Problemas resueltos

Integración múltiple: integrales triples

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Problema 1 1

2. Problema 2 2

3. Problema 3 3

4. Problema 4 4

5. Problema 5 5

6. Problema 6 7

7. Problema 7 9

8. Problema 8 10

9. Problema 9 11

10. Problema 10 12

11. Problema 11 13

12. Problema 12 14

13. Problema 13 15

14. Problema 14 16

15. Problema 15 17

1. Problema 1

Calcular

$$\iiint_T z\,dx\,dy\,dz,$$

siendo T el dominio del primer octante delimitado por las superficies $y^2+z=1$, $x^2+z=1$.

Solución: $\dfrac{1}{6}$.

RESOLUCIÓN. La intersección de ambas superficies en el primer octante se produce sobre el plano $y=x$. La proyección de T en el plano OXY es el cuadrado unidad. Nótese que T (Figura 1c) queda descrito por las condiciones: $0\le x\le 1$, $0\le y\le x$, $0\le z\le 1-x^2$ (Figura 1a) y $0\le x\le 1$, $x\le y\le 1$, $0\le z\le 1-y^2$ (Figura 1b).

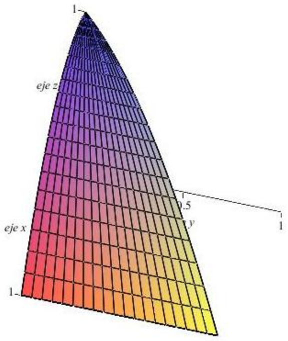

Figura 1a.

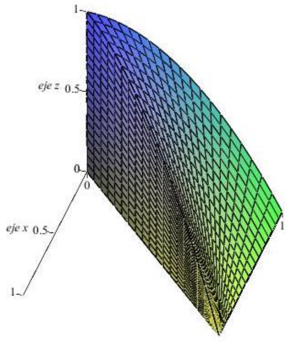

Figura 1b.

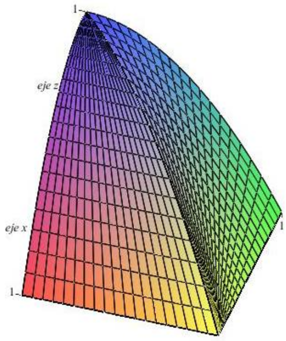

Figura 1c.

Ahora bien:

$$\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{1-x^2} z\,dz=\frac{1}{2}\int_0^1 (x-2x^3+x^5)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{12},$$

$$\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_0^{1-y^2} z\,dz=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{8}{15}-x+\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{8x}{15}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^6}{30}\right]_0^1=\frac{1}{12}.$$

Consecuentemente,

$$\iiint_T z\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{1-x^2} z\,dz+\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_0^{1-y^2} z\,dz=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

□

2. Problema 2

Efectuando el cambio de variables

$$u = \frac{z}{x^2+y^2}, \quad v = xy, \quad w = \frac{y}{x},$$

calcular la integral triple de la función $f(x,y,z) = xyz$ sobre la región Ω del primer octante limitada por los paraboloides $z = x^2+y^2$, $z = 2x^2+2y^2$, los cilindros $xy = 1$, $xy = 4$, y los planos $y = x$, $y = 5x$.

Solución: $\frac{765}{8}\left(\frac{156}{25}+\ln 5\right)$.

RESOLUCIÓN. El cambio de variables transforma el recinto de integración original (Figura 2) en el recinto determinado por las condiciones $1 \le u \le 2$, $1 \le v \le 4$, $1 \le w \le 5$.

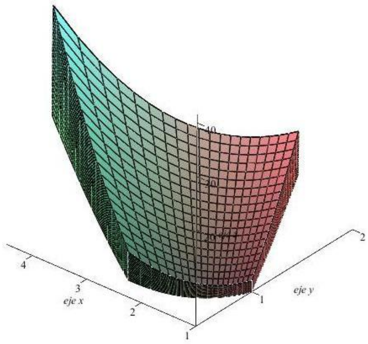

Figura 2.

