Problemas resueltos

Integración múltiple: integrales dobles

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Problema 1

Dibujar la región de integración y cambiar el orden en la integral

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{|x|} f(x,y)\, dy.$$

Solución: $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{-y} f(x,y)\, dx + \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx.$

RESOLUCIÓN. La región de integración se muestra en la Figura 1.

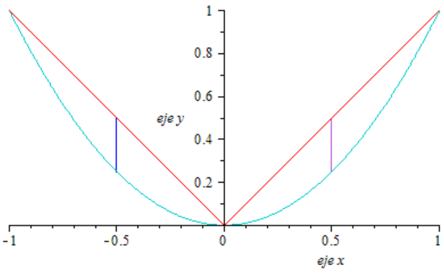

Figura 1.

Toda recta horizontal entre 0 y 1 entra en el dominio en un punto de abscisa $x = -\sqrt{y}$ y sale en un punto de abscisa $x = -y$, para volver a entrar en un punto de abscisa $x = y$ y salir en un punto de abscisa $x = \sqrt{y}$. Por tanto, la integral se reescribe en la forma

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{-y} f(x,y)\, dx + \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx.$$

□

2. Problema 2

Calcular

$$\iint_D (x^2 - y)\,dx\,dy,$$

siendo D la región comprendida entre la gráfica de las parábolas $y = -x^2$, $y = x^2$ y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

Solución: $\dfrac{4}{5}$.

RESOLUCIÓN. El recinto de integración D se muestra en la Figura 2.

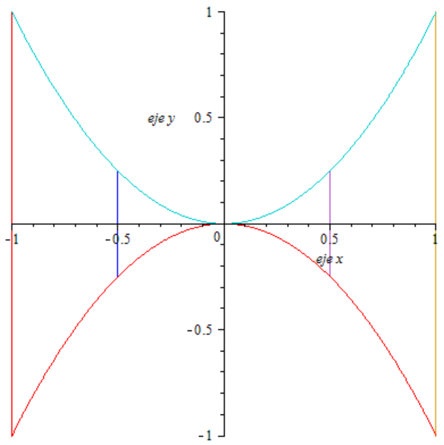

Figura 2.

Se trata de una región de tipo I. Por tanto, podemos calcular la integral pedida escribiendo:

$$\iint_D (x^2 - y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-x^2}^{x^2} (x^2 - y)\,dy = \int_{-1}^{1} \left[x^2 y - \frac{y^2}{2} \right]_{-x^2}^{x^2} dx = 2\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{4}{5}.$$

$\square$

3. Problema 3

Hallar

$$\iint_D xy\,dx\,dy,$$

siendo D el conjunto de los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ que satisfacen $0\le y\le x+2$, $4x^2+9y^2\le 36$.

Solución: $\dfrac{23}{6}$.

RESOLUCIÓN. El recinto D (Figura 3) es de tipo II.

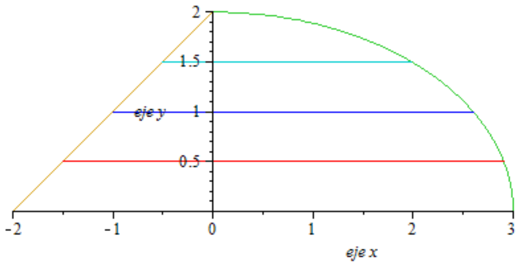

Figura 3.

La intersección de la recta $y=x+2$ y la elipse $4x^2+9y^2=36$ se produce en el punto de ordenada $y=2$. Consiguientemente,

$$\iint_D xy\,dx\,dy=\int_0^2 y\,dy\int_{y-2}^{3\sqrt{4-y^2}/2} x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(-\frac{13}{4}y^3+4y^2+5y\right)\,dy=\frac{1}{2}\left[-\frac{13}{16}y^4+\frac{4}{3}y^3+\frac{5}{2}y^2\right]_0^2=\frac{23}{6}.$$

□

4. Problema 4

Sea D el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$ en el plano OUV y sea T la transformación de OUV en OXY definida por las ecuaciones $x = u + v$, $y = v - u^2$. Esbozar $T(D)$ y calcular su área mediante una integral doble: (a) extendida a D; (b) extendida a $T(D)$.

