Problemas resueltos

Integración sobre curvas

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Problema 1

Sea C el contorno del triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Calcular:

(a) la longitud de C;

(b) la integral

$$\oint_C (x+y)\, ds.$$

Solución: (a) $2+\sqrt{2}$; (b) $1+\sqrt{2}$.

RESOLUCIÓN. Escribimos $C = C_1 + C_2 + C_3$, donde $C_1 : \overline{\alpha}_1(t) = (t,0)$ $(0 \le t \le 1)$, $C_2 : \overline{\alpha}_2(t) = (t,1-t)$ $(0 \le t \le 1)$ y $C_3 : \overline{\alpha}_3(t) = (0,t)$ $(0 \le t \le 1)$ (Figura 1).

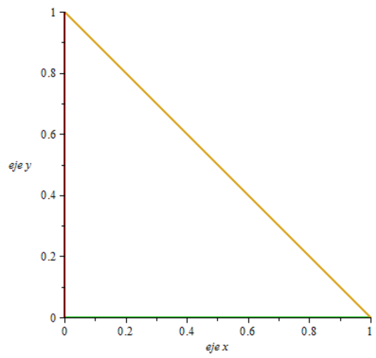

Figura 1.

Entonces

$$\overline{\alpha}_1'(t) = (1,0), \quad \overline{\alpha}_2'(t) = (1,-1), \quad \overline{\alpha}_3'(t) = (0,1) \qquad (0 \le t \le 1),$$

con

$$\|\overline{\alpha}_1'(t)\| = \|\overline{\alpha}_3'(t)\| = 1, \quad \|\overline{\alpha}_2'(t)\| = \sqrt{2} \qquad (0 \le t \le 1).$$

(a) Se tiene:

$$\int_{C_1} ds = \int_{C_3} ds = \int_0^1 dt = 1, \qquad \int_{C_2} ds = \sqrt{2}\int_0^1 ds = \sqrt{2}.$$

Consecuentemente,

$$\oint_C ds = \int_{C_1} ds + \int_{C_2} ds + \int_{C_3} ds = 2+\sqrt{2}.$$

(b) Por otra parte:

$$\int_{C_1} (x+y)\, ds = \int_{C_3} (x+y)\, ds = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2},$$

$$\int_{C_2} (x+y)\, ds = \sqrt{2} \int_0^1 \, ds = \sqrt{2}.$$

Consecuentemente,

$$\oint_C (x+y)\, ds = \int_{C_1} (x+y)\, ds + \int_{C_2} (x+y)\, ds + \int_{C_3} (x+y)\, ds = 1 + \sqrt{2}.$$

$\square$

2. Problema 2

Se considera la hélice circular $C : \overline{\alpha}(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, bt)$, con $t \in [0, c]$.

(a) Determinar la longitud de C.

(b) Calcular

$$\int_C z\,ds.$$

Solución: (a) $c\sqrt{a^2+b^2}$; (b) $\dfrac{bc^2\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

RESOLUCIÓN. La curva C (para $a = b = 1$ y $c = 4\pi$) se representa en la Figura 2.

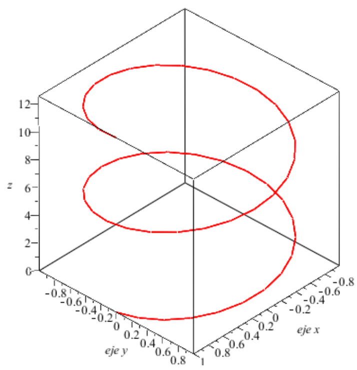

Figura 2.

Se tiene:

$$\overline{\alpha}'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b), \quad \|\overline{\alpha}'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad (0 \le t \le c).$$

(a) La longitud pedida vale

$$\int_C ds = \int_0^c \|\overline{\alpha}'(t)\|\,dt = c\sqrt{a^2+b^2}.$$

(a) La integral pedida vale

$$\int_C z\,ds = b\int_0^c t\|\overline{\alpha}'(t)\|\,dt = b\sqrt{a^2+b^2}\int_0^c t\,dt = \frac{bc^2\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

$\square$

3. Problema 3

Sea la trayectoria $\overline{\sigma}(t) = (2t, t^2, \ln t)$, definida para $t > 0$. Hallar la longitud de arco de $\overline{\sigma}$ entre los puntos $(2,1,0)$ y $(4,4,\ln 2)$.