Las ecuaciones de la transformación inversa y el correspondiente jacobiano en valor absoluto son, respectivamente:

$$x = \sqrt{\frac{v}{w}}, \quad y = \sqrt{vw}, \quad z = uv\left(w+\frac{1}{w}\right); \qquad |J(u,v,w)| = \frac{v}{2}\left(1+\frac{1}{w^2}\right).$$

Ahora,

$$\iiint_\Omega xyz\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_1^2 u\,du \int_1^4 v^3\,dv \int_1^5 \left(w+\frac{2}{w}+\frac{1}{w^3}\right)\,dw = \frac{765}{8}\left(\frac{156}{25}+\ln 5\right).$$

□

3. Problema 3

Calcular

$$\iiint_V z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

siendo V el volumen exterior a la hoja superior del cono $z^2 = x^2+y^2$ e interior al cilindro $x^2+y^2=1$, con $z \geq 0$.

Solución: $\dfrac{\pi}{3}$.

RESOLUCIÓN. El recinto de integración se muestra en la Figura 3.

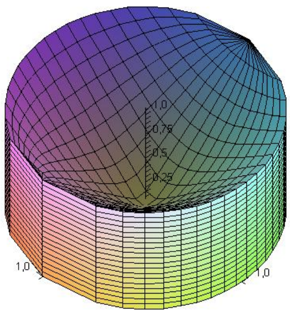

Figura 3.

Efectuamos un cambio a coordenadas cilíndricas, utilizando un argumento «tapa-fondo» y teniendo en cuenta que la ecuación del semicono superior en las nuevas coordenadas es $z=r$:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z; \qquad |J(r,\theta,z)| = r \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq z \leq r).$$

Obtenemos así:

$$\iiint_V z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\cdot r^2\,dr \int_0^r z\,dz = \pi\int_0^1 r^5\,dr = \pi\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

$\square$

4. Problema 4

Hallar

$$\iiint_D \sqrt{|y|}\,dx\,dy\,dz,$$

si $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 2x,\ 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

Solución: $\dfrac{4\pi}{7}$.

RESOLUCIÓN. El sólido D es la región interior al cilindro circular $x^2+y^2=2x$ que queda por debajo del semicono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y por encima del plano $z=0$. Como el integrando es par en y y D es simétrico respecto a $y=0$, podemos calcular la integral duplicando la correspondiente a la porción D^* de D situada en el primer octante (Figura 4).

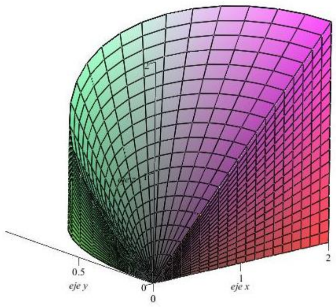

Figura 4.

Para hallar ésta efectuamos un cambio a cilíndricas. En D^*, $0 \le \theta \le \pi/2$. Fijado θ, el máximo valor de r se alcanza sobre el cilindro $x^2+y^2=2x$, ecuación que expresada en cilíndricas conduce a la condición $0 \le r \le 2\cos\theta$. Por último, fijados θ y r, es claro que la variación de z está limitada inferiormente por el plano $z=0$ y superiormente por el semicono $z=r$. Así pues, se tiene:

$$\begin{aligned}
\iiint_D \sqrt{|y|}\,dx\,dy\,dz &= 2\iiint_{D^*} y^{1/2}\,dx\,dy\,dz = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{1/2}\theta\,d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^{3/2}\,dr \int_0^r dz \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{1/2}\theta\,d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^{5/2}\,dr = \frac{2^{11/2}}{7}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{1/2}\theta\,\cos^{7/2}\theta\,d\theta \\
&= \frac{2^{9/2}}{7} B\left(\frac{3}{4},\frac{9}{4}\right) = \frac{2^{9/2}}{7}\frac{\Gamma(3/4)\,\Gamma(9/4)}{\Gamma(3)} = \frac{2^{7/2}}{7}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(2+\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{2^{3/2}}{7}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2^{3/2}\pi}{7\,\operatorname{sen}(\pi/4)} = \frac{4\pi}{7}.
\end{aligned}$$

□

5. Problema 5

Calcular

$$\iiint_T y^2 \, dx \, dy \, dz,$$

siendo T el tronco de cono de vértice en el origen y base en el plano $z = 4$, delimitada por la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Solución: π.

