

Integrales impropias y paramétricas

ISABEL MARRERO

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

imarrero@ull.es

OCW-ULL 2011/12: Cálculo Integral Vectorial

Instrucciones

A continuación se muestra una relación de problemas resueltos sobre integrales impropias y paramétricas.

- Selecciona un enunciado en el menú de la derecha e intenta resolver el problema por tus propios medios.
- Pulsa en **Resolución.** para ver una forma de resolver el problema.
- Pulsa en ► para continuar viendo la resolución del problema.
- Pulsa en ■ para regresar al enunciado del mismo problema, o usa el menú para seleccionar otro diferente.
- Pulsa dos veces sobre el botón Volver del menú para regresar a la última página vista.
- Pulsa sobre la imagen que acompaña a la resolución de un problema para ampliarla o reducirla.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 1

Estudiar la convergencia y, en su caso, calcular la integral

$$\iint_D \frac{dx \, dy}{xy},$$

siendo D el recinto delimitado por $y = x^2$ e $y = x$.

Solución: ∞ .

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 1

Estudiar la convergencia y, en su caso, calcular la integral

$$\iint_D \frac{dx dy}{xy},$$

siendo D el recinto delimitado por $y = x^2$ e $y = x$.

Solución: ∞ .

Resolución. Se trata de una integral impropia porque el integrando $f(x,y) = 1/xy$ deja de estar acotado cerca del origen de coordenadas.

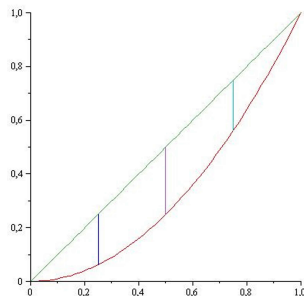


Figura 1. Recinto D .

Como f tiene signo constante en D , la integral impropia existe (aunque puede ser convergente o divergente), y se calcula como el límite de las integrales de f tomadas sobre cualquier sucesión básica $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ para la integración de f en D .



Elegimos

$$D_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x \right\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Entonces

$$\iint_{D_n} \frac{dx \, dy}{xy} = \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x} \int_{x^2}^x \frac{dy}{y} = - \int_{1/n}^1 \frac{1}{x} \ln x \, dx = \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

de manera que

$$\iint_D \frac{dx \, dy}{xy} = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{dx \, dy}{xy} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{n} = \infty.$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 2

Se considera la integral impropia de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x-y}}$$

sobre el conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 < y < x\}$. Justificar que dicha integral existe y calcularla.

Solución: $\frac{4}{3}$.

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 2

Se considera la integral impropia de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x-y}}$$

sobre el conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 < y < x\}$. Justificar que dicha integral existe y calcularla.

Solución: $\frac{4}{3}$.

Resolución. La integral es impropia porque el integrando deja de estar acotado en un entorno de $x = y$, y existe porque dicho integrando tiene signo constante, de modo que podemos calcularla utilizando cualquier sucesión básica $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ para la integración de f en D .

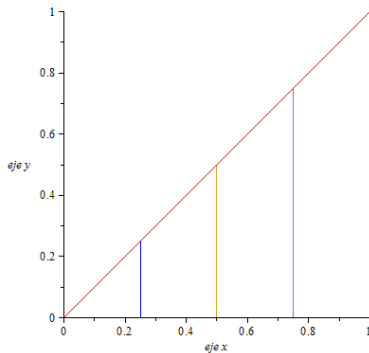


Figura 2. Recinto D .

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Consideramos

$$D_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} \leq x - y \leq 1, y \geq 0 \right\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x-y}} dx dy &= \\ &= \int_0^{(n-1)/n} dy \int_{y+1/n}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-y}} = 2 \int_0^{(n-1)/n} \left(\sqrt{1-y} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) dy = -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{n^3}} - 1 \right) - \frac{2(n-1)}{n\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

y

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x-y}} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x-y}} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{4}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{n^3}} - 1 \right) - \frac{2(n-1)}{n\sqrt{n}} \right] = \frac{4}{3}.$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 3

Estudiar la convergencia y, en su caso, calcular la integral

$$\iint_D \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

siendo D el círculo $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$.

Solución: 4.

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 3

Estudiar la convergencia y, en su caso, calcular la integral

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

siendo D el círculo $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$.

Solución: 4.

Resolución. El recinto de integración D es el círculo de centro $(1,0)$ y radio 1. La integral es impropia porque el integrando no está acotado cerca del origen.

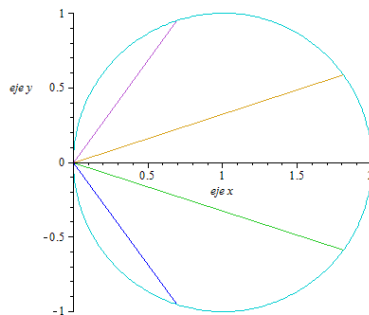


Figura 3. Recinto D .