Solución: $3 + \ln 2$.

RESOLUCIÓN. Cotejando los dos puntos con la parametrización de la curva constatamos que los valores del parámetro para los que se obtienen estos puntos son $t = 1$ y $t = 2$, respectivamente. Por otra parte,

$$\overline{\sigma}'(t) = \left(2, 2t, \frac{1}{t}\right) \qquad (t > 0)$$

y

$$\|\overline{\sigma}'(t)\| = \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}} = \sqrt{\frac{4t^4 + 4t^2 + 1}{t^2}} = \sqrt{\frac{(2t^2+1)^2}{t^2}} = \frac{2t^2+1}{t} = 2t + \frac{1}{t} \qquad (t > 0).$$

De este modo, la longitud L del arco entre ambos puntos será:

$$L = \int_1^2 \|\overline{\sigma}'(t)\|\, dt = \int_1^2 \left(2t + \frac{1}{t}\right) dt = \left[t^2 + \ln t\right]_1^2 = 3 + \ln 2.$$

□

4. Problema 4

Calcular la integral de línea del campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = (8x+z)\overline{i} + 2xz^2\overline{j} - 4y^2\overline{k}$ a lo largo de la curva definida por las ecuaciones $z = 9 - 2x^2 - 4y^2$, $z = 1$, con orientación positiva si se observa desde lo alto del eje OZ.

Solución: $4\pi\sqrt{2}$.

RESOLUCIÓN. La intersección de las superficies $z = 9 - 2x^2 - 4y^2$, $z = 1$ es la elipse $x^2 + 2y^2 = 4$ en el plano de altura $z = 1$ (Figura 3); por tanto, podemos parametrizar esta curva (llamémosla C) mediante $\overline{\alpha}(t) = (2\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, 1)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

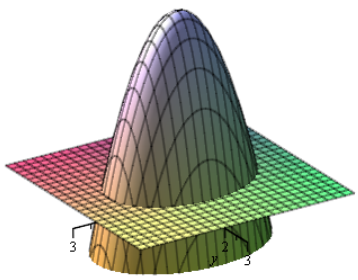

Figura 3.

Ahora, $\overline{\alpha}'(t) = (-2\operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t, 0)$ y $\overline{F}[\overline{\alpha}(t)] = (16\cos t + 1, 4\cos t, -8\operatorname{sen}^2 t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$, de modo que

$$\overline{F}[\overline{\alpha}(t)] \cdot \overline{\alpha}'(t) = -32\operatorname{sen} t\cos t - 2\operatorname{sen} t + 4\sqrt{2}\cos^2 t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Finalmente,

$$\oint_C \overline{F} \cdot d\overline{\alpha} = \int_0^{2\pi} \overline{F}[\overline{\alpha}(t)] \cdot \overline{\alpha}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (-32\operatorname{sen} t\cos t - 2\operatorname{sen} t + 4\sqrt{2}\cos^2 t)\, dt = 4\pi\sqrt{2}.$$

$\square$

5. Problema 5

Se considera el campo vectorial $\overline{F}(x,y) = (y^2+2xy, x^2+2xy)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$.

(a) Comprobar que $\overline{F}$ admite función potencial en todo $\mathbb{R}^2$ y hallarla.

(b) Calcular la integral de $\overline{F}$ a lo largo de cualquier curva regular a trozos que una los puntos $(0,0)$ y $(2,1)$.

(c) Calcular la circulación de $\overline{F}$ a lo largo de cualquier curva cerrada regular a trozos.

Solución: (a) $\Phi(x,y) = x^2y+y^2x+C$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$; (b) 6; (c) 0.

RESOLUCIÓN.

