Problemas resueltos

Integración múltiple: integrales impropias y paramétricas

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Problema 1

Estudiar la convergencia y, en su caso, calcular la integral

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{xy},$$

siendo D el recinto delimitado por $y = x^2$ e $y = x$.

Solución: ∞.

RESOLUCIÓN. Se trata de una integral impropia porque el integrando $f(x,y) = 1/xy$ deja de estar acotado cerca del origen de coordenadas.

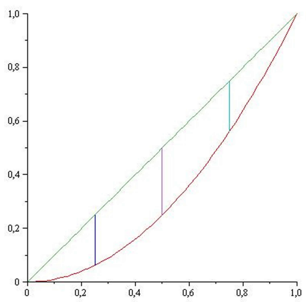

Figura 1. Recinto D.

Como f tiene signo constante en D, la integral impropia existe (aunque puede ser convergente o divergente), y se calcula como el límite de las integrales de f tomadas sobre cualquier sucesión básica $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ para la integración de f en D.

Elegimos

$$D_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x \right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Entonces

$$\iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{xy} = \int_{1/n}^{1} \frac{dx}{x} \int_{x^2}^{x} \frac{dy}{y} = -\int_{1/n}^{1} \frac{1}{x} \ln x\, dx = \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

de manera que

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{xy} = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{xy} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{n} = \infty.$$

$\square$

2. Problema 2

Se considera la integral impropia de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x-y}}$$

sobre el conjunto $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 < y < x\right\}$. Justificar que dicha integral existe y calcularla.

Solución: $\dfrac{4}{3}$.

RESOLUCIÓN. La integral es impropia porque el integrando deja de estar acotado en un entorno de $x = y$, y existe porque dicho integrando tiene signo constante, de modo que podemos calcularla utilizando cualquier sucesión básica $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ para la integración de f en D.

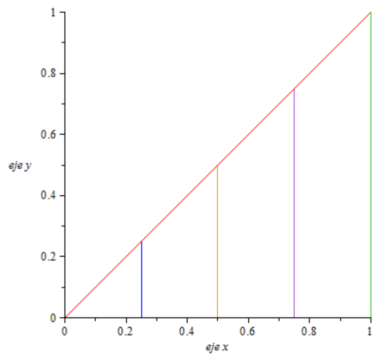

Figura 2. Recinto D.

Consideramos

$$D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} \leq x - y \leq 1,\ y \geq 0\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x-y}}\, dx\, dy = \\
&= \int_0^{(n-1)/n} dy \int_{y+1/n}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-y}} = 2\int_0^{(n-1)/n} \left(\sqrt{1-y} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) dy = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}} - 1\right) - \frac{2(n-1)}{n\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

y

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x-y}}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x-y}}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}} - 1\right) - \frac{2(n-1)}{n\sqrt{n}} \right] = \frac{4}{3}.$$

□

3. Problema 3

Estudiar la convergencia y, en su caso, calcular la integral

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

siendo D el círculo $x^2+y^2-2x \leq 0$.

Solución: 4.

RESOLUCIÓN. El recinto de integración D es el círculo de centro $(1,0)$ y radio 1. La integral es impropia porque el integrando no está acotado cerca del origen.

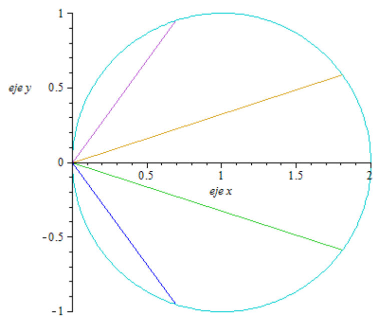

Figura 3. Recinto D.

Como este integrando tiene signo constante, la integral existe y para calcularla podemos tomar cualquier sucesión básica $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$. Consideramos

$$D_n = \left\{(x,y) \in D : \frac{1}{n} \leq x \leq 2\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Aprovechando la simetría del recinto y la paridad del integrando y efectuando un cambio de variable a polares encontramos que

$$\iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{(1/n)\cos\theta}^{2\cos\theta} dr = 2\left(2-\frac{1}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Por tanto,

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{n\to\infty} 2\left(2-\frac{1}{n}\right) = 4.$$

□

4. Problema 4

Estudiar la convergencia de la integral

$$\iint_D \frac{dxdy}{x+y},$$

siendo D el recinto definido por las condiciones $x \geq 1$ y $0 \leq y \leq 1/x$, y calcularla, en su caso.

Solución: $\dfrac{\pi}{2} - \ln 2$.

RESOLUCIÓN. La integral es impropia porque el recinto de integración es no acotado.

