Integración sobre curvas

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

OCW-ULL 2011/12: Cálculo Integral Vectorial

Instrucciones

A continuación se muestra una relación de problemas resueltos sobre integrales de línea.

- Selecciona un enunciado en el menú de la derecha e intenta resolver el problema por tus propios medios.
- Pulsa en **Resolución.** para ver una forma de resolver el problema.
- Pulsa en ▶ para continuar viendo la resolución del problema.
- Pulsa en ■ para regresar al enunciado del mismo problema, o usa el menú para seleccionar otro diferente.
- Pulsa dos veces sobre el botón *Volver* del menú para regresar a la última página vista.
- Pulsa sobre la imagen que acompaña a la resolución de un problema para ampliarla o reducirla.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Inicio
Volver

Problema 1

Sea C el contorno del triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Calcular:

(a) la longitud de C;

(b) la integral

$$\oint_C (x+y)\, ds.$$

Solución: (a) $2+\sqrt{2}$; (b) $1+\sqrt{2}$.

Resolución.

Problema 1

Sea C el contorno del triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Calcular:

(a) la longitud de C;

(b) la integral

$$\oint_C (x+y)\,ds.$$

Solución: (a) $2+\sqrt{2}$; (b) $1+\sqrt{2}$.

Resolución. Escribimos $C = C_1 + C_2 + C_3$, donde $C_1 : \overline{\alpha}_1(t) = (t,0)$ $(0 \le t \le 1)$, $C_2 : \overline{\alpha}_2(t) = (t,1-t)$ $(0 \le t \le 1)$ y $C_3 : \overline{\alpha}_3(t) = (0,t)$ $(0 \le t \le 1)$ (Figura 1).

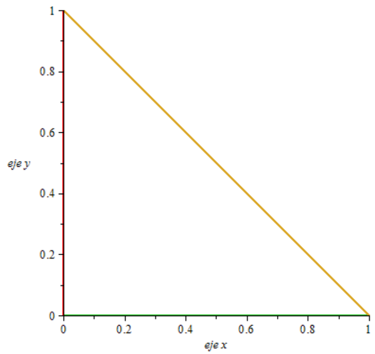

Figura 1.

Entonces

$$\overline{\alpha}_1'(t) = (1,0), \quad \overline{\alpha}_2'(t) = (1,-1), \quad \overline{\alpha}_3'(t) = (0,1) \qquad (0 \le t \le 1),$$

con

$$\|\overline{\alpha}_1'(t)\| = \|\overline{\alpha}_3'(t)\| = 1, \quad \|\overline{\alpha}_2'(t)\| = \sqrt{2} \qquad (0 \le t \le 1).$$

(a) Se tiene:

$$\int_{C_1} ds = \int_{C_3} ds = \int_0^1 dt = 1, \qquad \int_{C_2} ds = \sqrt{2}\int_0^1 ds = \sqrt{2}.$$

Consecuentemente,

$$\oint_C ds = \int_{C_1} ds + \int_{C_2} ds + \int_{C_3} ds = 2 + \sqrt{2}.$$

(b) Por otra parte:

$$\int_{C_1} (x+y)\, ds = \int_{C_3} (x+y)\, ds = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2},$$

$$\int_{C_2} (x+y)\, ds = \sqrt{2}\int_0^1 ds = \sqrt{2}.$$

Consecuentemente,

$$\oint_C (x+y)\, ds = \int_{C_1} (x+y)\, ds + \int_{C_2} (x+y)\, ds + \int_{C_3} (x+y)\, ds = 1 + \sqrt{2}.$$

Problema 2

Se considera la hélice circular $C : \overline{\alpha}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, con $t \in [0, c]$.

(a) Determinar la longitud de C.

(b) Calcular

$$\int_C z \, ds.$$

Solución: (a) $c\sqrt{a^2+b^2}$; (b) $\dfrac{bc^2\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

Resolución.

Problema 2

Se considera la hélice circular $C : \overline{\alpha}(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\, t, bt)$, con $t \in [0, c]$.

(a) Determinar la longitud de C.

(b) Calcular

$$\int_C z\, ds.$$

Solución: (a) $c\sqrt{a^2+b^2}$; (b) $\dfrac{bc^2\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

Resolución. La curva C (para $a = b = 1$ y $c = 4\pi$) se representa en la Figura 2.