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Como este integrando tiene signo constante, la integral existe y para calcularla podemos tomar cualquier sucesión básica $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$. Consideramos

$$D_n = \left\{ (x, y) \in D : \frac{1}{n} \leq x \leq 2 \right\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Aprovechando la simetría del recinto y la paridad del integrando y efectuando un cambio de variable a polares encontramos que

$$\iint_{D_n} \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{(1/n)\cos\theta}^{2\cos\theta} dr = 2 \left(2 - \frac{1}{n} \right) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Por tanto,

$$\iint_D \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(2 - \frac{1}{n} \right) = 4.$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 4

Estudiar la convergencia de la integral

$$\iint_D \frac{dx dy}{x+y},$$

siendo D el recinto definido por las condiciones $x \geq 1$ y $0 \leq y \leq 1/x$, y calcularla, en su caso.

Solución: $\frac{\pi}{2} - \ln 2$.

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 4

Estudiar la convergencia de la integral

$$\iint_D \frac{dx dy}{x+y},$$

siendo D el recinto definido por las condiciones $x \geq 1$ y $0 \leq y \leq 1/x$, y calcularla, en su caso.

Solución: $\frac{\pi}{2} - \ln 2$.

Resolución. La integral es impropia porque el recinto de integración es no acotado.

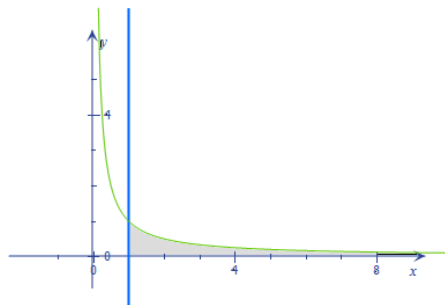


Figura 4. Recinto D .

Como el integrando tiene signo constante en D , la integral existe y para calcularla podemos tomar cualquier sucesión básica $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$. Consideramos

$$D_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\iint_{D_n} \frac{dx dy}{x+y} &= \int_1^n dx \int_0^{1/x} \frac{dy}{x+y} = \int_1^n \ln(x+y) \Big|_0^{1/x} dx \\&= \int_1^n \left[\ln \left(x + \frac{1}{x} \right) - \ln x \right] dx = \int_1^n \ln(x^2 + 1) dx - 2 \int_1^n \ln x dx \\&= \left[x \ln(x^2 + 1) + 2 \operatorname{arctg} x - 2x \ln x \right]_1^n \\&= n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) + 2 \operatorname{arctg} n - \frac{\pi}{2} - \ln 2 \quad (n \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\iiint_D \frac{dx dy}{x+y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{dx dy}{x+y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) + 2 \operatorname{arctg} n - \frac{\pi}{2} - \ln 2 \right] = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 5

Estudiar la convergencia y, en su caso, calcular el valor de la integral

$$\iint_D x e^{-xy} dx dy,$$

siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 1\}$.

Solución: e^{-1} .

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 5

Estudiar la convergencia y, en su caso, calcular el valor de la integral

$$\iint_D x e^{-xy} dx dy,$$

siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 1\}$.

Solución: e^{-1} .

Resolución. Se trata de una integral impropia, ya que el recinto de integración D es no acotado.

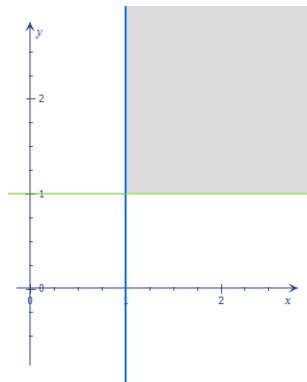


Figura 5. Recinto D .

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Como el integrando es no negativo, la integral existe, aunque puede ser convergente o divergente, y se calcula como el límite de las integrales de $f(x, y) = xe^{-xy}$ sobre cualquier sucesión básica $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ para la integración de f en D .

Consideramos entonces la siguiente sucesión básica, que crece hasta llenar D :

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} xe^{-xy} dx dy &= \int_1^n dx \int_1^n xe^{-xy} dy = \int_1^n [-e^{-xy}]_{y=1}^{y=n} dx \\ &= \int_1^n (e^{-x} - e^{-nx}) dx = \left[\frac{1}{n} e^{-nx} - e^{-x} \right]_1^n = \frac{1}{n} e^{-n^2} - e^{-n} - \frac{1}{n} e^{-n} + e^{-1}. \end{aligned}$$

Concluimos:

$$\iint_D xe^{-xy} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} xe^{-xy} dx dy = e^{-1}.$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 6

Estudiar la convergencia y, en su caso, calcular la integral

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2 - 2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} dx dy,$$

siendo D el conjunto de los puntos (x,y) del plano tales que $x^2 + y^2 \geq 2$ y $x \leq 1$.

Solución: $\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{8}{9\sqrt{2}} - \frac{10}{9}.$

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 6

Estudiar la convergencia y, en su caso, calcular la integral

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2 - 2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} dx dy,$$

siendo D el conjunto de los puntos (x,y) del plano tales que $x^2 + y^2 \geq 2$ y $x \leq 1$.

Solución: $\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{8}{9\sqrt{2}} - \frac{10}{9}.$

Resolución. La integral es impropia porque D es no acotado. Como el integrando tiene signo constante dicha integral existe y puede calcularse tomando cualquier sucesión básica $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$.

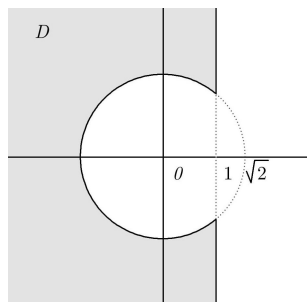


Figura 6. Recinto D .