RESOLUCIÓN. Para obtener la ecuación del cono (Figura 5) nos auxiliaremos de coordenadas cilíndricas.

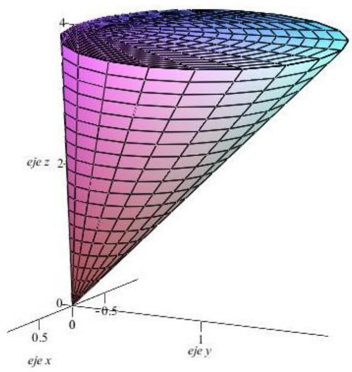

Figura 5.

Sea (x_0, y_0, z_0) un punto de la base del cono; se tiene que $x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 = 0$, $z_0 = 4$. Si $x_0 = r\cos\theta$, $y_0 = r \operatorname{sen}\theta$ entonces $r = 2\operatorname{sen}\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$, así que $x_0 = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, $y_0 = 2\operatorname{sen}^2\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$.

La ecuación de la recta que une el punto (x_0, y_0, z_0) con el origen de coordenadas es de la forma $x = \lambda x_0$, $y = \lambda y_0$, $z = \lambda z_0$, donde λ es un parámetro. Sustituyendo aquí las condiciones anteriores encontramos que

$$x = 2\lambda \operatorname{sen}\theta\cos\theta, \quad y = 2\lambda \operatorname{sen}^2\theta, \quad z = 4\lambda \qquad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

Tomando z como parámetro: $\lambda = z/4$, obtenemos finalmente la ecuación paramétrica del cono:

$$x = \frac{z}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \quad y = \frac{z}{2}\operatorname{sen}^2\theta, \quad z = z \qquad (0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq z \leq 4).$$

De aquí se obtienen fácilmente las correspondientes ecuaciones en cartesianas: $2(x^2 + y^2) = yz$, y en cilíndricas: $2r = z\operatorname{sen}\theta$.

Quedamos ya en disposición de obtener la integral pedida:

$$\begin{aligned}\iiint_T y^2\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta \int_0^4 dz \int_0^{z\operatorname{sen}\theta/2} r^3\,dr = \frac{16}{5}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^6\theta\,d\theta \\ &= \frac{2\cdot 16}{5}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^6\theta\,d\theta = \frac{16}{5}B\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{16}{5}\frac{\Gamma(7/2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(4)} = \frac{16}{5}\frac{5\cdot 3\cdot \pi}{3\cdot 2^4} \\ &= \pi.\end{aligned}$$

□

6. Problema 6

Hallar el volumen del sólido determinado por las condiciones:

$$x^2+y^2+z^2-R^2 \le 0, \qquad x^2+y^2-4a(z+a) \ge 0 \qquad (R>a>0).$$

Solución: $2\pi\left(\dfrac{a^3}{3}-aR^2+\dfrac{2R^3}{3}\right)$.

RESOLUCIÓN. Se trata de calcular el volumen interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ y exterior al paraboloide circular $x^2+y^2=4a(z+a)$, con $R>a>0$ (Figura 6c).

Las ecuaciones de estas superficies en coordenadas cilíndricas son, respectivamente, $r^2+z^2=R^2$ y $r^2=4a(z+a)$. Igualando ambas resulta una ecuación de segundo grado en z: $z^2+4az+4a^2-R^2=0$, cuyas soluciones son: $z=-R-2a<0$ (que descartamos por razones geométricas), y $z=R-2a>-a$.

Ahora, para $0\le\theta\le 2\pi$ tenemos:

- si $-R\le z\le -a$, entonces $0\le r\le\sqrt{R^2-z^2}$ (Figura 6a);
- si $-a\le z\le R-2a$, entonces $2\sqrt{a(z+a)}\le r\le\sqrt{R^2-z^2}$ (Figura 6b).

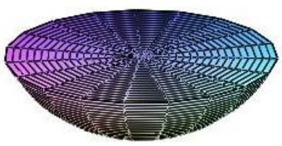

Figura 6a.