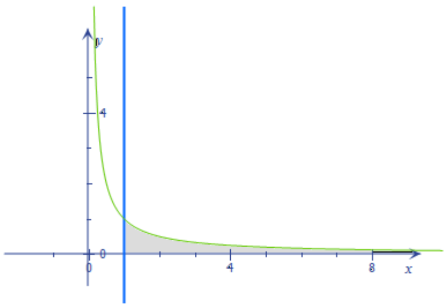

Figura 4. Recinto D.

Como el integrando tiene signo constante en D, la integral existe y para calcularla podemos tomar cualquier sucesión básica $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$. Consideramos

$$D_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{x+y} &= \int_1^n dx \int_0^{1/x} \frac{dy}{x+y} = \int_1^n \ln(x+y)\big|_0^{1/x}\, dx \\
&= \int_1^n \left[\ln\left(x + \frac{1}{x}\right) - \ln x \right] dx = \int_1^n \ln(x^2+1)\, dx - 2\int_1^n \ln x\, dx \\
&= \left[x\ln(x^2+1) + 2\operatorname{arc\,tg} x - 2x\ln x \right]_1^n \\
&= n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + 2\operatorname{arc\,tg} n - \frac{\pi}{2} - \ln 2 \qquad (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{x+y} = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{x+y} = \lim_{n\to\infty} \left[n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + 2\operatorname{arc\,tg} n - \frac{\pi}{2} - \ln 2 \right] = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$$

□

5. Problema 5

Estudiar la convergencia y, en su caso, calcular el valor de la integral

$$\iint_D xe^{-xy}\,dx\,dy,$$

siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ y \geq 1\}$.

Solución: e^{-1}.

RESOLUCIÓN. Se trata de una integral impropia, ya que el recinto de integración D es no acotado.

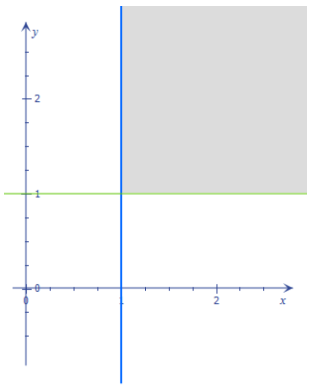

Figura 5. Recinto D.

Como el integrando es no negativo, la integral existe, aunque puede ser convergente o divergente, y se calcula como el límite de las integrales de $f(x,y) = xe^{-xy}$ sobre cualquier sucesión básica $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ para la integración de f en D.

Consideramos entonces la siguiente sucesión básica, que crece hasta llenar D:

$$D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq n,\ 1 \leq y \leq n\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\iint_{D_n} xe^{-xy}\,dx\,dy &= \int_1^n dx \int_1^n xe^{-xy}\,dy = \int_1^n \left[-e^{-xy}\right]_{y=1}^{y=n} dx \\ &= \int_1^n \left(e^{-x} - e^{-nx}\right) dx = \left[\frac{1}{n}e^{-nx} - e^{-x}\right]_1^n = \frac{1}{n}e^{-n^2} - e^{-n} - \frac{1}{n}e^{-n} + e^{-1}.\end{aligned}$$

Concluimos:

$$\iint_D xe^{-xy}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} xe^{-xy}\,dx\,dy = e^{-1}.$$

□

6. Problema 6

Estudiar la convergencia y, en su caso, calcular la integral

$$\iint_D \frac{x^2+y^2-2}{(x^2+y^2)^{5/2}}\,dx\,dy,$$

siendo D el conjunto de los puntos (x,y) del plano tales que $x^2+y^2 \geq 2$ y $x \leq 1$.

Solución: $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} + \dfrac{8}{9\sqrt{2}} - \dfrac{10}{9}$.

RESOLUCIÓN. La integral es impropia porque D es no acotado. Como el integrando tiene signo constante dicha integral existe y puede calcularse tomando cualquier sucesión básica $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$.

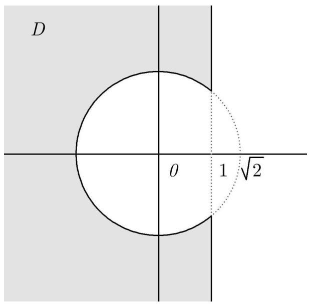

Figura 6. Recinto D.