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Consideramos $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq n^2, x \leq 1\}$ ($n \in \mathbb{N}$) y calculamos la integral sobre cada uno de estos conjuntos aplicando un argumento de simetría y paridad y un cambio a polares, con lo que resulta:

$$\begin{aligned}
 \iint_{D_n} \frac{x^2 + y^2 - 2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} dx dy &= \\
 &= 2 \int_{\pi/4}^{\arccos(1/n)} d\theta \int_{\sqrt{2}}^{1/\cos\theta} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^4} \right) dr + 2 \int_{\arccos(1/n)}^{\pi} d\theta \int_{\sqrt{2}}^n \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^4} \right) dr \\
 &= 2 \int_{\pi/4}^{\arccos(1/n)} \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \cos\theta + \frac{2}{3} \cos^3\theta \right) d\theta + 2 \int_{\arccos(1/n)}^{\pi} \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{n} + \frac{2}{3n^3} \right) d\theta \\
 &= \frac{4}{3\sqrt{2}} \frac{3\pi}{4} - \left(2 - \frac{4}{3} \right) (1 - \cos^2\theta)^{1/2} \Big|_{\pi/4}^{\arccos(1/n)} - \frac{4}{9} (1 - \cos^2\theta)^{3/2} \Big|_{\pi/4}^{\arccos(1/n)} \\
 &\quad + 2 \left(\pi - \arccos \frac{1}{n} \right) \left(\frac{2}{3n^3} - \frac{1}{n} \right) \\
 &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] - \frac{4}{9} \left[\left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{3/2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right] \\
 &\quad + 2 \left(\pi - \arccos \frac{1}{n} \right) \left(\frac{2}{3n^3} - \frac{1}{n} \right) \quad (n \in \mathbb{N}).
 \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2 - 2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{x^2 + y^2 - 2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} dx dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{8}{9\sqrt{2}} - \frac{10}{9}.$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 7

Estudiar la convergencia y, en su caso, calcular la integral

$$\iint_D \frac{dx dy}{x-y},$$

siendo D el recinto determinado por las condiciones $0 \leq x \leq 1$ y $xy > 1$.

Solución: $-\infty$.

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 7

Estudiar la convergencia y, en su caso, calcular la integral

$$\iint_D \frac{dx dy}{x-y},$$

siendo D el recinto determinado por las condiciones $0 \leq x \leq 1$ y $xy > 1$.

Solución: $-\infty$.

Resolución. Se trata de una integral impropia porque tanto el recinto de integración como el integrando (cerca de $(1,1)$) son no acotados.

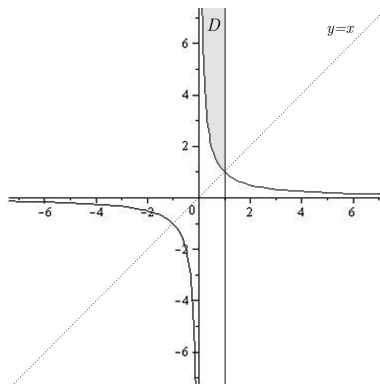


Figura 7. Recinto D .

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Como el integrando tiene signo constante (negativo, ya que, en D , es $y > x$), la integral existe y puede calcularse utilizando cualquier sucesión básica $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ para la integración de

$$f(x, y) = \frac{1}{x - y}$$

en D . Eligiendo

$$D_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + \frac{1}{n} \leq y \leq n, 1/y \leq x \leq 1 \right\}$$

encontramos que

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{D_n} \frac{dx dy}{x - y} = \int_{(n+1)/n}^n dy \int_{1/y}^1 \frac{dx}{x - y} = \int_{(n+1)/n}^n \left[\ln(y - 1) - \ln\left(y - \frac{1}{y}\right) \right] dy \\ &= \int_{(n+1)/n}^n [\ln y - \ln(1 + y)] dy \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Como

$$\int \ln t dt = t \ln t - t + C,$$

sigue que

$$\begin{aligned} I_n &= [y \ln y - y - (1 + y) \ln(1 + y) + (1 + y)]_{(n+1)/n}^n = \left[\ln \left[\left(\frac{y}{1 + y} \right)^y \frac{1}{1 + y} \right] + 1 \right]_{(n+1)/n}^n \\ &= \ln \left[\left(\frac{n}{1 + n} \right)^n \frac{1}{1 + n} \right] - \ln \left[\left(\frac{n + 1}{2n + 1} \right)^{(n+1)/n} \frac{n}{2n + 1} \right] \quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver



con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\left(\frac{n}{1+n} \right)^n \frac{1}{1+n} \right] = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^{(n+1)/n} \frac{n}{2n+1} \right] = -2 \ln 2.$$

Por tanto,

$$\iint_D \frac{dx \, dy}{x-y} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = -\infty.$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 8

Calcular

$$I = \iint_D \frac{e^{-(x+y)}}{x+y} dx dy,$$

siendo D el primer cuadrante del plano OXY .

Solución: 1.

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 8

Calcular

$$I = \iint_D \frac{e^{-(x+y)}}{x+y} dx dy,$$

siendo D el primer cuadrante del plano OXY .