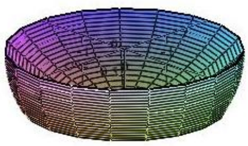

Figura 6b.

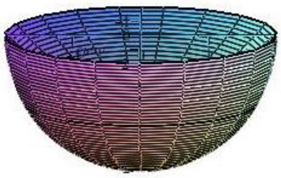

Figura 6c.

Para esta representación se ha tomado $R=2$, $a=1$.

Calculamos cada integral por separado:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-R}^{-a} dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r\,dr = \pi\int_{-R}^{-a}(R^2-z^2)\,dz = \pi\left(\frac{a^3}{3}-aR^2+\frac{2R^3}{3}\right),$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-a}^{R-2a} dz \int_{2\sqrt{a(z+a)}}^{\sqrt{R^2-z^2}} r\,dr = \pi \int_{-a}^{R-2a} \left[(R^2 - z^2 - 4a(z+a)\right]\, dz = \pi \left(\frac{a^3}{3} - aR^2 + \frac{2R^3}{3} \right).$$

Se concluye que el volumen pedido es

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-R}^{-a} dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r\,dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-a}^{R-2a} dz \int_{2\sqrt{a(z+a)}}^{\sqrt{R^2-z^2}} r\,dr = 2\pi \left(\frac{a^3}{3} - aR^2 + \frac{2R^3}{3} \right).$$

□

7. Problema 7

Hallar

$$\iiint_D xyz\,dx\,dy\,dz,$$

siendo D el primer octante de la bola unidad cerrada en $\mathbb{R}^3$.

Solución: $\dfrac{1}{48}$.

RESOLUCIÓN. El recinto de integración se representa en la Figura 7.

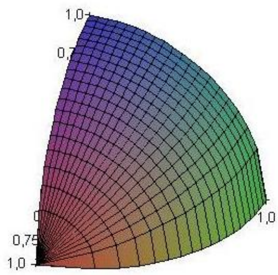

Figura 7.

Efectuamos un cambio a coordenadas esféricas: $x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$, $z = \rho\cos\varphi$, $|J(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2\operatorname{sen}\varphi$ $(0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \varphi \le \pi/2,\ 0 \le \rho \le 1)$.

Entonces:

$$\begin{aligned}\iiint_D xyz\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int_0^1 \rho^5\,d\rho \\ &= \frac{1}{48}\left[\operatorname{sen}^2\theta\right]_0^{\pi/2}\left[\operatorname{sen}^4\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{48}.\end{aligned}$$

□

8. Problema 8

Calcular la integral triple

$$\iiint_V (4x^2 + 9y^2 + 36z^2)\, dx\, dy\, dz,$$

siendo V el interior del elipsoide $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$.

Solución: $\dfrac{864\pi}{5}$.

RESOLUCIÓN. Dividiendo ambos miembros de la ecuación del elipsoide por 36 encontramos que éste tiene semiejes 3, 2 y 1 (Figura 8).

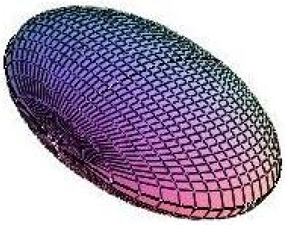

Figura 8.

Efectuamos el siguiente cambio a coordenadas esféricas generalizadas: $x = 3\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $y = 2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $z = \rho\cos\varphi$, $|J(\rho,\theta,\varphi)| = 6\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$ $(0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \rho \le 1)$. Entonces:

$$\iiint_V (4x^2 + 9y^2 + 36z^2)\, dx\, dy\, dz \quad = \quad 6\cdot 36\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \mathrm{sen}\,\varphi\, d\varphi \int_0^1 \rho^4\, d\rho = \frac{864\pi}{5}.$$

$\square$

9. Problema 9

Determinar el volumen comprendido entre los planos coordenados y los cilindros $4x^2+9y^2=36$, $4z^2+9y^2=36$.

Solución: 12.

RESOLUCIÓN. Se trata de calcular el volumen de un octante del sólido determinado por ambos cilindros. Por simetría, basta calcular el volumen V correspondiente al primer octante (Figura 9).