Consideramos $D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2+y^2 \leq n^2,\ x \leq 1\right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ y calculamos la integral sobre cada uno de estos conjuntos aplicando un argumento de simetría y paridad y un cambio a polares, con lo que resulta:

$$\begin{aligned}
&\iint_{D_n} \frac{x^2+y^2-2}{(x^2+y^2)^{5/2}}\,dx\,dy = \\
&= 2\int_{\pi/4}^{\arccos(1/n)} d\theta \int_{\sqrt{2}}^{1/\cos\theta} \left(\frac{1}{r^2}-\frac{2}{r^4}\right) dr + 2\int_{\arccos(1/n)}^{\pi} d\theta \int_{\sqrt{2}}^{n} \left(\frac{1}{r^2}-\frac{2}{r^4}\right) dr \\
&= 2\int_{\pi/4}^{\arccos(1/n)} \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \cos\theta + \frac{2}{3}\cos^3\theta\right) d\theta + 2\int_{\arccos(1/n)}^{\pi} \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{n} + \frac{2}{3n^3}\right) d\theta \\
&= \frac{4}{3\sqrt{2}}\frac{3\pi}{4} - \left(2-\frac{4}{3}\right)(1-\cos^2\theta)^{1/2}\Big|_{\pi/4}^{\arccos(1/n)} - \frac{4}{9}(1-\cos^2\theta)^{3/2}\Big|_{\pi/4}^{\arccos(1/n)} \\
&\quad + 2\left(\pi - \arccos\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{3n^3}-\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}\left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] - \frac{4}{9}\left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{3/2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right] \\
&\quad + 2\left(\pi - \arccos\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{3n^3}-\frac{1}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Se concluye que

$$\iint_D \frac{x^2+y^2-2}{(x^2+y^2)^{5/2}}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{x^2+y^2-2}{(x^2+y^2)^{5/2}}\,dx\,dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{8}{9\sqrt{2}} - \frac{10}{9}.$$

$\square$

7. Problema 7

Estudiar la convergencia y, en su caso, calcular la integral

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{x-y},$$

siendo D el recinto determinado por las condiciones $0 \le x \le 1$ y $xy > 1$.

Solución: $-\infty$.

RESOLUCIÓN. Se trata de una integral impropia porque tanto el recinto de integración como el integrando (cerca de $(1,1)$) son no acotados.

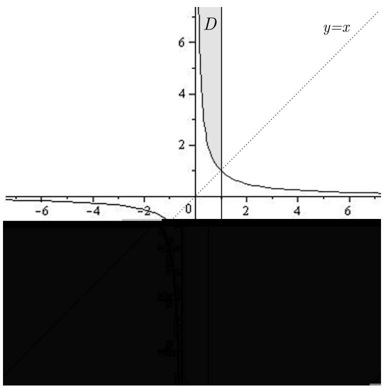

Figura 7. Recinto D.

Como el integrando tiene signo constante (negativo, ya que, en D, es $y > x$), la integral existe y puede calcularse utilizando cualquier sucesión básica $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ para la integración de

$$f(x,y) = \frac{1}{x-y}$$

en D. Eligiendo

$$D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + \frac{1}{n} \le y \le n,\ 1/y \le x \le 1\right\}$$

encontramos que

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{x-y} = \int_{(n+1)/n}^{n} dy \int_{1/y}^{1} \frac{dx}{x-y} = \int_{(n+1)/n}^{n} \left[\ln(y-1) - \ln\left(y - \frac{1}{y}\right)\right] dy \\ &= \int_{(n+1)/n}^{n} [\ln y - \ln(1+y)]\ dy \qquad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Como

$$\int \ln t \, dt = t \ln t - t + C,$$

sigue que

$$\begin{aligned} I_n &= [y \ln y - y - (1+y)\ln(1+y) + (1+y)]_{(n+1)/n}^{n} = \left[\ln \left[\left(\frac{y}{1+y} \right)^y \frac{1}{1+y} \right] + 1 \right]_{(n+1)/n}^{n} \\ &= \ln \left[\left(\frac{n}{1+n} \right)^n \frac{1}{1+n} \right] - \ln \left[\left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^{(n+1)/n} \frac{n}{2n+1} \right] \qquad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

con

$$\lim_{n\to\infty} \ln \left[\left(\frac{n}{1+n} \right)^n \frac{1}{1+n} \right] = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \ln \left[\left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^{(n+1)/n} \frac{n}{2n+1} \right] = -2\ln 2.$$

Por tanto,

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{x-y} = \lim_{n\to\infty} I_n = -\infty.$$

□

8. Problema 8

Calcular

$$I = \iint_D \frac{e^{-(x+y)}}{x+y}\, dx\, dy,$$

siendo D el primer cuadrante del plano OXY.

Solución: 1.

RESOLUCIÓN. Se trata de una integral impropia de tercera especie (el integrando no está acotado cerca del origen y el recinto de integración es no acotado).