Solución: 1.

Resolución. Se trata de una integral impropia de tercera especie (el integrando no está acotado cerca del origen y el recinto de integración es no acotado).

Como el integrando tiene signo constante en D la integral existe (convergente o divergente), y se puede calcular utilizando cualquier sucesión básica $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ para la integración de

$$f(x,y) = \frac{e^{-(x+y)}}{x+y}$$

en D . Consideramos

$$D_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} \leq x+y \leq n, \frac{1}{n} \leq \frac{y}{x} \leq n \right\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

y efectuamos el cambio de variables

$$u = x+y, \quad v = \frac{y}{x},$$

cuyo inverso es

$$x = \frac{u}{v+1}, \quad y = \frac{uv}{v+1}$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver



y cuyo jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix}^{-1} = \left[\frac{1}{x} \left(1 + \frac{y}{x} \right) \right]^{-1} = \frac{u}{(1+v)^2}.$$

Entonces:

$$\iint_{D_n} \frac{e^{-(x+y)}}{x+y} dx dy = \int_{1/n}^n \frac{dv}{(1+v)^2} \int_{1/n}^n e^{-u} du = \frac{n-1}{n+1} (e^{-1/n} - e^{-n}) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Consecuentemente,

$$\iint_D \frac{e^{-(x+y)}}{x+y} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{e^{-(x+y)}}{x+y} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} (e^{-1/n} - e^{-n}) = 1.$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 9

Discutir según los valores de p la convergencia de la integral

$$\iiint_M (x^2 + y^2 + z^2)^{-p} dx dy dz,$$

siendo M el exterior de la bola unidad cerrada.

Solución: Converge a $\frac{4\pi}{2p-3}$ si, y sólo si, $p > \frac{3}{2}$.

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 9

Discutir según los valores de p la convergencia de la integral

$$\iiint_M (x^2 + y^2 + z^2)^{-p} dx dy dz,$$

siendo M el exterior de la bola unidad cerrada.

Solución: Converge a $\frac{4\pi}{2p-3}$ si, y sólo si, $p > \frac{3}{2}$.

Resolución. La integral es impropia para cualquier valor de p , ya que el recinto de integración es no acotado; y existe, ya que el integrando tiene signo constante. Para calcularla podemos considerar cualquier sucesión básica conveniente, por ejemplo

$$M_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq n^2\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Efectuando un cambio a esféricas:

$$\iiint_{M_n} (x^2 + y^2 + z^2)^{-p} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_1^n r^{2-2p} dr \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Si $2 - 2p \neq -1$, esto es, si $p \neq 3/2$, entonces

$$\iiint_{M_n} (x^2 + y^2 + z^2)^{-p} dx dy dz = 4\pi \left. \frac{r^{3-2p}}{3-2p} \right|_1^n = \frac{4\pi}{3-2p} (n^{3-2p} - 1) \quad (n \in \mathbb{N}),$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver



de manera que

$$\begin{aligned}\iint\int_M (x^2 + y^2 + z^2)^{-p} dx dy dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint\int_{M_n} (x^2 + y^2 + z^2)^{-p} dx dy dz \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{3-2p} (n^{3-2p} - 1) = \begin{cases} \frac{4\pi}{2p-3}, & p > \frac{3}{2} \\ \infty, & p < \frac{3}{2}. \end{cases}\end{aligned}$$

Por otra parte, si $2 - 2p = -1$, esto es, si $p = 3/2$, entonces

$$\iint\int_{M_n} (x^2 + y^2 + z^2)^{-p} dx dy dz = 4\pi \ln r|_1^n = 4\pi \ln n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

de manera que

$$\iint\int_M (x^2 + y^2 + z^2)^{-p} dx dy dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint\int_{M_n} (x^2 + y^2 + z^2)^{-p} dx dy dz = \lim_{n \rightarrow \infty} 4\pi \ln n = \infty.$$

Se concluye que la integral en cuestión converge a $4\pi/(2p-3)$ si, y sólo si, $p > 3/2$.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 10

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \int_0^{1/x} \operatorname{sen} \sqrt{3t} e^{-t^2} dt.$$

Solución: ∞ .

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 10

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \int_0^{1/x} \operatorname{sen} \sqrt{3t} e^{-t^2} dt.$$

Solución: ∞ .

Resolución. Efectuando el cambio de variables $u = 1/x$ vemos que es equivalente calcular

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u^2} \int_0^u \operatorname{sen} \sqrt{3t} e^{-t^2} dt.$$

Pongamos

$$F(u) = \int_0^u \operatorname{sen} \sqrt{3t} e^{-t^2} dt \quad (u \in [0, 1]).$$

Por el Corolario 3.4 del bloque teórico 1.7, *Integrales paramétricas propias*, se tiene que $\lim_{u \rightarrow 0} F(u) = 0$. Consecuentemente, el límite buscado es una indeterminación del tipo «0/0», y para resolverla aplicaremos la regla de L'Hopital.