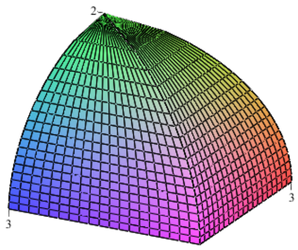

Figura 9.

Ahora podemos proceder de dos maneras:

- Usando un argumento «tapa-fondo» y denotando por R el primer cuadrante de la elipse $4x^2+9y^2=36$ encontramos que

$$\begin{aligned} V &= \frac{3}{2}\iint_R \sqrt{4-y^2}\,dx\,dy = \frac{3}{2}\int_0^2 \sqrt{4-y^2}\,dy\int_0^{3\sqrt{4-y^2}/2} dx \\ &= \frac{9}{4}\int_0^2 (4-y^2)\,dy = \frac{9}{4}\left[4y-\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{9}{2}\left[4-\frac{4}{3}\right] = 12. \end{aligned}$$

- Los dos cilindros se intersecan en $z=x$. Nuevamente por simetría, el volumen pedido es el doble del correspondiente al recinto que tiene al plano $z=x$ por «tapa» y a R por «fondo». Para calcularlo efectuamos un cambio a cilíndricas generalizadas: $x=3r\cos\theta$, $y=2r\operatorname{sen}\theta$, $z=z$, $|J(r,\theta,z)|=6r$ ($0\le\theta\le\pi/2$, $0\le r\le 1$, $0\le z\le 3r\cos\theta$). Entonces:

$$V = 2\iint_R x\,dx\,dy = 36\int_0^{\pi/2}\cos\theta\int_0^1 r^2\,dr = \frac{36}{3} = 12.$$

□

10. Problema 10

Hallar en coordenadas cilíndricas el volumen interior a $r^2 = 16$ que está sobre $z = 0$ y bajo $2z = y$.

Solución: $\frac{64}{3}$.

RESOLUCIÓN. Aplicamos un argumento «tapa-fondo», donde la «tapa» es el plano $2z = y$ y el «fondo» el disco de centro el origen y radio 4 en el plano OXY, con $y \geq 0$ (Figura 10).

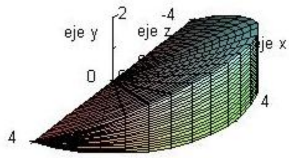

Figura 10.

Efectuando un cambio de variable a cilíndricas:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z; \qquad |J(r,\theta,z)| = r \qquad \left(0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq r \leq 4,\ 0 \leq z \leq \frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{2}\right),$$

el volumen V buscado resulta ser:

$$V = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^4 r\,dr \int_0^{(r\,\mathrm{sen}\,\theta)/2} dz = \frac{64}{3}.$$

□

11. Problema 11

Calcular el volumen del sólido $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le x^2+y^2,\ x \le x^2+y^2 \le 2x\right\}$.

Solución: $\dfrac{45}{32}\pi$.

RESOLUCIÓN. Se trata de calcular el volumen V exterior al cilindro circular cuya traza en el plano OXY es la circunferencia de centro $(1/2,0)$ y radio $1/2$, que es interior al cilindro circular cuya sección por el plano OXY es la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 1, y que está limitado inferiormente por dicho plano y superiormente por el paraboloide circular $z = x^2+y^2$.

El volumen V es igual a la integral triple, extendida a M, de la función idénticamente 1. Ahora bien, la simetría de M respecto al plano $y=0$ junto con la paridad en y del integrando permite obtener V considerando solamente la porción de M que está en el primer octante y multiplicando el resultado por 2 (Figura 11).

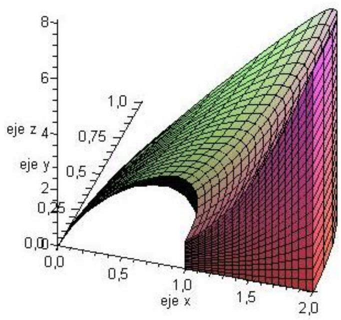

Figura 11.

Por otra parte, es evidente que para el cálculo de este semivolumen podemos utilizar un argumento «tapa-fondo» y efectuar un cambio de variables a coordenadas cilíndricas a fin de resolver la integral doble resultante.