Como el integrando tiene signo constante en D la integral existe (convergente o divergente), y se puede calcular utilizando cualquier sucesión básica $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ para la integración de

$$f(x,y) = \frac{e^{-(x+y)}}{x+y}$$

en D. Consideramos

$$D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{1}{n} \le x+y \le n,\ \frac{1}{n} \le \frac{y}{x} \le n\right\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

y efectuamos el cambio de variables

$$u = x+y, \quad v = \frac{y}{x},$$

cuyo inverso es

$$x = \frac{u}{v+1}, \quad y = \frac{uv}{v+1}$$

y cuyo jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix}^{-1} = \left[\frac{1}{x}\left(1+\frac{y}{x}\right)\right]^{-1} = \frac{u}{(1+v)^2}.$$

Entonces:

$$\iint_{D_n} \frac{e^{-(x+y)}}{x+y}\, dx\, dy = \int_{1/n}^{n} \frac{dv}{(1+v)^2} \int_{1/n}^{n} e^{-u}\, du = \frac{n-1}{n+1}\left(e^{-1/n} - e^{-n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Consecuentemente,

$$\iint_D \frac{e^{-(x+y)}}{x+y}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{e^{-(x+y)}}{x+y}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1}\left(e^{-1/n} - e^{-n}\right) = 1.$$

□

9. Problema 9

Discutir según los valores de p la convergencia de la integral

$$\iiint_M (x^2+y^2+z^2)^{-p}\,dx\,dy\,dz,$$

siendo M el exterior de la bola unidad cerrada.

Solución: Converge a $\dfrac{4\pi}{2p-3}$ si, y sólo si, $p > \dfrac{3}{2}$.

RESOLUCIÓN. La integral es impropia para cualquier valor de p, ya que el recinto de integración es no acotado; y existe, ya que el integrando tiene signo constante. Para calcularla podemos considerar cualquier sucesión básica conveniente, por ejemplo

$$M_n = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\le x^2+y^2+z^2\le n^2\right\} \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Efectuando un cambio a esféricas:

$$\iiint_{M_n} (x^2+y^2+z^2)^{-p}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi \int_1^n r^{2-2p}\,dr \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Si $2-2p\neq -1$, esto es, si $p\neq 3/2$, entonces

$$\iiint_{M_n} (x^2+y^2+z^2)^{-p}\,dx\,dy\,dz = 4\pi\,\frac{r^{3-2p}}{3-2p}\bigg|_1^n = \frac{4\pi}{3-2p}\left(n^{3-2p}-1\right) \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

de manera que

$$\begin{aligned}\iiint_{M} (x^2+y^2+z^2)^{-p}\,dx\,dy\,dz &= \lim_{n\to\infty}\iiint_{M_n} (x^2+y^2+z^2)^{-p}\,dx\,dy\,dz\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4\pi}{3-2p}\left(n^{3-2p}-1\right) = \begin{cases}\dfrac{4\pi}{2p-3}, & p>\dfrac{3}{2}\\[2mm] \infty, & p<\dfrac{3}{2}.\end{cases}\end{aligned}$$

Por otra parte, si $2-2p=-1$, esto es, si $p=3/2$, entonces

$$\iiint_{M_n} (x^2+y^2+z^2)^{-p}\,dx\,dy\,dz = 4\pi\,\ln r\big|_1^n = 4\pi\ln n \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

de manera que

$$\iiint_M (x^2+y^2+z^2)^{-p}\,dx\,dy\,dz = \lim_{n\to\infty}\iiint_{M_n}(x^2+y^2+z^2)^{-p}\,dx\,dy\,dz = \lim_{n\to\infty} 4\pi\ln n = \infty.$$

Se concluye que la integral en cuestión converge a $4\pi/(2p-3)$ si, y sólo si, $p > 3/2$.

$\square$

10. Problema 10

Calcular

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \int_0^{1/x} \operatorname{sen}\sqrt{3t}\, e^{-t^2}\, dt.$$

Solución: ∞.

RESOLUCIÓN. Efectuando el cambio de variables $u = 1/x$ vemos que es equivalente calcular

$$\lim_{u\to 0} \frac{1}{u^2} \int_0^{u} \operatorname{sen}\sqrt{3t}\, e^{-t^2}\, dt.$$

Pongamos

$$F(u) = \int_0^{u} \operatorname{sen}\sqrt{3t}\, e^{-t^2}\, dt \qquad (u \in [0,1]).$$

Por el Corolario 3.4 del bloque teórico 1.7, *Integrales paramétricas propias*, se tiene que $\lim_{u\to 0} F(u) = 0$. Consecuentemente, el límite buscado es una indeterminación del tipo «$0/0$», y para resolverla aplicaremos la regla de L'Hopital.

En virtud de la regla de Leibniz para integrales paramétricas propias con límites de integración variables (Proposición 4.2 del bloque teórico antes citado), se verifica:

$$F'(u) = \operatorname{sen}\sqrt{3u}\, e^{-u^2} \qquad (u \in]0,1[).$$

Concluimos que

$$\lim_{u\to 0} \frac{1}{u^2} \int_0^{u} \operatorname{sen}\sqrt{3t}\, e^{-t^2}\, dt = \lim_{u\to 0} \frac{F(u)}{u^2} = \lim_{u\to 0} \frac{F'(u)}{2u} = \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{u\to 0} \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{3u}}{\sqrt{3u}}\, e^{-u^2} = \infty.$$

□

11. Problema 11

Estudiar la continuidad y derivabilidad de las integrales paramétricas siguientes y calcular su derivada donde exista.