Solución: $\dfrac{14}{3}$.

RESOLUCIÓN. Los lados de D se hallan sobre las rectas $u = 0$, $v = 0$ y $u + v = 2$ (Figura 4a). En consecuencia, $T(D)$ estará delimitado por las imágenes de estas rectas según T, que se encuentran sobre las curvas $y = x$, $y = -x^2$ y $x = 2$, respectivamente (Figura 4b).

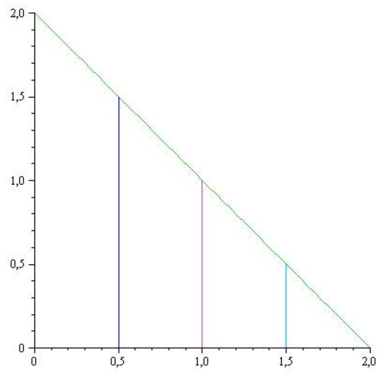

Figura 4a. Recinto D.

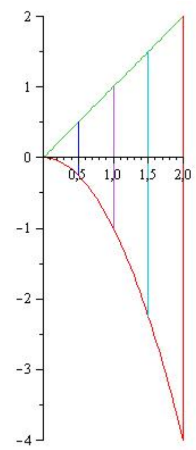

Figura 4b. Recinto $T(D)$.

El área de $T(D)$ viene dada por

$$|T(D)| = \iint_{T(D)} dx\, dy.$$

Para responder (a), calculamos esta integral aplicando el teorema del cambio de variables, teniendo en cuenta que el jacobiano de T es (en valor absoluto) $|J(u,v)| = 1 + 2u$ $(0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 2 - u)$:

$$\begin{aligned} |T(D)| &= \iint_{T(D)} dx\, dy = \iint_D (1+2u)\, du\, dv = \int_0^2 du \int_0^{2-u} (1+2u)\, dv \\ &= \int_0^2 (1+2u)(2-u)\, du = \int_0^2 (2 + 3u - 2u^2)\, du = \left[2u + \frac{3u^2}{2} - \frac{2u^3}{3} \right]_0^2 = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Para responder (b), calculamos la misma integral directamente:

$$|T(D)| = \iint_{T(D)} dx\,dy = \int_0^2 dx \int_{-x^2}^{x} dy = \int_0^2 (x+x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}.$$

Como cabía esperar, los resultados obtenidos coinciden.

$\square$

5. Problema 5

Utilizar el cambio de variables $x = u^{1/3}v^{2/3}$, $y = u^{2/3}v^{1/3}$ para hallar el área de la región R acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{2x}$, $3y = x^2$, $4y = x^2$.

Solución: $\dfrac{1}{3}$.

RESOLUCIÓN. Las zonas sombreadas de las Figuras 5a y 5b muestran los recintos en los planos OXY (original) y OUV (transformado), respectivamente.

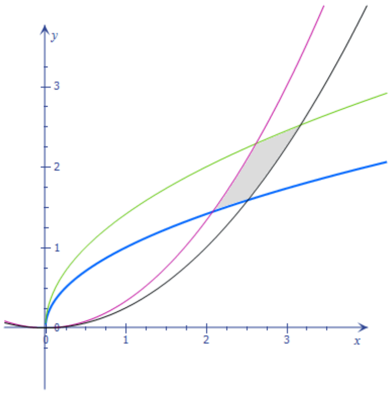

Figura 5a. Recinto original, R.

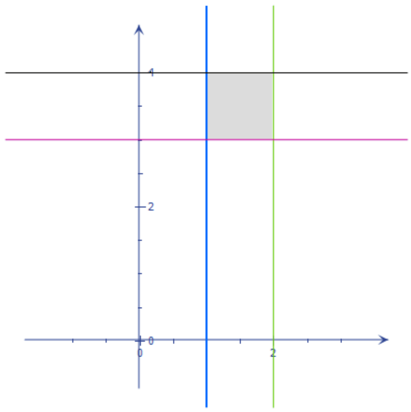

Figura 5b. Recinto transformado.