(a) Sean $P(x,y) = y^2+2xy$, $Q(x,y) = x^2+2xy$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$. Como $P, Q \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ y $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, la condición necesaria y suficiente para que $\overline{F}$ admita una función potencial Φ en todo $\mathbb{R}^2$ es que $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ en $\mathbb{R}^2$. Pero, en efecto:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x+2y = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Por simple inspección se advierte que $\Phi(x,y) = x^2y+y^2x+C$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$, siendo C una constante arbitraria.

(b) Conociendo el potencial Φ podemos calcular la integral como la diferencia de potencial entre el extremo y el origen de la curva: $\Phi(2,1)-\Phi(0,0) = 6$.

(c) Puesto que $\overline{F}$ es conservativo, la circulación es 0.

$\square$

6. Problema 6

Probar que la integral

$$\int_C (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy$$

es independiente del camino que une los puntos $(1,2)$ y $(3,4)$. Hallar su valor mediante:

(a) un cálculo directo, aplicando la definición;

(b) una función potencial del integrando.

Solución: 236.

RESOLUCIÓN. Ya que $P(x,y) = 6xy^2 - y^3$ y $Q(x,y) = 6x^2y - 3xy^2$ son de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ y se cumple

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy - 3y^2 = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

el campo $\overline{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ es conservativo, y la integral

$$\int_C \overline{F} \cdot\, ds = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

es independiente del camino C que una $(1,2)$ con $(3,4)$.

(a) Podemos tomar como C el segmento rectilíneo determinado por ambos puntos. Una parametrización de este segmento con la orientación indicada es $\overline{\alpha}(t) = t(3,4) + (1-t)(1,2) = (1+2t, 2+2t)$, con $\overline{\alpha}'(t) = (2,2)$ $(0 \le t \le 1)$.

Así:

$$\begin{aligned} \overline{F}[\overline{\alpha}(t)] &= \big(24(1+2t)(1+t)^2 - 8(1+t)^3, 12(1+2t)^2(1+t) - 12(1+2t)(1+t)^2\big) \\ &= 4\left(4 + 18t + 24t^2 + 10t^3, 3t + 9t^2 + 6t^3\right) \qquad (0 \le t \le 1), \end{aligned}$$

$$\overline{F}[\overline{\alpha}(t)] \cdot \overline{\alpha}'(t) = 8(4 + 21t + 33t^2 + 16t^3) \qquad (0 \le t \le 1).$$

Por tanto,

$$\int_C \overline{F} \cdot\, ds = \int_0^1 \overline{F}[\overline{\alpha}(t)] \cdot \overline{\alpha}'(t)\,dt = 8\int_0^1 (4 + 21t + 33t^2 + 16t^3)\,dt = 8\left[4t + \frac{21}{2}t^2 + 11t^3 + 4t^4\right]_0^1 = 236.$$

(b) Sea $\Phi(x,y)$ la función potencial del campo $\overline{F}$. Integrando miembro a miembro respecto de x la ecuación

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 6xy^2 - y^3$$

resulta $\Phi(x,y) = 3x^2y^2 - xy^3 + \varphi(y)$. Si ahora imponemos que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 6x^2y - 3xy^2 + \varphi'(y) = 6x^2y - 3xy^2$$

obtenemos $\varphi'(y) = 0$ y de aquí $\varphi(y) = K$, donde K denota una constante arbitraria. Así pues, $\Phi(x,y) = 3x^2y^2 - xy^3 + K$. Concluimos que

$$\int_C \overline{F} \cdot ds = \Phi(3,4) - \Phi(1,2) = 240 - 4 = 236.$$

$\square$

7. Problema 7

(a) Demostrar que el campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = (\operatorname{sen} x, y^2, e^z)$ es conservativo.

(b) Suponiendo que $\overline{F}$ representa un campo de fuerzas, hallar el trabajo efectuado por $\overline{F}$ para desplazar una masa unidad del punto $(0,1,0)$ al punto $(0,0,1)$.

Solución: (b) $e - \dfrac{4}{3}$.