(a) $F(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}\lambda x}{x}\, dx.$

(b) $F(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda e^{-\lambda^2 x^2}\, dx.$

Solución: (a) $F'(\lambda) = \dfrac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$; (b) $F'(\lambda) = -2\lambda \displaystyle\int_0^\lambda x^2 e^{-\lambda^2 x^2}\, dx + e^{-\lambda^4} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

RESOLUCIÓN.

(a) Como

$$f(\lambda,x) = \lambda \frac{\operatorname{sen}\lambda x}{\lambda x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,x) = \cos\lambda x \qquad ((\lambda,x) \in \mathbb{R}\times[0,1])$$

son continuas, la regla de Leibniz para integrales paramétricas simples con límites fijos asegura que existe

$$F'(\lambda) = \int_0^1 \cos\lambda x\, dx = \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

En particular, F es continua en $\mathbb{R}$.

(b) Las funciones $a(\lambda) = 0$, $b(\lambda) = \lambda$ son continuas y derivables en el abierto $\Lambda = \mathbb{R}$. Si

$$S(a,b) = \left\{(\lambda,x) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \lambda \in \Lambda,\, a(\lambda) \le x \le b(\lambda)\right\},$$

entonces $f(\lambda,x) = e^{-\lambda^2 x^2}$ y su derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,x) = -2\lambda x^2 e^{-\lambda^2 x^2}$$

son continuas en un entorno abierto de $S(a,b)$. Por tanto, la regla de Leibniz para integrales paramétricas simples con límites variables permite escribir:

$$F'(\lambda) = -2\lambda \int_0^\lambda x^2 e^{-\lambda^2 x^2}\, dx + e^{-\lambda^4} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Siendo derivable, en particular F también es continua en $\mathbb{R}$.

$\square$

12. Problema 12

Estudiar la continuidad y derivabilidad de las integrales paramétricas siguientes y calcular su derivada donde exista.

(a) $F(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \ln(\lambda^2 + x^2)\,dx.$

(b) $F(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda^2} x^5(\lambda - x)^7\,dx.$

Solución: (a) $F'(\lambda) = 2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\lambda}$ $\quad(\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$; $\qquad$ (b) $F'(\lambda) = 2\lambda^{18}(1-\lambda)^7 + 7\lambda^{18}\displaystyle\sum_{i=0}^{6}\frac{(-1)^i}{6+i}\binom{6}{i}\lambda^i$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

RESOLUCIÓN.

(a) Las funciones

$$f(\lambda,x) = \ln(\lambda^2+x^2), \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,x) = \frac{2\lambda}{\lambda^2+x^2} \qquad ((\lambda,x) \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})\times[0,1])$$

son continuas. Por la regla de Leibniz para integrales paramétricas simples con límites fijos,

$$F'(\lambda) = 2\lambda\int_0^1 \frac{dx}{\lambda^2+x^2} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\lambda} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}). \tag{1}$$

En particular, F es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Para analizar su continuidad en el origen, observamos que

$$F(0) = 2\int_{\to 0}^1 \ln x\,dx = [2x\ln x - 2x]_{\to 0}^1 = -2. \tag{2}$$

Integrando ambos miembros de (1) respecto de λ (el segundo miembro por partes) encontramos que

$$F(\lambda) = \ln(1+\lambda^2) + 2\lambda\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\lambda} + C \qquad (\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}). \tag{3}$$

A fin de determinar C, tenemos en cuenta que (también por partes) es

$$\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) + 2\operatorname{arc\,tg}x - 2x + K,$$

así que

$$F(1) = \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = \ln 2 + 2\operatorname{arctg} 1 - 2. \tag{4}$$

Pero en virtud de (3),

$$F(1) = \ln 2 + 2\operatorname{arctg} 1 + C. \tag{5}$$

Comparando (4) y (5) se sigue que $C = -2$.

Ahora, nuevamente por (3),

$$\lim_{\lambda\to 0} F(\lambda) = C = -2. \tag{6}$$

Se infiere de (2) y (6) que F también es continua en $\lambda = 0$. Concluimos que F es continua en $\mathbb{R}$.