En virtud de la regla de Leibniz para integrales paramétricas propias con límites de integración variables (Proposición 4.2 del bloque teórico antes citado), se verifica:

$$F'(u) = \operatorname{sen} \sqrt{3u} e^{-u^2} \quad (u \in]0, 1[).$$

Concluimos que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u^2} \int_0^u \operatorname{sen} \sqrt{3t} e^{-t^2} dt = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{F(u)}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{F'(u)}{2u} = \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{\operatorname{sen} \sqrt{3u}}{\sqrt{3u}} e^{-u^2} = \infty.$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 11

Estudiar la continuidad y derivabilidad de las integrales paramétricas siguientes y calcular su derivada donde exista.

$$(a) F(\lambda) = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x} dx.$$

$$(b) F(\lambda) = \int_0^\lambda e^{-\lambda^2 x^2} dx.$$

$$\text{Solución: } (a) F'(\lambda) = \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{R}); \quad (b) F'(\lambda) = -2\lambda \int_0^\lambda x^2 e^{-\lambda^2 x^2} dx + e^{-\lambda^4} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 11

Estudiar la continuidad y derivabilidad de las integrales paramétricas siguientes y calcular su derivada donde exista.

$$(a) F(\lambda) = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x} dx.$$

$$(b) F(\lambda) = \int_0^\lambda e^{-\lambda^2 x^2} dx.$$

$$\text{Solución: } (a) F'(\lambda) = \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{R}); \quad (b) F'(\lambda) = -2\lambda \int_0^\lambda x^2 e^{-\lambda^2 x^2} dx + e^{-\lambda^4} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Resolución.

(a) Como

$$f(\lambda, x) = \lambda \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\lambda x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) = \cos \lambda x \quad ((\lambda, x) \in \mathbb{R} \times [0, 1])$$

son continuas, la regla de Leibniz para integrales paramétricas simples con límites fijos asegura que existe

$$F'(\lambda) = \int_0^1 \cos \lambda x dx = \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

En particular, F es continua en $\mathbb{R}$.

(b) Las funciones $a(\lambda) = 0$, $b(\lambda) = \lambda$ son continuas y derivables en el abierto $\Lambda = \mathbb{R}$. Si

$$S(a, b) = \{(\lambda, x) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \in \Lambda, a(\lambda) \leq x \leq b(\lambda)\},$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver



entonces $f(\lambda, x) = e^{-\lambda^2 x^2}$ y su derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) = -2\lambda x^2 e^{-\lambda^2 x^2}$$

son continuas en un entorno abierto de $S(a, b)$. Por tanto, la regla de Leibniz para integrales paramétricas simples con límites variables permite escribir:

$$F'(\lambda) = -2\lambda \int_0^\lambda x^2 e^{-\lambda^2 x^2} dx + e^{-\lambda^4} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Siendo derivable, en particular F también es continua en $\mathbb{R}$.

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 12

Estudiar la continuidad y derivabilidad de las integrales paramétricas siguientes y calcular su derivada donde exista.

$$(a) F(\lambda) = \int_0^1 \ln(\lambda^2 + x^2) dx.$$

$$(b) F(\lambda) = \int_0^{\lambda^2} x^5 (\lambda - x)^7 dx.$$

Solución: (a) $F'(\lambda) = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}); \quad (b) F'(\lambda) = 2\lambda^{18}(1 - \lambda)^7 + 7\lambda^{18} \sum_{i=0}^6 \frac{(-1)^i}{6+i} \binom{6}{i} \lambda^i$
($\lambda \in \mathbb{R}$).

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 12

Estudiar la continuidad y derivabilidad de las integrales paramétricas siguientes y calcular su derivada donde exista.

$$(a) F(\lambda) = \int_0^1 \ln(\lambda^2 + x^2) dx.$$

$$(b) F(\lambda) = \int_0^{\lambda^2} x^5 (\lambda - x)^7 dx.$$

Solución: (a) $F'(\lambda) = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}); \quad (b) F'(\lambda) = 2\lambda^{18}(1-\lambda)^7 + 7\lambda^{18} \sum_{i=0}^6 \frac{(-1)^i}{6+i} \binom{6}{i} \lambda^i$
($\lambda \in \mathbb{R}$).

Resolución.

(a) Las funciones

$$f(\lambda, x) = \ln(\lambda^2 + x^2), \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + x^2} \quad ((\lambda, x) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times [0, 1])$$

son continuas. Por la regla de Leibniz para integrales paramétricas simples con límites fijos,

$$F'(\lambda) = 2\lambda \int_0^1 \frac{dx}{\lambda^2 + x^2} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}). \quad (1)$$

En particular, F es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver



Para analizar su continuidad en el origen, observamos que

$$F(0) = 2 \int_{\rightarrow 0}^1 \ln x \, dx = [2x \ln x - 2x]_{\rightarrow 0}^1 = -2. \quad (2)$$

Integrando ambos miembros de (1) respecto de λ (el segundo miembro por partes) encontramos que

$$F(\lambda) = \ln(1 + \lambda^2) + 2\lambda \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda} + C \quad (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}). \quad (3)$$

A fin de determinar C , tenemos en cuenta que (también por partes) es

$$\int \ln(1 + x^2) \, dx = x \ln(1 + x^2) + 2 \operatorname{arctg} x - 2x + K,$$

así que

$$F(1) = \int_0^1 \ln(1 + x^2) \, dx = \ln 2 + 2 \operatorname{arctg} 1 - 2. \quad (4)$$

Pero en virtud de (3),

$$F(1) = \ln 2 + 2 \operatorname{arctg} 1 + C. \quad (5)$$

Comparando (4) y (5) se sigue que $C = -2$.

