $z = f(x,y)$:

$$|\sigma| = \iint_{D} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy,$$

siendo D la proyección de σ sobre el plano OXY.

- Representación implícita $F(x,y,z)=0$:

$$|\sigma| = \iint_D \frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}\, dx\, dy,$$

donde D es la proyección de σ sobre el plano OXY.

4. Volúmenes

Si $D \subset \mathbb{R}^3$, su volumen es

$$|D| = \iiint_D dx\, dy\, dz.$$

Dada la función $z = f(x,y)$, con $(x,y) \in T$ y $f(x,y) \geq 0$, el volumen del conjunto de ordenadas $\mathscr{O}(f)$ de f es

$$|\mathscr{O}(f)| = \iint_T f(x,y)\, dx\, dy.$$

5. Masas

- Recinto plano $D \subset OXY$ con densidad $f(x,y)$:

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy.$$

- Sólido S con densidad $f(x,y,z)$:

$$\iiint_S f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

- Curva γ con densidad $f(x,y,z)$:

$$\int_\gamma f(x,y,z)\, ds.$$

- Superficie σ con densidad $f(x,y,z)$:

$$\iint_\sigma f(x,y,z)\, d\sigma.$$

6. Centros de masa

- Recinto plano $D \subset OXY$ con densidad $f(x,y)$:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x f(x,y)\, dx\, dy}{\iint_D f(x,y)\, dx\, dy}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y f(x,y)\, dx\, dy}{\iint_D f(x,y)\, dx\, dy}.$$

- Sólido S con densidad $f(x,y,z)$:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_S x f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint_S f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_S y f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint_S f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_S z f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint_S f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}.$$

- Curva γ con densidad $f(x,y,z)$:

$$\bar{x} = \frac{\int_\gamma x f(x,y,z)\, ds}{\int_\gamma f(x,y,z)\, ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int_\gamma y f(x,y,z)\, ds}{\int_\gamma f(x,y,z)\, ds}, \quad \bar{z} = \frac{\int_\gamma z f(x,y,z)\, ds}{\int_\gamma f(x,y,z)\, ds}.$$

- Superficie σ con densidad $f(x,y,z)$:

$$\bar{x} = \frac{\iint_\sigma x f(x,y,z)\, d\sigma}{\iint_\sigma f(x,y,z)\, d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_\sigma y f(x,y,z)\, d\sigma}{\iint_\sigma f(x,y,z)\, d\sigma}, \quad \bar{z} = \frac{\iint_\sigma z f(x,y,z)\, d\sigma}{\iint_\sigma f(x,y,z)\, d\sigma}.$$

7. Momentos de inercia respecto a los planos coordenados

- Sólido S con densidad $f(x,y,z)$:

$$I_{yz} = \iiint_S x^2 f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz, \quad I_{xz} = \iiint_S y^2 f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_{xy} = \iiint_S z^2 f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

- Curva γ con densidad $f(x,y,z)$:

$$I_{yz} = \int_\gamma x^2 f(x,y,z)\, ds, \quad I_{xz} = \int_\gamma y^2 f(x,y,z)\, ds, \quad I_{xy} = \int_\gamma z^2 f(x,y,z)\, ds.$$

- Superficie σ con densidad $f(x,y,z)$:

$$I_{yz} = \iint_\sigma x^2 f(x,y,z)\, d\sigma, \quad I_{xz} = \iint_\sigma y^2 f(x,y,z)\, d\sigma, \quad I_{xy} = \iint_\sigma z^2 f(x,y,z)\, d\sigma.$$

8. Momentos de inercia respecto a los ejes coordenados

- Recinto plano $D \subset OXY$ con densidad $f(x,y)$:

$$I_x = \iint_D y^2 f(x,y)\, dx\, dy, \quad I_y = \iint_D x^2 f(x,y)\, dx\, dy.$$

- Sólido S con densidad $f(x,y,z)$:

$$I_x = \iiint_S (y^2+z^2) f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz, \quad I_y = \iiint_S (x^2+z^2) f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_z = \iiint_S (x^2+y^2) f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

- Curva γ con densidad $f(x,y,z)$:

$$I_x = \int_\gamma (y^2+z^2) f(x,y,z)\, ds, \quad I_y = \int_\gamma (x^2+z^2) f(x,y,z)\, ds, \quad I_z = \int_\gamma (x^2+y^2) f(x,y,z)\, ds.$$

- Superficie σ con densidad $f(x,y,z)$:

$$I_x = \iint_\sigma (y^2+z^2) f(x,y,z)\, d\sigma, \quad I_y = \iint_\sigma (x^2+z^2) f(x,y,z)\, d\sigma, \quad I_z = \iint_\sigma (x^2+y^2) f(x,y,z)\, d\sigma.$$

9. Momento polar de inercia

- Recinto plano $D \subset OXY$ con densidad $f(x,y)$:

$$I_0 = \iint_D (x^2+y^2) f(x,y)\, dx\, dy.$$

- Sólido S con densidad $f(x,y,z)$:

$$I_0 = \iiint_S (x^2+y^2+z^2) f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

- Curva γ con densidad $f(x,y,z)$:

$$I_0 = \int_\gamma (x^2+y^2+z^2) f(x,y,z)\, ds.$$

- Superficie σ con densidad $f(x,y,z)$:

$$I_0 = \iint_\sigma (x^2+y^2+z^2) f(x,y,z)\, d\sigma.$$