El cambio de variables propuesto tiene inverso dado por

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \frac{x^2}{y}; \qquad (1 \le u \le 2,\ 3 \le v \le 4)$$

y jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{3},$$

cuyo valor absoluto es $1/3$. Por el teorema del cambio de variables,

$$|R| = \iint_R dx\,dy = \frac{1}{3}\int_4^3 dv \int_1^2 du = \frac{1}{3}.$$

$\square$

6. Problema 6

Efectuando un cambio de variables apropiado, calcular la integral doble

$$\iint_R (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)\, dx\, dy,$$

siendo R el cuadrado de vértices $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,0)$.

Solución: $\dfrac{13}{6}(2-\operatorname{sen} 2)$.

RESOLUCIÓN. El recinto R está limitado por las rectas $x+y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$, $x-y=1$ (Figura 6a). Junto con la presencia de los términos $x+y$ y $x-y$ en el integrando, esto sugiere efectuar el cambio de variables $u=x+y$, $v=x-y$.

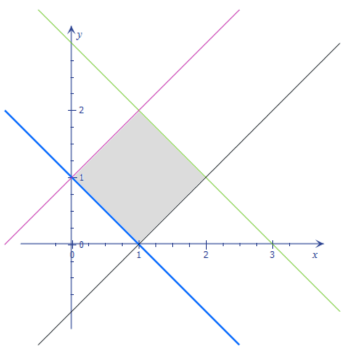

Figura 6a.

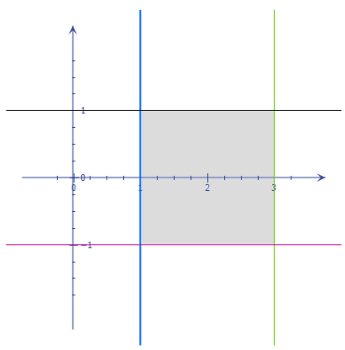

Figura 6b.

El inverso de este cambio está dado por las ecuaciones $x=(u+v)/2$, $y=(u-v)/2$, cuyo jacobiano en valor absoluto es $|J(u,v)|=1/2$, mientras que el nuevo recinto de integración (Figura 6b) viene determinado por las condiciones $1\le u\le 3$, $-1\le v\le 1$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned}
&\iint_R (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)\, dx\, dy = \\
&= \frac{1}{2}\int_1^3 u^2\, du \int_{-1}^1 \operatorname{sen}^2 v\, dv = \frac{26}{12}\int_{-1}^1 (1-\cos 2v)\, dv = \frac{13}{6}\left[v-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2v\right]_{-1}^1 = \frac{13}{6}(2-\operatorname{sen} 2)\,.
\end{aligned}$$

□

7. Problema 7

Efectuando un cambio de variables apropiado, calcular

$$\iint_R x^2y^2\,dx\,dy,$$

siendo R la porción del primer cuadrante acotada por las hipérbolas $xy=1$, $xy=2$ y las rectas $y=x$, $y=4x$.

Solución: $\dfrac{7}{3}\ln 2$.

RESOLUCIÓN. El recinto R se corresponde con la zona sombreada de la Figura 7a.

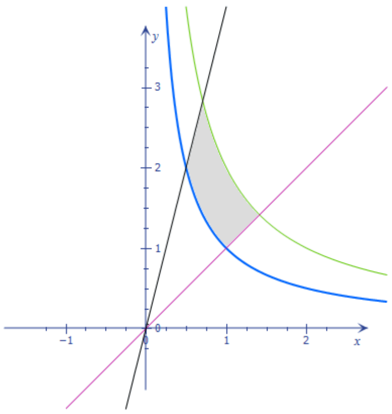

Figura 7a.

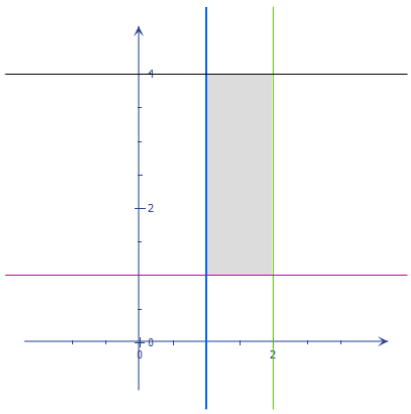

Figura 7b.