Ahora, nuevamente por (3),

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} F(\lambda) = C = -2. \quad (6)$$

Se infiere de (2) y (6) que F también es continua en $\lambda = 0$. Concluimos que F es continua en $\mathbb{R}$.

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver



(b) Sean $a(\lambda) = 0$, $b(\lambda) = \lambda^2$ ($\lambda \in \Lambda = \mathbb{R}$),

$$S(a, b) = \{(\lambda, x) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \in \Lambda, a(\lambda) \leq x \leq b(\lambda)\}$$

y $f(\lambda, x) = x^5(\lambda - x)^7$. Ya que Λ es abierto, a, b son continuas y derivables en Λ y f es continua y derivable respecto de λ en un entorno abierto de $S(a, b)$, la regla de Leibniz para integrales paramétricas simples con límites variables permite escribir:

$$F'(\lambda) = 2\lambda^{18}(1 - \lambda)^7 + 7 \int_0^{\lambda^2} x^5(\lambda - x)^6 dx = 2\lambda^{18}(1 - \lambda)^7 + 7\lambda^{18} \sum_{i=0}^6 \frac{(-1)^i}{6+i} \binom{6}{i} \lambda^i \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Siendo derivable, en particular F también es continua en $\mathbb{R}$.

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 13

Demostrar que la integral

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda} e^{-x} dx$$

es uniformemente convergente para $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ cualquiera que sea $\lambda_0 > 0$, pero no para $0 \leq \lambda < \infty$. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función de λ que ella define.

Solución: $F'(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{\lambda} e^{-x} \ln x dx \quad (\lambda \in]1, \infty[).$

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 13

Demostrar que la integral

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda} e^{-x} dx$$

es uniformemente convergente para $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ cualquiera que sea $\lambda_0 > 0$, pero no para $0 \leq \lambda < \infty$. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función de λ que ella define.

$$\text{Solución: } F'(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{\lambda} e^{-x} \ln x dx \quad (\lambda \in]1, \infty[).$$

Resolución. Sean $\Lambda = [0, \infty[$, $f(\lambda, x) = x^{\lambda} e^{-x}$ ($(\lambda, x) \in \Lambda \times]0, \infty[$) y pongamos $F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$, donde

$$F_1(\lambda) = \int_0^1 f(\lambda, x) dx, \quad F_2(\lambda) = \int_1^{\infty} f(\lambda, x) dx \quad (\lambda \in \Lambda).$$

La integral paramétrica F_1 es impropia, ya que f no está definida en el origen. Efectuando el cambio de variable $x = 1/t$, $dx = -dt/t^2$ encontramos que

$$F_1(\lambda) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-1/t}}{t^{\lambda+2}} dt \leq \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} = 1 \quad (\lambda \in \Lambda).$$

En virtud del criterio de Weierstrass, F_1 converge uniformemente en Λ .

Por otra parte

$$F_2(\lambda) = \int_1^{\infty} x^{\lambda} e^{-x} dx \leq \int_1^{\infty} x^{\lambda_0} e^{-x} dx \leq \int_0^{\infty} x^{\lambda_0} e^{-x} dx = \lambda_0 \Gamma(\lambda_0) < \infty \quad (\lambda \in [0, \lambda_0]),$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

y sigue del criterio de Weierstrass que F_2 converge uniformemente en $[0, \lambda_0]$. Se concluye que

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(\lambda, x) dx \quad (\lambda \in [0, \lambda_0])$$

es uniformemente convergente. Al ser continuos los respectivos integrandos, F_1 , F_2 y, por tanto, F son uniformemente continuas en $[0, \lambda_0]$. La arbitrariedad de λ_0 permite afirmar que F es continua en Λ .

Probaremos que F no es uniformemente convergente en Λ aplicando el criterio de Cauchy. Si $k > 1$ y $h > 0$, se tiene

$$\left| \int_k^{k+h} f(\lambda, x) dx \right| = \left| \int_k^{k+h} x^\lambda e^{-x} dx \right| \geq h k^\lambda e^{-k-h} > 1$$

siempre que $\lambda > (k+h - \ln h)/\ln k$. Consecuentemente, para todo $k > 1$ existen números reales $b > a \geq k$ tales que

$$\sup_{\lambda \in [0, \infty[} \left| \int_a^b f(\lambda, x) dx \right| \geq 1.$$

No se satisface por tanto el criterio de Cauchy, lo que indica que F no es uniformemente convergente en Λ .