RESOLUCIÓN.

(a) Por inspección se advierte que una función potencial de $\overline{F}$ en $\mathbb{R}^3$ es

$$\Phi(x,y,z) = -\cos x + \frac{1}{3}y^3 + e^z,$$

pues claramente satisface $\nabla\Phi = \overline{F}$.

(b) Consecuentemente, el trabajo pedido es igual a la diferencia de potencial

$$\Phi(0,0,1) - \Phi(0,1,0) = e - \frac{4}{3}.$$

□

8. Problema 8

¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = (axy - z^3, (a-2)x^2, (1-a)xz^2)$ es el gradiente de una función potencial? Para esos valores, calcular la función potencial.

Solución: $a = 4$; $\Phi(x,y,z) = 2x^2y - xz^3 + C$.

RESOLUCIÓN. Si $\overline{F}$ es un campo gradiente entonces rot $\overline{F} = \overline{0}$. Imponiendo esta condición encontramos que se debe tener:

$$\frac{\partial[(a-2)x^2]}{\partial z} = \frac{\partial[(1-a)xz^2]}{\partial y},$$

$$\frac{\partial(axy - z^3)}{\partial y} = \frac{\partial[(a-2)x^2]}{\partial x},$$

$$\frac{\partial[(1-a)xz^2]}{\partial x} = \frac{\partial(axy - z^3)}{\partial z}.$$

La primera ecuación no aporta ninguna restricción sobre a. La segunda se traduce en que $ax = 2(a-2)x$, de donde (dada la arbitrariedad de x) deducimos que $a = 4$. De la tercera se sigue que $(1-a)z^2 = -3z^2$, y (ahora por la arbitrariedad de z) inferimos nuevamente que $a = 4$.

Para $a = 4$ es $\overline{F}(x,y,z) = (4xy - z^3, 2x^2, -3xz^2)$. Llamando Φ a la función potencial de $\overline{F}$, debemos tener $\overline{F} = \nabla\Phi$. En particular,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2x^2.$$

Integrando esta expresión término a término respecto de y resulta

$$\Phi(x,y,z) = 2x^2y + \varphi(x,z). \tag{1}$$

Para determinar φ, derivamos (1) respecto de x e imponemos que esta derivada coincida con la primera componente de $\overline{F}$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 4xy + \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 4xy - z^3.$$

De aquí,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -z^3.$$

Integramos ahora término a término respecto de x para obtener $\varphi(x,z) = -xz^3 + \psi(z)$, e incorporamos esta expresión a (1):

$$\Phi(x,y,z) = 2x^2y - xz^3 + \psi(z). \tag{2}$$

Finalmente, derivamos (2) respecto de z imponiendo que esta derivada coincida con la tercera componente de $\overline{F}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -3xz^2 + \psi'(z) = -3xz^2,$$

lo que proporciona $\psi(z) = C$, siendo C una constante arbitraria. Insertando esta expresión en (2) concluimos que la función potencial de $\overline{F}$ es $\Phi(x,y,z) = 2x^2y - xz^3 + C$.

□

9. Problema 9

Calcular

$$\int_C (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy - xy\,dz$$

a lo largo de cualquier curva uniendo el origen de coordenadas con el punto $P(1,1/2,1/2)$.

Solución: $\frac{1}{8}$.

RESOLUCIÓN. Pongamos

$$P(x,y,z) = x^2 - yz, \quad Q(x,y,z) = y^2 - xz, \quad R(x,y,z) = -xy \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3).$$

Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -z = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -x = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = -y = \frac{\partial P}{\partial z} \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3).$$

Como $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo, el campo $\overline{F} = (P,Q,R)$ admite función potencial o, equivalentemente, tiene una integral de línea independiente del camino.