Pongamos

$$u=xy,\quad v=\frac{y}{x}.$$

Con este cambio de variables los nuevos límites de integración vienen determinados por las condiciones $1\le u\le 2$, $1\le v\le 4$ (Figura 7b). La transformación inversa y el valor absoluto del correspondiente jacobiano son

$$x=\sqrt{\frac{u}{v}},\quad y=\sqrt{uv};\qquad |J(u,v)|=\frac{1}{2v}.$$

Por tanto,

$$\iint_R x^2y^2\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_1^2 u^2\,du\int_1^4\frac{dv}{v}=\frac{7}{6}\ln v\Big|_1^4=\frac{7}{6}\ln 4=\frac{7}{3}\ln 2.$$

□

8. Problema 8

Calcular

$$\iint_D x\,dx\,dy,$$

siendo D el sector circular acotado en el primer cuadrante por $y=\sqrt{25-x^2}$, $3x-4y=0$, $y=0$.

Solución: 25.

RESOLUCIÓN. El recinto de integración se muestra en la Figura 8.

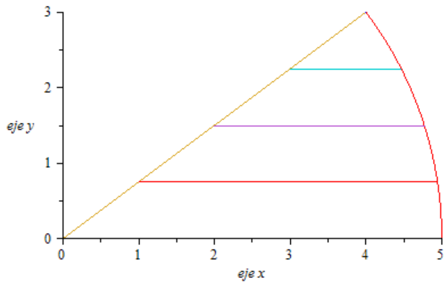

Figura 8.

En el primer cuadrante, la intersección de la recta $3x-4y=0$ con la circunferencia $y=\sqrt{25-x^2}$ se produce en el punto de abscisa $y=3$. Por tanto, podemos escribir:

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^3 dy \int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} x\,dx = \frac{25}{2}\int_0^3 \left[1-\frac{1}{9}y^2\right] dy = \frac{25}{2}\left[y-\frac{1}{27}y^3\right]_0^3 dy = 25.$$

Alternativamente, efectuando un cambio a polares:

$$x=r\cos\theta,\quad z=r\operatorname{sen}\theta;\qquad |J(r,\theta)|=r \qquad \left(0\le\theta\le\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4},\ 0\le r\le 5\right)$$

y apoyándonos en la fórmula

$$\operatorname{sen}^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t},$$

obtenemos:

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^{\operatorname{arc\,tg}(3/4)} \cos\theta\,d\theta \int_0^5 r^2\,dr = \frac{125}{3}\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}\right) = \frac{125}{3}\frac{3}{5} = 25.$$

□

9. Problema 9

Calcular

$$\iint_D (a^2x^2 + b^2y^2)\, dx\, dy,$$

siendo D el recinto encerrado en el primer cuadrante del plano OXY por la elipse de semiejes $1/a$, $1/b$ ($a, b > 0$). ¿Cuánto vale la integral extendida a toda la elipse?

Solución: $\dfrac{\pi}{8ab}$; $\dfrac{\pi}{2ab}$.

RESOLUCIÓN. La zona sombreada de la Figura 9 representa el recinto D con $a = 2$, $b = 3$.

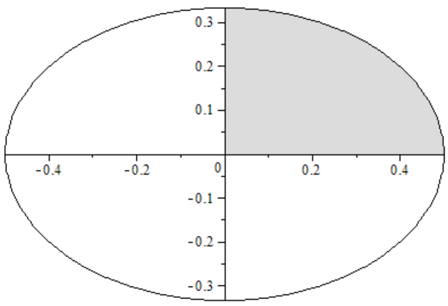

Figura 9.