(b) Sean $a(\lambda) = 0$, $b(\lambda) = \lambda^2$ ($\lambda \in \Lambda = \mathbb{R}$),

$$S(a,b) = \left\{(\lambda,x) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \lambda \in \Lambda,\ a(\lambda) \le x \le b(\lambda)\right\}$$

y $f(\lambda,x) = x^5(\lambda - x)^7$. Ya que Λ es abierto, a,b son continuas y derivables en Λ y f es continua y derivable respecto de λ en un entorno abierto de $S(a,b)$, la regla de Leibniz para integrales paramétricas simples con límites variables permite escribir:

$$F'(\lambda) = 2\lambda^{18}(1-\lambda)^7 + 7\int_0^{\lambda^2} x^5(\lambda - x)^6\,dx = 2\lambda^{18}(1-\lambda)^7 + 7\lambda^{18}\sum_{i=0}^{6}\frac{(-1)^i}{6+i}\binom{6}{i}\lambda^i \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Siendo derivable, en particular F también es continua en $\mathbb{R}$.

$\square$

13. Problema 13

Demostrar que la integral

$$\int_0^\infty x^\lambda e^{-x}\,dx$$

es uniformemente convergente para $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ cualquiera que sea $\lambda_0 > 0$, pero no para $0 \leq \lambda < \infty$. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función de λ que ella define.

Solución: $F'(\lambda) = \displaystyle\int_0^\infty x^\lambda e^{-x} \ln x\,dx \quad (\lambda \in]1,\infty[)$.

RESOLUCIÓN. Sean $\Lambda = [0,\infty[$, $f(\lambda,x) = x^\lambda e^{-x}$ $((\lambda,x) \in \Lambda\times]0,\infty[)$ y pongamos $F(\lambda) = F_1(\lambda)+F_2(\lambda)$, donde

$$F_1(\lambda) = \int_0^1 f(\lambda,x)\,dx, \quad F_2(\lambda) = \int_1^\infty f(\lambda,x)\,dx \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

La integral paramétrica F_1 es impropia, ya que f no está definida en el origen. Efectuando el cambio de variable $x = 1/t$, $dx = -dt/t^2$ encontramos que

$$F_1(\lambda) = \int_1^\infty \frac{e^{-1/t}}{t^{\lambda+2}}\,dt \leq \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 1 \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

En virtud del criterio de Weierstrass, F_1 converge uniformemente en Λ.

Por otra parte

$$F_2(\lambda) = \int_1^\infty x^\lambda e^{-x}\,dx \leq \int_1^\infty x^{\lambda_0} e^{-x}\,dx \leq \int_0^\infty x^{\lambda_0} e^{-x}\,dx = \lambda_0\Gamma(\lambda_0) < \infty \qquad (\lambda \in [0,\lambda_0]),$$

y sigue del criterio de Weierstrass que F_2 converge uniformemente en $[0,\lambda_0]$. Se concluye que

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(\lambda,x)\,dx \qquad (\lambda \in [0,\lambda_0])$$

es uniformemente convergente. Al ser continuos los respectivos integrandos, F_1, F_2 y, por tanto, F son uniformemente continuas en $[0,\lambda_0]$. La arbitrariedad de λ_0 permite afirmar que F es continua en Λ.

Probaremos que F no es uniformemente convergente en Λ aplicando el criterio de Cauchy. Si $k > 1$ y $h > 0$, se tiene

$$\left|\int_k^{k+h} f(\lambda,x)\,dx\right| = \left|\int_k^{k+h} x^\lambda e^{-x}\,dx\right| \geq hk^\lambda e^{-k-h} > 1$$

siempre que $\lambda > (k+h-\ln h)/\ln k$. Consecuentemente, para todo $k > 1$ existen números reales $b > a \geq k$ tales que

$$\sup_{\lambda\in[0,\infty[}\left|\int_a^b f(\lambda,x)\,dx\right|\geq 1.$$

No se satisface por tanto el criterio de Cauchy, lo que indica que F no es uniformemente convergente en Λ.

Estudiaremos ahora la derivabilidad de F, para lo que procederemos de forma análoga que con la continuidad. Las funciones

$$f(\lambda,x),\quad \frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda,x)\,dx = x^{\lambda}e^{-x}\ln x \qquad ((\lambda,x)\in\Lambda\times]0,\infty[)$$

son continuas. Efectuando el cambio de variable $x=1/t$, $dx=-dt/t^2$ encontramos que

$$\int_0^1\left|\frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda,x)\right|\,dx \leq \int_1^{\infty}\frac{e^{-1/t}}{t^{\lambda-1}}\frac{\ln t}{t}\frac{dt}{t^2}\leq C\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^2}<\infty \qquad (\lambda\in[1,\infty[),$$

$$\int_1^{\infty}\frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda,x)\,dx\leq\int_1^{\infty}x^{\lambda_0}e^{-x}\ln x\,dx\leq C_{\lambda_0}\int_1^{\infty}e^{-x/2}\,dx<\infty \qquad (\lambda\in[0,\lambda_0])$$

para ciertas constantes positivas C, C_{λ_0}. En virtud del criterio de Weierstrass,

$$\int_0^{\infty}\frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda,x)\,dx \qquad (\lambda\in[1,\lambda_0])$$

converge uniformemente. Por otra parte, ya hemos visto que F es convergente en Λ. La regla de Leibniz para integrales paramétricas impropias y la arbitrariedad de λ_0 permiten concluir que F es derivable en $]1,\infty[$, con derivada

$$F'(\lambda)=\int_0^{\infty}x^{\lambda}e^{-x}\ln x\,dx \qquad (\lambda\in]1,\infty[).$$