Estudiaremos ahora la derivabilidad de F , para lo que procederemos de forma análoga que con la continuidad. Las funciones

$$f(\lambda, x), \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) dx = x^\lambda e^{-x} \ln x \quad ((\lambda, x) \in \Lambda \times]0, \infty[)$$

son continuas. Efectuando el cambio de variable $x = 1/t$, $dx = -dt/t^2$ encontramos que

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) \right| dx \leq \int_1^\infty \frac{e^{-1/t}}{t^{\lambda-1}} \frac{\ln t}{t} \frac{dt}{t^2} \leq C \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} < \infty \quad (\lambda \in [1, \infty[),$$

$$\int_1^\infty \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) dx \leq \int_1^\infty x^{\lambda_0} e^{-x} \ln x dx \leq C_{\lambda_0} \int_1^\infty e^{-x/2} dx < \infty \quad (\lambda \in [0, \lambda_0])$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver



para ciertas constantes positivas C, C_{λ_0} . En virtud del criterio de Weierstrass,

$$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) dx \quad (\lambda \in [1, \lambda_0])$$

converge uniformemente. Por otra parte, ya hemos visto que F es convergente en Λ . La regla de Leibniz para integrales paramétricas impropias y la arbitrariedad de λ_0 permiten concluir que F es derivable en $]1, \infty[$, con derivada

$$F'(\lambda) = \int_0^\infty x^\lambda e^{-x} \ln x dx \quad (\lambda \in]1, \infty[).$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 14

Demostrar que la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \lambda^2}$$

es uniformemente convergente para $|\lambda| \geq \lambda_0$, cualquiera que sea $\lambda_0 > 0$. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función de λ que ella define.

$$\text{Solución: } F'(\lambda) = -2\lambda \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \lambda^2)^2} \quad (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 14

Demostrar que la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \lambda^2}$$

es uniformemente convergente para $|\lambda| \geq \lambda_0$, cualquiera que sea $\lambda_0 > 0$. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función de λ que ella define.

$$\text{Solución: } F'(\lambda) = -2\lambda \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \lambda^2)^2} \quad (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Resolución. Pongamos $f(\lambda, x) = (x^2 + \lambda^2)^{-1}$. Como $|f(\lambda, x)| \leq (x^2 + \lambda_0^2)^{-1}$ ($|\lambda| \geq \lambda_0$, $x \in [0, \infty[$), el criterio de Weierstrass garantiza que

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(\lambda, x) dx \quad (|\lambda| \geq \lambda_0)$$

converge uniformemente.

Para estudiar la derivabilidad de F , tenemos en cuenta además que

$$f(\lambda, x), \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) = -2\lambda(x^2 + \lambda^2)^{-2} \quad (|\lambda| \geq \lambda_0, x \in [0, \infty[)$$

son continuas y que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) \right| \leq -2\lambda_1(x^2 + \lambda_0^2)^{-2} \quad (\lambda_1 \geq |\lambda| \geq \lambda_0, x \in [0, \infty[),$$

de modo que (criterio de Weierstrass)

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) dx \quad (\lambda_1 \geq |\lambda| \geq \lambda_0)$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver



converge uniformemente. La regla de Leibniz para integrales paramétricas impropias asegura entonces que F es derivable (por tanto, continua) para $\lambda_1 > |\lambda| > \lambda_0$, con

$$F'(\lambda) = -2\lambda \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \lambda^2)^2} \quad (\lambda_1 > |\lambda| > \lambda_0).$$

La arbitrariedad de λ_0 y λ_1 prueba que

$$F'(\lambda) = -2\lambda \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + \lambda^2)^2} \quad (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Notemos que

$$F(0) = \int_0^\infty x^{-2} dx = \infty$$

y que esta discontinuidad no es evitable, ya que

$$F(\lambda) = \frac{\pi}{2|\lambda|} \quad (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

implica $\lim_{\lambda \rightarrow 0} F(\lambda) = \infty$.

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 15

(a) Demostrar que

$$I(t) = \int_0^{\infty} x e^{-x} \cos tx \, dx$$

converge uniformemente en cualquier intervalo $[a, b]$.

(b) Hallar $I(t)$, sabiendo que

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen} tx \, dx = \frac{t}{1+t^2} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Solución: (b) $I(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \quad (t \in \mathbb{R}).$

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 15

(a) Demostrar que

$$I(t) = \int_0^{\infty} x e^{-x} \cos tx \, dx$$

converge uniformemente en cualquier intervalo $[a, b]$.

(b) Hallar $I(t)$, sabiendo que

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen} tx \, dx = \frac{t}{1+t^2} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Solución: (b) $I(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \quad (t \in \mathbb{R}).$

Resolución.

(a) Se tiene que $|x e^{-x} \cos tx| \leq x e^{-x} \quad (t \in \mathbb{R})$, con

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} \, dx = 1.$$

El criterio de Weierstrass garantiza entonces que

$$I(t) = \int_0^{\infty} x e^{-x} \cos tx \, dx \quad (t \in \mathbb{R})$$

converge uniformemente.

(b) Consideremos la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen} tx \, dx = \frac{t}{1+t^2} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver



Se cumple que:

- El integrando es continuo, con derivada parcial continua respecto a t .
- La integral converge para todo $t \in \mathbb{R}$ (aunque para nuestros propósitos es suficiente que converja para algún $t \in \mathbb{R}$).
- La integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} [e^{-x} \operatorname{sent} x] dx = \int_0^{\infty} x e^{-x} \operatorname{cost} x dx \quad (t \in \mathbb{R})$$

converge uniformemente (por (a)).

Cabe entonces aplicar la regla de Leibniz para obtener:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^{\infty} x e^{-x} \operatorname{cost} x dx = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} [e^{-x} \operatorname{sent} x] dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{sent} x dx = \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{1+t^2} \right) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \quad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 16

Hallar

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-tx} dx$$

para $t \geq t_0 > 0$.