Para calcular

$$\iint_D (a^2x^2 + b^2y^2)\, dx\, dy$$

efectuamos un cambio de variables a coordenadas polares generalizadas:

$$x = \frac{r}{a}\cos\theta, \quad y = \frac{r}{b}\operatorname{sen}\theta; \qquad |J(r,\theta)| = \frac{r}{ab} \qquad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\, 0 \le r \le 1\right),$$

con lo que

$$\iint_D (a^2x^2 + b^2y^2)\, dx\, dy = \frac{1}{ab}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^3\, dr = \frac{\pi}{8ab}.$$

Como el recinto encerrado por toda la elipse es simétrico respecto a los ejes coordenados y el integrando es par en x e y, la integral extendida a dicho recinto vale

$$4\iint_D (a^2x^2 + b^2y^2)\, dx\, dy = \frac{\pi}{2ab}.$$

$\square$

10. Problema 10

Calcular el área de la región D del primer cuadrante comprendida entre la parábola $y = x^2 + 1$ y las rectas $x = 0$, $x + y = 3$.

Solución: $\dfrac{7}{6}$.

RESOLUCIÓN. La región D se muestra en la Figura 10.

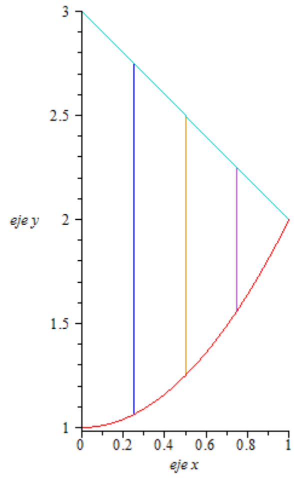

Figura 10.

En el primer cuadrante, la intersección de $y = x^2 + 1$ con $x + y = 3$ se produce en el punto de abscisa $x = 1$. Considerando el recinto como de tipo I, podemos calcular el área de la siguiente manera:

$$\iint_D dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2+1}^{3-x} dy = \int_0^1 (2 - x - x^2)\,dx = \frac{7}{6}.$$

$\square$

11. Problema 11

Calcular el área de la región D del primer cuadrante comprendida entre las curvas $y^2 = 2x$, $2x + y = 20$, $y = 0$.

Solución: $\dfrac{76}{3}$.

RESOLUCIÓN. La región D se muestra en la Figura 11.

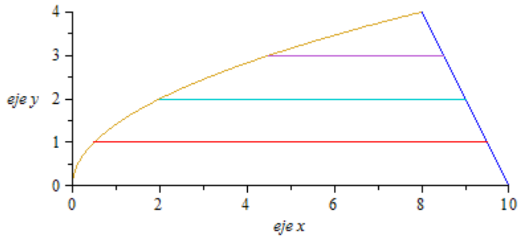

Figura 11.

En el primer cuadrante, la intersección de la parábola $y^2 = 2x$ con la recta $2x + y = 20$ se produce en el punto de ordenada $y = 4$. Considerando el recinto como de tipo II, escribimos:

$$|D| = \iint_D dx\,dy = \int_0^4 dy \int_{y^2/2}^{10-y/2} dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(20 - y - y^2\right)\,dy = \frac{1}{2}\left[20y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^4 = \frac{76}{3}.$$

□

12. Problema 12

Determinar el área de la proyección sobre el plano OXY de la región sólida exterior al cilindro $x^2+y^2=4$, acotada por la semiesfera $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ y el plano $z=0$. ¿Cuál es el volumen de dicha región?

Solución: 12π; $\dfrac{48\pi}{\sqrt{3}}$.

RESOLUCIÓN. Sea R el sólido considerado (Figura 12b). La proyección D de R sobre el plano OXY viene dada por el anillo $4 \le x^2+y^2 \le 16$ (Figura 12a).

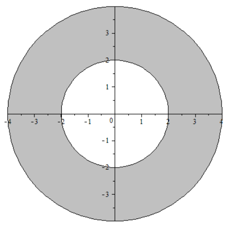

Figura 12a.

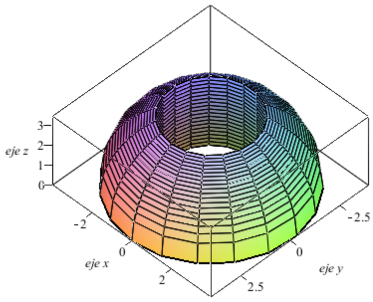

Figura 12b.