□

14. Problema 14

Demostrar que la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\lambda^2}$$

es uniformemente convergente para $|\lambda| \geq \lambda_0$, cualquiera que sea $\lambda_0 > 0$. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función de λ que ella define.

Solución: $F'(\lambda) = -2\lambda \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda^2)^2} \quad (\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$.

RESOLUCIÓN. Pongamos $f(\lambda,x) = (x^2+\lambda^2)^{-1}$. Como $|f(\lambda,x)| \leq (x^2+\lambda_0^2)^{-1}$ $(|\lambda| \geq \lambda_0,\ x \in [0,\infty[)$, el criterio de Weierstrass garantiza que

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(\lambda,x)\,dx \qquad (|\lambda| \geq \lambda_0)$$

converge uniformemente.

Para estudiar la derivabilidad de F, tenemos en cuenta además que

$$f(\lambda,x), \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,x) = -2\lambda(x^2+\lambda^2)^{-2} \qquad (|\lambda| \geq \lambda_0,\ x \in [0,\infty[)$$

son continuas y que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,x)\right| \leq -2\lambda_1(x^2+\lambda_0^2)^{-2} \qquad (\lambda_1 \geq |\lambda| \geq \lambda_0,\ x \in [0,\infty[),$$

de modo que (criterio de Weierstrass)

$$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,x)\,dx \qquad (\lambda_1 \geq |\lambda| \geq \lambda_0)$$

converge uniformemente. La regla de Leibniz para integrales paramétricas impropias asegura entonces que F es derivable (por tanto, continua) para $\lambda_1 > |\lambda| > \lambda_0$, con

$$F'(\lambda) = -2\lambda \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda^2)^2} \qquad (\lambda_1 > |\lambda| > \lambda_0).$$

La arbitrariedad de λ_0 y λ_1 prueba que

$$F'(\lambda) = -2\lambda \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda^2)^2} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}).$$

Notemos que

$$F(0) = \int_0^\infty x^{-2}\,dx = \infty$$

y que esta discontinuidad no es evitable, ya que

$$F(\lambda) = \frac{\pi}{2|\lambda|} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

implica $\lim_{\lambda\to 0} F(\lambda) = \infty$.

□

15. Problema 15

(a) Demostrar que

$$I(t) = \int_0^\infty xe^{-x} \cos tx \, dx$$

converge uniformemente en cualquier intervalo $[a,b]$.

(b) Hallar $I(t)$, sabiendo que

$$\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen} tx \, dx = \frac{t}{1+t^2} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Solución: (b) $I(t) = \dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \quad (t \in \mathbb{R})$.

RESOLUCIÓN.

(a) Se tiene que $|xe^{-x} \cos tx| \leq xe^{-x}$ $(t \in \mathbb{R})$, con

$$\int_0^\infty xe^{-x} \, dx = 1.$$

El criterio de Weierstrass garantiza entonces que

$$I(t) = \int_0^\infty xe^{-x} \cos tx \, dx \qquad (t \in \mathbb{R})$$

converge uniformemente.

(b) Consideremos la integral

$$\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen} tx \, dx = \frac{t}{1+t^2} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Se cumple que:

- El integrando es continuo, con derivada parcial continua respecto a t.
- La integral converge para todo $t \in \mathbb{R}$ (aunque para nuestros propósitos es suficiente que converja para algún $t \in \mathbb{R}$).
- La integral

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{-x} \operatorname{sen} tx \right] \, dx = \int_0^\infty xe^{-x} \cos tx \, dx \qquad (t \in \mathbb{R})$$

converge uniformemente (por (a)).

Cabe entonces aplicar la regla de Leibniz para obtener:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^\infty xe^{-x}\cos tx\,dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-x}\operatorname{sen} tx\right]\,dx \\ &= \frac{d}{dt}\int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen} tx\,dx = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{1+t^2}\right) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \qquad (t\in\mathbb{R}). \end{aligned}$$

□

16. Problema 16

Hallar

$$\int_0^\infty x^2 e^{-tx}\,dx$$

para $t \geq t_0 > 0$.

Solución: $\dfrac{2}{t^3}$.