Se abren ahora dos opciones:

- Determinar la función potencial $\Phi = \Phi(x,y,z)$ y calcular la integral como la diferencia de potencial entre el extremo y el origen de la curva. Por el procedimiento habitual encontramos que

$$\Phi(x,y,z) = \frac{x^3}{3} - xyz + \frac{y^3}{3} + K,$$

donde K representa una constante arbitraria. La integral pedida es entonces

$$\Phi\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \Phi(0,0,0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

- Calcular la integral a lo largo de cualquier camino C que una los puntos considerados, por ejemplo $\overline{\alpha}(t) = (t, t/2, t/2)$ $(0 \le t \le 1)$. Para $0 \le t \le 1$:

$$\overline{F}[\overline{\alpha}(t)] = \left(\frac{3t^2}{4}, -\frac{t^2}{4}, -\frac{t^2}{2}\right), \quad \overline{\alpha}'(t) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \overline{F}[\overline{\alpha}(t)] \cdot \overline{\alpha}'(t) = \frac{3t^2}{4} - \frac{t^2}{8} - \frac{t^2}{4} = \frac{3t^2}{8}.$$

Por tanto, la integral pedida vale

$$\int_C (x^2 - yz)\, dx + (y^2 - xz)\, dy - xy\, dz = \frac{3}{8} \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{8}.$$

$\square$

10. Problema 10

Sea γ la circunferencia $(x-2)^2+y^2=4$, orientada positivamente. Usar el teorema de Green para calcular

$$\oint_\gamma (x^2+2y^3)\,dy.$$

Solución: 16π.

RESOLUCIÓN. El círculo D encerrado por γ (Figura 4) puede ser descrito en coordenadas polares mediante las ecuaciones $x=2+r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, con $|J(r,\theta)|=r$ $(0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 2)$.

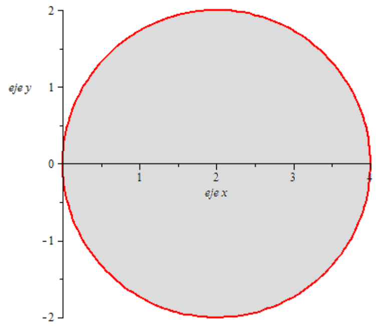

Figura 4.

Por tanto,

$$\begin{aligned}\oint_\gamma (x^2+2y^3)\,dy &= \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+2y^3\right)\,dx\,dy\\ &= 2\iint_D x\,dx\,dy\\ &= 2\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 r(2+r\cos\theta)\,dr\\ &= 2\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 (2r+r^2\cos\theta)\,dr\\ &= 16\pi.\end{aligned}$$

□

11. Problema 11

Evaluar

$$\oint_C y\,dx + x\,dy$$

a lo largo de la curva cerrada C compuesta por el primer cuadrante de la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ y el segmento rectilíneo que une los puntos $(0,3)$ y $(4,0)$:

(a) directamente;

(b) mediante el teorema de Green.

Solución: 0.

RESOLUCIÓN. La Figura 5 representa la curva C y el recinto D que encierra.

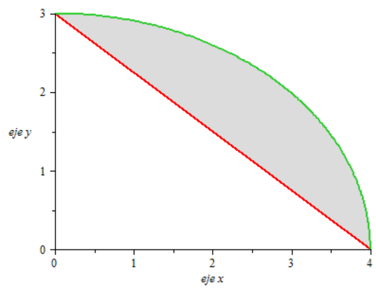

Figura 5.

(a) La curva C se compone de dos tramos: el segmento rectilíneo C_1, y el cuadrante de elipse C_2. Una parametrización de C_1 es $x_1(t) = t$, $y_1(t) = 3 - 3t/4$ $(0 \le t \le 4)$. Ya que $x_1'(t) = 1$, $y_1'(t) = -3/4$ $(0 \le t \le 4)$, y se tiene

$$\left(3 - \frac{3t}{4}, t\right) \cdot \left(1, -\frac{3}{4}\right) = 3 - \frac{3t}{2} \qquad (0 \le t \le 4),$$

encontramos que

$$\int_{C_1} y\,dx + x\,dy = \int_0^4 \left(3 - \frac{3t}{2}\right)\,dt = \left[3t - \frac{3t^2}{4}\right]_0^4 = 12 - 12 = 0.$$