Efectuando un cambio a polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, cuyo jacobiano en valor absoluto es $|J(r,\theta)| = r$, D queda descrita por las condiciones $0 \le \theta \le 2\pi$, $2 \le r \le 4$. Por consiguiente, el área de D vale

$$\iint_D dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^4 r\,dr = 12\pi.$$

Para hallar el volumen de R integramos sobre D la «tapa» de R menos su «fondo». La «tapa» está sobre la semiesfera, cuya ecuación en cilíndricas es $z=\sqrt{16-r^2}$, y el «fondo» sobre $z=0$. El volumen de R es entonces

$$\iint_D z\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^4 r\sqrt{16-r^2}\,dr = \left[-\frac{2\pi}{3}(16-r^2)^{3/2}\right]_2^4 = \frac{48\pi}{\sqrt{3}}.$$

□

13. Problema 13

Calcular por integración doble el volumen del sólido limitado por las superficies $z = 4 - y^2$, $y = x$, $x = 2$, $z = 0$.

Solución: $\dfrac{64}{3}$.

RESOLUCIÓN. Si R es el sólido en cuestión (Figura 13b), el volumen pedido V se obtiene como la integral

$$V = \iint_D (4 - y^2)\, dx\, dy,$$

donde D denota la proyección de R sobre el plano $z = 0$. La superficie $z = 4 - y^2$ es un cilindro parabólico que corta a $z = 0$ en las rectas $y = \pm 2$, de modo que D es el triángulo del plano OXY limitado por las rectas $y = -2$, $y = x$ y $x = 2$ (Figura 13a).

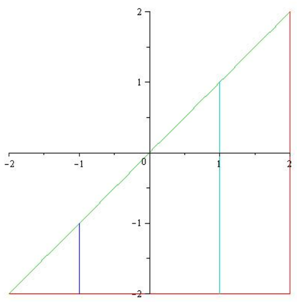

Figura 13a.

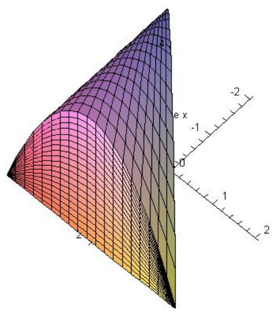

Figura 13b.

La intersección de $y = x$ y $x = 2$ es el punto $(2, 2)$. La intersección de $y = x$ e $y = -2$ se produce en el punto $(-2, -2)$. Finalmente, $x = 2$ e $y = -2$ se intersectan en $(2, -2)$. Por tanto:

$$V = \int_{-2}^{2} dx \int_{-2}^{x} (4 - y^2)\, dy = \int_{-2}^{2} \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{x} dx = \int_{-2}^{2} \left(4x - \frac{x^3}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right) dx = \frac{64}{3}.$$

□

14. Problema 14

Calcular el volumen de la región tridimensional limitada inferiormente por el grafo de la función $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2+y^2}$ y superiormente por el disco $x^2+y^2 \leq 5$, $z = 4$.

Solución: $4\pi\left(5-\sqrt[4]{5}\right)$.

RESOLUCIÓN. La proyección sobre el plano OXY del recinto de integración (Figura 14b) es el disco D de centro el origen de coordenadas y radio $\sqrt{5}$ (Figura 14a).

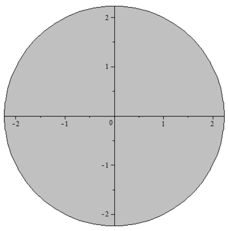

Figura 14a.

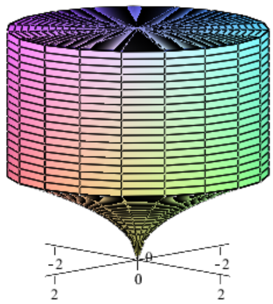

Figura 14b.