Más precisamente, denotemos por V el volumen de M y por D la parte de la proyección de M sobre el plano OXY situada en el primer octante. Se tiene:

$$\begin{aligned} V &= 2\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} r^3\,dr \\ &= \frac{15}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{15}{4}B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(5/2)}{\Gamma(3)} = \frac{15}{4}\frac{3\pi}{8} = \frac{45}{32}\pi. \end{aligned}$$

□

12. Problema 12

Calcular el volumen de la región limitada por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 5 - y^2$.

Solución: $\dfrac{25\pi\sqrt{2}}{4}$.

RESOLUCIÓN. La proyección en el plano OXY de la intersección del paraboloide circular $z = x^2 + y^2$ con el cilindro parabólico $z = 5 - y^2$ es la elipse $x^2 + 2y^2 = 5$, de semiejes $\sqrt{5}$ y $\sqrt{5/2}$. Para calcular el volumen del sólido determinado por ambas superficies (Figura 12) es suficiente integrar sobre el interior de esta elipse la diferencia entre la «tapa» (cilindro) y el «fondo» (paraboloide) del sólido, dada por la función $f(x,y) = 5 - x^2 - 2y^2$.

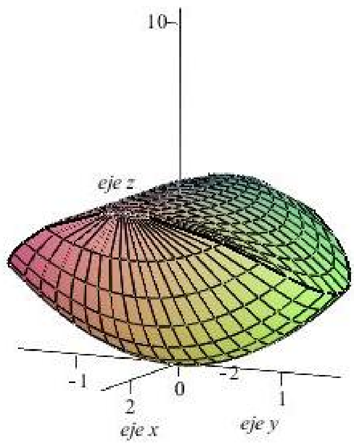

Figura 12.

A tal fin, efectuamos un cambio a cilíndricas generalizadas: $x = \sqrt{5} r\cos\theta$, $y = \sqrt{5/2} r \operatorname{sen}\theta$, $z = z$, $|J(r,\theta,z)| = 5r/\sqrt{2}$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$. De este modo, $z(r,\theta) = f(x(r,\theta), y(r,\theta)) = 5(1 - r^2)$, y si V denota el volumen pedido encontramos que

$$\frac{\sqrt{2}}{5} V = 5 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r(1 - r^2)\, dr = 10\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2}\pi.$$

De aquí resulta, finalmente:

$$V = \frac{25\pi\sqrt{2}}{4}.$$

□

13. Problema 13

Calcular el volumen del sólido S interior al cilindro $x^2+y^2=2ax$, que está comprendido entre el plano $z=0$ y la parte superior del cono $x^2+y^2=z^2$.

Solución: $\dfrac{32a^3}{9}$.

RESOLUCIÓN. La proyección del cilindro sobre el plano OXY es la circunferencia $(x-a)^2+y^2=a^2$, de centro $(a,0)$ y radio a.

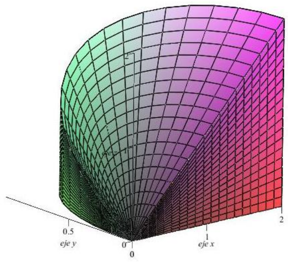

Figura 13. Para esta representación se ha tomado $a=1$.

Efectuamos un cambio a coordenadas cilíndricas y usamos la simetría del recinto respecto al plano $y=0$ junto con la paridad del integrando para obtener el volumen pedido (Figura 13), que viene dado por la integral

$$V=\iiint_S dx\,dy\,dz = 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r\,dr \int_0^r dz = \frac{16a^3}{3}\left[\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{32a^3}{9}.$$

$\square$

14. Problema 14

Hallar el valor de $a > 0$ para que el volumen encerrado por $z = a(x^2 + y^2)$ y $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$, con $z \geq 0$, sea igual a π.

Solución: 6.

RESOLUCIÓN. En coordenadas cilíndricas, las ecuaciones del paraboloide $z = a(x^2 + y^2)$ y del cono $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ con $z \geq 0$ son, respectivamente, $z = ar^2$ y $z = ar$. La intersección de ambas superficies se produce en $r = 0$, $z = 0$ (el origen de coordenadas) y en $r = 1$, $z = a$ (circunferencia de centro 0 y radio 1, situada en un plano de altura a).