Una parametrización de C_2 es $x_2(t) = 4\cos t$, $y_2(t) = 3\,\mathrm{sen}\,t$ $(0 \le t \le \pi/2)$. Ya que $x_2'(t) = -4\,\mathrm{sen}\,t$,

$y_2'(t) = 3\cos t$ $(0 \le t \le \pi/2)$, y se tiene

$$(3\,\mathrm{sen}\,t, 4\cos t)\cdot(-4\,\mathrm{sen}\,t, 3\cos t) = 12\cos 2t \qquad \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right),$$

encontramos que

$$\int_{C_2} y\,dx + x\,dy = 12\int_0^{\pi/2} \cos 2t\,dt = 6\,\mathrm{sen}\,2t\Big|_0^{\pi/2} = 0.$$

Consecuentemente,

$$\oint_C y\,dx + x\,dy = \int_{C_1} y\,dx + x\,dy \;+\; \int_{C_2} y\,dx + x\,dy = 0.$$

(b) El teorema de Green establece que

$$\oint_C y\,dx + x\,dy = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy = \iint_D (1-1)\,dx\,dy = 0.$$

□

12. Problema 12

Se considera la región plana $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2x,\ x^2+y^2 \geq 2\}$.

(a) Hallar el área de R por integración doble.

(b) Sea C la curva frontera de R, orientada positivamente. Determinar la longitud de C.

(c) Usar el teorema de Green para obtener el área de R mediante una integral de línea.

(d) También mediante el teorema de Green, evaluar la integral de línea

$$\oint_C (2xy - y^2)\,dx + (x^2+y)\,dy.$$

Solución: (a), (c) 1; (b) $\pi\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (d) 0.

RESOLUCIÓN. La ecuación $x^2+y^2 \leq 2x$ corresponde al círculo de centro $(1,0)$ y radio 1, mientras que la ecuación $x^2+y^2 \geq 2$ representa el exterior de la circunferencia de centro en el origen y radio $\sqrt{2}$. Se trata por tanto de hallar el área encerrada por la circunferencia $x^2+y^2 = 2x$ que es exterior a la circunferencia $x^2+y^2 = 2$ (Figura 6). La intersección de ambas circunferencias se produce en los puntos $(1,\pm 1)$.

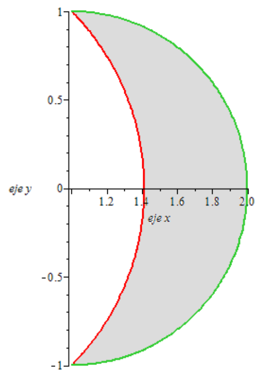

Figura 6.

(a) Calculamos el área pedida efectuando un cambio a polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $|J(r,\theta)| = r$, $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$, $\sqrt{2} \leq r \leq 2\cos\theta$, de modo que

$$\iint_R dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta} r\,dr = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(4\cos^2\theta - 2\right) d\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$$

(b) Sea C la curva frontera de R, con orientación positiva. Escribimos $C = C_1 - C_2$, donde C_1 está parametrizada por $\bar{r}_1(t) = (1+\cos t, \operatorname{sen} t)$ $(-\pi/2 \leq t \leq \pi/2)$ y C_2 por $\bar{r}_2(t) = \sqrt{2}\,(\cos t, \operatorname{sen} t)$ $(-\pi/4 \leq t \leq \pi/4)$. Entonces

$$\|\bar{r}_1'(t)\| = 1 \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right), \qquad \|\bar{r}_2'(t)\| = \sqrt{2} \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}\right).$$

Se concluye que

$$\int_C ds = \int_{C_1} ds + \int_{C_2} ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt + \sqrt{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} dt = \pi\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(c) En la notación de (b), el teorema de Green asegura que el área de R es igual a

$$\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_{C_1} x\,dy - y\,dx - \frac{1}{2}\int_{C_2} x\,dy - y\,dx.$$