Solución: $\frac{2}{t^3}$.

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 16

Hallar

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-tx} dx$$

para $t \geq t_0 > 0$.

Solución: $\frac{2}{t^3}$.

Resolución. Sea $0 < \varepsilon < t_0$. Se tiene que

$$F(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dx = \frac{1}{t} \quad (t > 0). \quad (7)$$

Las funciones

$$f(t, x) = e^{-tx}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = -xe^{-tx} \quad ((t, x) \in]\varepsilon, \infty[\times [0, \infty[)$$

son continuas y la integral

$$\int_0^{\infty} -xe^{-tx} dx \quad (t \geq \varepsilon)$$

converge uniformemente en virtud del criterio de Weierstrass, ya que $|-xe^{-tx}| \leq xe^{-\varepsilon x}$ e (integrando por partes)

$$\int_0^{\infty} xe^{-\varepsilon x} dx < \infty.$$

Por tanto, en (7) podemos derivar miembro a miembro aplicando la regla de Leibniz para obtener

$$F'(t) = \int_0^{\infty} -xe^{-tx} dx = -\frac{1}{t^2} \quad (t > \varepsilon). \quad (8)$$

Similarmente, las funciones

$$g(t, x) = -xe^{-tx}, \quad \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = x^2 e^{-tx} \quad ((t, x) \in]\varepsilon, \infty[\times [0, \infty[)$$

son continuas y la integral

$$\int_0^\infty x^2 e^{-tx} dx \quad (t \geq \varepsilon)$$

converge uniformemente en virtud del criterio de Weierstrass, ya que $x^2 e^{-tx} \leq x^2 e^{-\varepsilon x}$ e (integrando por partes)

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\varepsilon x} dx < \infty.$$

Por tanto, en (8) podemos derivar miembro a miembro aplicando la regla de Leibniz para obtener

$$F''(t) = \int_0^\infty x^2 e^{-tx} dx = \frac{2}{t^3} \quad (t > \varepsilon).$$

En particular,

$$\int_0^\infty x^2 e^{-tx} dx = \frac{2}{t^3} \quad (t \geq t_0).$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 17

Calcular

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1} - 1}{\ln x} dx.$$

Solución: $\ln n$.

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 17

Calcular

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1} - 1}{\ln x} dx.$$

Solución: $\ln n$.

Resolución. Sea

$$I(t) = \int_0^1 \frac{x^{t-1} - 1}{\ln x} dx \quad (t \geq 1).$$

La función

$$f(t, x) = \frac{x^{t-1} - 1}{\ln x} \quad (t \geq 1, 0 \leq x \leq 1)$$

puede ser considerada continua, ya que, aunque en principio no está definida en el punto $(1, 0)$, se tiene:

$$\lim_{(t,x) \rightarrow (1,0)} \left| \frac{x^{t-1} - 1}{\ln x} \right| = \lim_{(t,x) \rightarrow (1,0)} \left| \int_1^t x^{s-1} ds \right| \leq \lim_{(t,x) \rightarrow (1,0)} (t - 1) = 0.$$

Consecuentemente, $I(t)$ es uniformemente continua en cualquier intervalo compacto $1 \leq t \leq t_0$ y, en particular, continua si $t \geq 1$.

Por otra parte,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = x^{t-1} \quad (t > 1, 0 \leq x \leq 1)$$

es continua.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver



Así pues, podemos aplicar la regla de Leibniz para integrales paramétricas simples con límites fijos y obtener

$$I'(t) = \int_0^1 x^{t-1} dx = \frac{1}{t} \quad (t > 1).$$

Integrando ahora respecto de t encontramos que $I(t) = \ln t + C$ ($t > 1$) y, por continuidad, $I(t) = \ln t + C$ ($t \geq 1$). Para determinar C basta advertir que $C = I(1) = 0$.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 18

Calcular

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1 + a \operatorname{sen}^2 x) \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x},$$

siendo $a > -1$.

Solución: $\pi(\sqrt{1+a}-1)$.

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

Problema 18

Calcular

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1 + a \operatorname{sen}^2 x) \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x},$$

siendo $a > -1$.

Solución: $\pi(\sqrt{1+a}-1)$.

Resolución. Llamamos $I(a)$ a la integral paramétrica que se quiere calcular. Derivando paramétricamente,

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a \operatorname{sen}^2 x}. \quad (9)$$

Esta derivación es lícita ya que (aplicando L'Hôpital)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + a \operatorname{sen}^2 x) \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = a,$$

por lo que puede considerarse que

$$f(a, x) = \ln(1 + a \operatorname{sen}^2 x) \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad \frac{\partial f}{\partial a}(a, x) = \frac{1}{1 + a \operatorname{sen}^2 x} \quad \left((a, x) \in]-1, \infty[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right)$$

son continuas, lo que permite aplicar la regla de Leibniz para integrales paramétricas simples con límites fijos.

La integral del segundo miembro de (9) se calcula mediante el cambio $\operatorname{tg} x = t$ y resulta

$$I'(a) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}};$$

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver

luego, $I(a) = \pi\sqrt{1+a} + C$. Como $I(0) = 0$, necesariamente $C = -\pi$.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Problema 16

Problema 17

Problema 18

Inicio

Volver