Para el cálculo del volumen pedido V (Figura 14) emplearemos un argumento «tapa-fondo», integrando sobre la proyección de esta circunferencia en el plano OXY la «tapa» del sólido, que está sobre el cono: $z = ar$, menos su «fondo», situado sobre el paraboloide: $z = ar^2$.

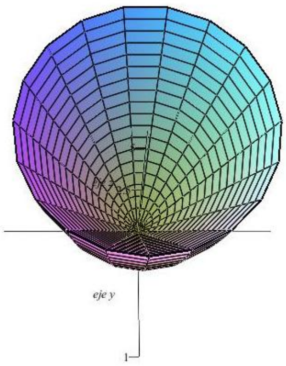

Figura 14.

Esto es:

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\,dr \int_{ar^2}^{ar} dz = 2\pi a \int_0^1 r(r - r^2)\,dr = 2\pi a \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{6}\,a.$$

Consecuentemente, para que $V = \pi$ debemos tener $a = 6$.

□

15. Problema 15

Determinar el volumen del sólido encerrado por el cono $x^2+y^2=4z^2$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=5$, con $z\geq 0$.

Solución: $\dfrac{10\pi}{3}\left(\sqrt{5}-1\right)$.

RESOLUCIÓN. El recinto de integración, M, se muestra en la Figura 15. Resolveremos el ejercicio mediante sendos cambios de coordenadas: primero a cilíndricas y luego a esféricas, obteniendo, naturalmente, el mismo resultado.

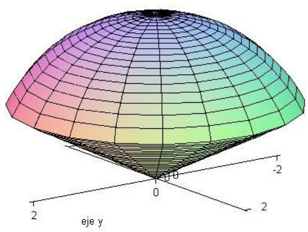

Figura 15.

- Efectuamos un cambio a coordenadas cilíndricas, utilizando un argumento «tapa-fondo». La ecuación del semicono superior en las nuevas coordenadas es $z=r/2$, mientras que la de la esfera es $z=\sqrt{5-r^2}$. Por otra parte, la intersección de ambas superficies se produce en $r=2$. En consecuencia, las ecuaciones y el jacobiano del cambio y la variación de las nuevas variables son:

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\operatorname{sen}\theta,\quad z=z;\qquad |J(r,\theta,z)|=r\qquad \left(0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq r\leq 2,\ \frac{r}{2}\leq z\leq\sqrt{5-r^2}\right).$$

  El volumen que se busca vendrá dado entonces por

$$\begin{aligned} V &= \iiint_M dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r\,dr\int_{r/2}^{\sqrt{5-r^2}}dz=2\pi\int_0^2\left(r\sqrt{5-r^2}-\frac{r^2}{2}\right)dr\\ &= -\frac{2\pi}{3}\left[\left(5-r^2\right)^{3/2}\right]_0^2-\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2=\frac{10\pi}{3}\left(\sqrt{5}-1\right). \end{aligned}$$

- En coordenadas esféricas (ρ,θ,φ), la ecuación del semicono superior es $\operatorname{tg}\varphi=2$ y la de la esfera, $\rho=\sqrt{5}$. Por tanto, el cambio a aplicar es

$$x=\rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi,\quad y=\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\quad z=\rho\cos\varphi;$$

$$|J(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \qquad (0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \operatorname{arc\,tg} 2,\ 0 \le \rho \le \sqrt{5}),$$

y la integral que da el volumen pedido es

$$V = \iiint_M dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\operatorname{arc\,tg} 2} \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi \int_0^{\sqrt{5}} \rho^2\,d\rho = \frac{10}{3}\pi\sqrt{5}\,[1-\cos(\operatorname{arc\,tg} 2)]\,.$$

Teniendo en cuenta que

$$\cos\varphi = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$$

y que $0 \le \varphi \le \pi/2$ implica $\cos\varphi \ge 0$, se concluye que

$$V = \frac{10}{3}\pi\sqrt{5}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{10}{3}\pi\left(\sqrt{5}-1\right).$$

□