Valiéndonos de las mismas parametrizaciones que en (b), encontramos que:

$$\int_{C_1} x\,dy - y\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\operatorname{sen} t, 1+\cos t)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos t)\,dt = \pi + 2$$

y

$$\int_{C_2} x\,dy - y\,dx = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (-\operatorname{sen} t, \cos t)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} dt = \pi.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}[(\pi+2) - \pi] = 1.$$

(d) El teorema de Green establece que

$$\oint_C (2xy - y^2)\,dx + (x^2+y)\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - y^2)\right] dx\,dy = 2\iint_R y\,dx\,dy.$$

Puesto que R es simétrico respecto de $y = 0$ (eje OX) y el integrando es impar en y, concluimos que

$$\oint_C (2xy - y^2)\,dx + (x^2+y)\,dy = 0.$$

□

13. Problema 13

Calcular el área de la región D del primer cuadrante comprendida entre las curvas $y^2 = 2x$, $2x + y = 20$, $y = 0$:

(a) mediante una integral doble;

(b) mediante una integral de línea.

Solución: $\dfrac{76}{3}$.

RESOLUCIÓN. La región D puede verse en la Figura 7.

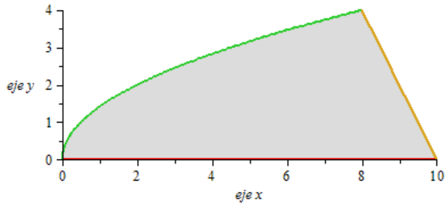

Figura 7.

(a) Considerando D como región de tipo II:

$$D = \int_0^4 dy \int_{y^2/2}^{(20-y)/2} dx = \int_0^4 \left(10 - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2}\right) dy = \left[10y - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{6}\right]_0^4 = \frac{76}{3}.$$

(b) Aplicaremos el teorema de Green escribiendo la integral de área como la integral de línea de una forma diferencial $P\,dx + Q\,dy$ elegida de manera que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

Si, por ejemplo, tomamos $Q(x,y) = x$, $P(x,y) = 0$, se tiene

$$|D| = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\gamma x\,dy,$$

donde γ denota la frontera de D con orientación canónica. Para calcular esta última integral escribimos $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, donde γ_1, γ_2 y γ_3 denotan los tramos de γ situados sobre las curvas $y^2 = 2x$, $y = 0$ y

$2x+y=20$, respectivamente. Parametrizamos estos arcos de la siguiente manera:

$$-\overline{\gamma}_1(t)=\left(\frac{t^2}{2},t\right),\quad -\overline{\gamma}_1'(t)=(t,1)\qquad (0\le t\le 4);$$

$$\overline{\gamma}_2(t)=(t,0),\quad \overline{\gamma}_2'(t)=(1,0)\qquad (0\le t\le 10);$$

$$\overline{\gamma}_3(t)=(10-t,2t),\quad \overline{\gamma}_3'(t)=(-1,2)\qquad (0\le t\le 2).$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
|D| &= \int_\gamma x\,dy=-\int_0^4\left(0,\frac{t^2}{2}\right)\cdot(t,1)\,dt+\int_0^{10}(0,t)\cdot(1,0)\,dt+\int_0^2(0,10-t)\cdot(-1,2)\,dt\\
&= -\int_0^4\frac{t^2}{2}\,dt+\int_0^2(20-2t)\,dt=-\left[\frac{t^3}{6}\right]_0^4+\left[20t-t^2\right]_0^2=40-4-\frac{32}{3}=\frac{76}{3}.
\end{aligned}$$

□

14. Problema 14

Sea R la región plana limitada por las curvas

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 9, \quad x + y = 4, \quad x + y = 6.$$

Mediante el cambio de variables $u = x + y$, $v = x - y$ se transforma R en otra región T.

(a) Calcular el área de R utilizando T.

(b) Siendo C la frontera de R recorrida en sentido positivo, calcular el valor de la integral de línea

$$\oint_C (x^2 - y^2)\,dx + (x^2 - 4)\,dy.$$

Solución: (a) $4\ln\dfrac{3}{2}$; (b) 16.

RESOLUCIÓN. El recinto R se muestra en la Figura 8.