RESOLUCIÓN. Sea $0 < \varepsilon < t_0$. Se tiene que

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\,dx = \frac{1}{t} \qquad (t > 0). \tag{7}$$

Las funciones

$$f(t,x) = e^{-tx}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -xe^{-tx} \qquad ((t,x) \in]\varepsilon,\infty[\times[0,\infty[)$$

son continuas y la integral

$$\int_0^\infty -xe^{-tx}\,dx \qquad (t \geq \varepsilon)$$

converge uniformemente en virtud del criterio de Weierstrass, ya que $|-xe^{-tx}| \leq xe^{-\varepsilon x}$ e (integrando por partes)

$$\int_0^\infty xe^{-\varepsilon x}\,dx < \infty.$$

Por tanto, en (7) podemos derivar miembro a miembro aplicando la regla de Leibniz para obtener

$$F'(t) = \int_0^\infty -xe^{-tx}\,dx = -\frac{1}{t^2} \qquad (t > \varepsilon). \tag{8}$$

Similarmente, las funciones

$$g(t,x) = -xe^{-tx}, \quad \frac{\partial g}{\partial t}(t,x) = x^2 e^{-tx} \qquad ((t,x) \in]\varepsilon,\infty[\times[0,\infty[)$$

son continuas y la integral

$$\int_0^\infty x^2 e^{-tx}\,dx \qquad (t \geq \varepsilon)$$

converge uniformemente en virtud del criterio de Weierstrass, ya que $x^2e^{-tx} \leq x^2e^{-\varepsilon x}$ e (integrando por partes)

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\varepsilon x}\,dx < \infty.$$

Por tanto, en (8) podemos derivar miembro a miembro aplicando la regla de Leibniz para obtener

$$F''(t) = \int_0^\infty x^2 e^{-tx}\,dx = \frac{2}{t^3} \qquad (t > \varepsilon).$$

En particular,

$$\int_0^\infty x^2 e^{-tx}\,dx = \frac{2}{t^3} \qquad (t \geq t_0).$$

□

17. Problema 17

Calcular

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}-1}{\ln x}\,dx.$$

Solución: $\ln n$.

RESOLUCIÓN. Sea

$$I(t)=\int_0^1 \frac{x^{t-1}-1}{\ln x}\,dx \qquad (t\geq 1).$$

La función

$$f(t,x)=\frac{x^{t-1}-1}{\ln x} \qquad (t\geq 1,\ 0\leq x\leq 1)$$

puede ser considerada continua, ya que, aunque en principio no está definida en el punto $(1,0)$, se tiene:

$$\lim_{(t,x)\to(1,0)}\left|\frac{x^{t-1}-1}{\ln x}\right| = \lim_{(t,x)\to(1,0)}\left|\int_1^t x^{s-1}\,ds\right| \leq \lim_{(t,x)\to(1,0)}(t-1)=0.$$

Consecuentemente, $I(t)$ es uniformemente continua en cualquier intervalo compacto $1\leq t\leq t_0$ y, en particular, continua si $t\geq 1$.

Por otra parte,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)=x^{t-1} \qquad (t>1,\ 0\leq x\leq 1)$$

es continua.

Así pues, podemos aplicar la regla de Leibniz para integrales paramétricas simples con límites fijos y obtener

$$I'(t)=\int_0^1 x^{t-1}\,dx=\frac{1}{t} \qquad (t>1).$$

Integrando ahora respecto de t encontramos que $I(t)=\ln t+C$ $(t>1)$ y, por continuidad, $I(t)=\ln t+C$ $(t\geq 1)$. Para determinar C basta advertir que $C=I(1)=0$.

$\square$

18. Problema 18

Calcular

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1 + a \operatorname{sen}^2 x) \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x},$$

siendo $a > -1$.

Solución: $\pi\left(\sqrt{1+a} - 1\right)$.

RESOLUCIÓN. Llamamos $I(a)$ a la integral paramétrica que se quiere calcular. Derivando paramétricamente,

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a \operatorname{sen}^2 x}. \tag{9}$$

Esta derivación es lícita ya que (aplicando L'Hôpital)

$$\lim_{x \to 0} \ln(1 + a \operatorname{sen}^2 x) \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = a,$$

por lo que puede considerarse que

$$f(a,x) = \ln(1 + a \operatorname{sen}^2 x) \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad \frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = \frac{1}{1 + a \operatorname{sen}^2 x} \qquad \left((a,x) \in]-1, \infty[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

son continuas, lo que permite aplicar la regla de Leibniz para integrales paramétricas simples con límites fijos.

La integral del segundo miembro de (9) se calcula mediante el cambio $\operatorname{tg} x = t$ y resulta

$$I'(a) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}};$$

luego, $I(a) = \pi\sqrt{1+a} + C$. Como $I(0) = 0$, necesariamente $C = -\pi$.

$\square$