Utilizando un argumento «tapa-fondo» y un cambio a coordenadas polares, encontramos que el volumen pedido es

$$V = \iint_D \left(4-\sqrt[4]{x^2+y^2}\right)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{5}} (4-\sqrt{r})r\, dr = \pi\left[2r^2-\frac{2}{5}r^{5/2}\right]_0^{\sqrt{5}} = 4\pi\left(5-\sqrt[4]{5}\right).$$

□

15. Problema 15

(a) Evaluar las integrales

$$I_1 = \iint_{D_1} \sqrt{1-x^2}\,dx\,dy, \qquad I_2 = \iint_{D_2} \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy,$$

donde

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\right\}, \qquad D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\right\}.$$

(b) Utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior para calcular el volumen del sólido situado en el octante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ y dado por la intersección de los tres cilindros $x^2+y^2 \leq 1$, $x^2+z^2 \leq 1$, $y^2+z^2 \leq 1$.

Solución: (a) $I_1 = I_2 = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; (b) $2-\sqrt{2}$.

RESOLUCIÓN.

(a) Los recintos de integración D_1 y D_2 se muestran en las Figuras 15a y 15b, respectivamente.

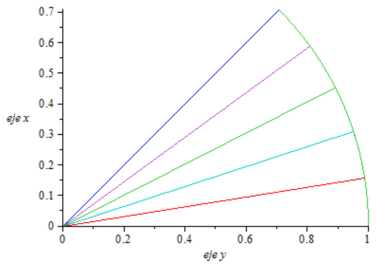

Figura 15a.

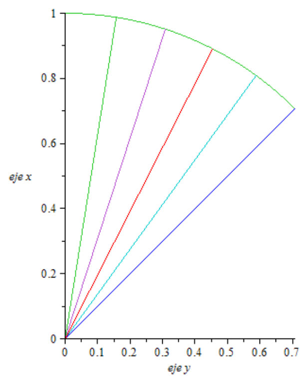

Figura 15b.

Nótese que $I_1 = I_2$, ya que I_2 resulta de intercambiar los papeles de x e y en I_1. Por tanto, es suficiente calcular esta última integral.

El recinto D_1 es la porción del círculo unidad situada en el semiplano superior que queda por debajo de la diagonal del primer cuadrante. Parece, pues, conveniente efectuar un cambio a polares:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta; \qquad |J(r,\theta)| = r \qquad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq r \leq 1\right).$$

Se tiene entonces:

$$
\begin{aligned}
&\iint_{D_1} \sqrt{1-x^2}\,dx\,dy = \\
&= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 r\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}\,dr = \int_0^{\pi/4} \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2\cos^2\theta}\right)\left[\left(1-r^2\cos^2\theta\right)^{3/2}\right]_0^1 d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{(1-\cos^2\theta)^{3/2}-1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{1-\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{1-\operatorname{sen}\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}+\operatorname{sen}\theta\right)d\theta = \frac{1}{3}\left[\operatorname{tg}\theta-\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{1}{3}\left(1-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right) = \frac{1}{3}\left(3-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

Otra posibilidad es efectuar el cálculo directamente en cartesianas, lo cual resulta muy sencillo en este caso si se elige un orden de integración adecuado:

$$
\begin{aligned}
\iint_{D_1} \sqrt{1-x^2}\,dx\,dy &= \int_0^{1/\sqrt{2}} dx \int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dy + \int_{1/\sqrt{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\,dy \\
&= \int_0^{1/\sqrt{2}} x\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{1/\sqrt{2}}^1 (1-x^2)\,dx = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

(b) El sólido cuyo volumen se pide está representado en la Figura 15c.

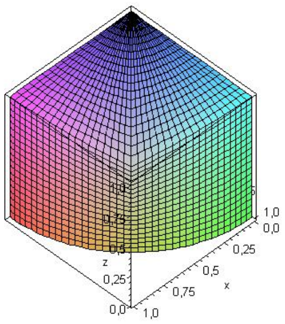

Figura 15c.

Mediante un argumento «tapa-fondo» se constata que el volumen pedido es

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_{D_1} dx\,dy \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz + \iint_{D_2} dx\,dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \\
&= \iint_{D_1} \sqrt{1-x^2}\,dx\,dy + \iint_{D_2} \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy = 2-\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

□