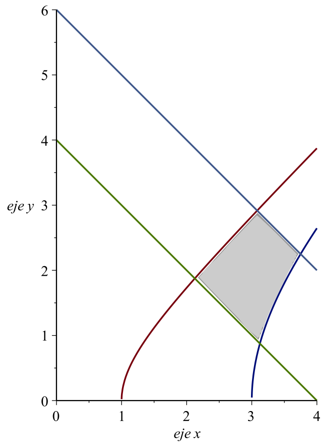

Figura 8.

(a) El cambio propuesto transforma las hipérbolas $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$ en las hipérbolas $uv = 1$, $uv = 9$, mientras que las rectas $x + y = 4$, $x + y = 6$ son transformadas en las rectas verticales $u = 4$, $u = 6$, respectivamente. Por tanto,

$$T = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : 4 \le u \le 6,\ \frac{1}{u} \le v \le \frac{9}{u} \right\},$$

una región de tipo I. En valor absoluto, el jacobiano del cambio es $|J(u,v)| = 1/2$. Aplicando el teorema del cambio de variables obtenemos:

$$|R| = \iint_R dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_T du\,dv = \frac{1}{2}\int_4^6 du \int_{1/u}^{9/u} dv = 4\ln u\Big|_4^6 = 4\ln\frac{6}{4} = 4\ln\frac{3}{2}.$$

(b) Estamos en condiciones de aplicar el teorema de Green. Para resolver la integral doble que resulta usaremos el mismo cambio de variable anterior:

$$\begin{aligned}\oint_C (x^2-y^2)\,dx + (x^2-4)\,dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2-4) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)\right] dx\,dy = 2\iint_R (x+y)\,dx\,dy \\ &= \iint_T u\,du\,dv = \int_4^6 u\,du \int_{1/u}^{9/u} dv = 8\int_4^6 du = 16.\end{aligned}$$

□

15. Problema 15

(a) Justificar la siguiente afirmación: si P, Q son derivables con continuidad en un dominio triplemente conexo $R \subset \mathbb{R}^2$ y si $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en R, entonces existen a lo sumo siete valores posibles distintos para las integrales

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy$$

tomadas sobre curvas de Jordan regulares a trozos C situadas en R.

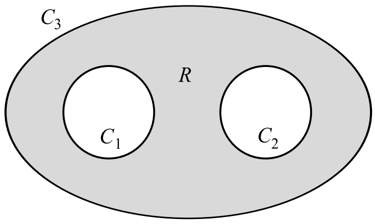

Figura 9.

(b) Obtener todos esos posibles valores en el dominio de la Figura 9, si se sabe que

$$I_1 = \oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = 3, \quad I_2 = \oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy = -1.$$

Solución: (b) ± 3, ∓ 1, ± 2, 0.

RESOLUCIÓN.

(a) Supongamos que R es un dominio triplemente conexo con dos agujeros H_i $(i = 1,2)$. Sea C una curva de Jordan regular a trozos en R, y sea C_i una curva de Jordan regular a trozos en R, positivamente orientada, que rodea H_i $(i = 1,2)$ sin intersectar C. Supongamos que la integral a lo largo de C_i vale a_i $(i = 1,2)$. Por el teorema de invariancia de la integral de línea por deformación del camino, las posibilidades son las siguientes:

- C rodea H_1 pero no H_2. Entonces la integral a lo largo de C vale a_1 si la orientación de C es positiva, y $-a_1$ si es negativa.
- C rodea H_2 pero no H_1. Entonces la integral a lo largo de C vale a_2 si la orientación de C es positiva, y $-a_2$ si es negativa.
- C rodea H_1 y H_2. Entonces la integral a lo largo de C vale $a_1 + a_2 = b$ si la orientación de C es positiva, y $-b$ si es negativa.

- C no rodea H_1 ni H_2. Entonces la integral a lo largo de C con cualquier orientación vale 0.

(b) De acuerdo con lo anterior, los siete valores posibles son: $\pm 3, \mp 1, \pm 2, 0$.

$\square$