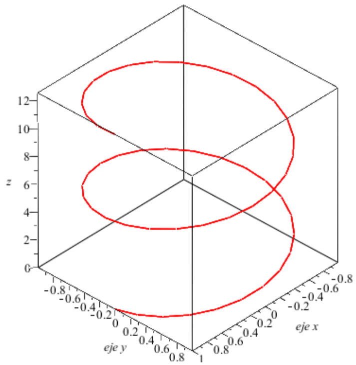

Figura 2.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Inicio
Volver

Se tiene:

$$\overline{\alpha}'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b)\,, \quad \|\overline{\alpha}'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad (0 \le t \le c).$$

(a) La longitud pedida vale

$$\int_C ds = \int_0^c \|\overline{\alpha}'(t)\|\, dt = c\sqrt{a^2+b^2}.$$

(a) La integral pedida vale

$$\int_C z\, ds = b\int_0^c t\|\overline{\alpha}'(t)\|\, dt = b\sqrt{a^2+b^2}\int_0^c t\, dt = \frac{bc^2\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Problema 3

Sea la trayectoria $\overline{\sigma}(t) = (2t, t^2, \ln t)$, definida para $t > 0$. Hallar la longitud de arco de $\overline{\sigma}$ entre los puntos $(2,1,0)$ y $(4,4,\ln 2)$.

Solución: $3 + \ln 2$.

Resolución.

Problema 3

Sea la trayectoria $\overline{\sigma}(t) = (2t, t^2, \ln t)$, definida para $t > 0$. Hallar la longitud de arco de $\overline{\sigma}$ entre los puntos $(2,1,0)$ y $(4,4,\ln 2)$.

Solución: $3 + \ln 2$.

Resolución. Cotejando los dos puntos con la parametrización de la curva constatamos que los valores del parámetro para los que se obtienen estos puntos son $t = 1$ y $t = 2$, respectivamente. Por otra parte,

$$\overline{\sigma}'(t) = \left(2, 2t, \frac{1}{t}\right) \qquad (t > 0)$$

y

$$\|\overline{\sigma}'(t)\| = \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}} = \sqrt{\frac{4t^4 + 4t^2 + 1}{t^2}} = \sqrt{\frac{(2t^2+1)^2}{t^2}} = \frac{2t^2+1}{t} = 2t + \frac{1}{t} \qquad (t > 0).$$

De este modo, la longitud L del arco entre ambos puntos será:

$$L = \int_1^2 \|\overline{\sigma}'(t)\|\, dt = \int_1^2 \left(2t + \frac{1}{t}\right) dt = \left[t^2 + \ln t\right]_1^2 = 3 + \ln 2.$$

Problema 4

Calcular la integral de línea del campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = (8x+z)\overline{i} + 2xz^2\overline{j} - 4y^2\overline{k}$ a lo largo de la curva definida por las ecuaciones $z = 9 - 2x^2 - 4y^2$, $z = 1$, con orientación positiva si se observa desde lo alto del eje OZ.

Solución: $4\pi\sqrt{2}$.

Resolución.

Problema 4

Calcular la integral de línea del campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = (8x+z)\overline{i} + 2xz^2\overline{j} - 4y^2\overline{k}$ a lo largo de la curva definida por las ecuaciones $z = 9-2x^2-4y^2$, $z = 1$, con orientación positiva si se observa desde lo alto del eje OZ.

Solución: $4\pi\sqrt{2}$.

Resolución. La intersección de las superficies $z = 9-2x^2-4y^2$, $z = 1$ es la elipse $x^2+2y^2 = 4$ en el plano de altura $z = 1$ (Figura 3); por tanto, podemos parametrizar esta curva (llamémosla C) mediante $\overline{\alpha}(t) = (2\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, 1)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

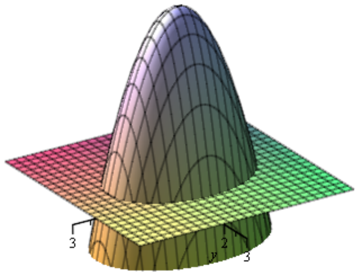

Figura 3.

Ahora, $\overline{\alpha}'(t) = (-2\operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t, 0)$ y $\overline{F}[\overline{\alpha}(t)] = (16\cos t + 1, 4\cos t, -8\operatorname{sen}^2 t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$, de modo que

$$\overline{F}[\overline{\alpha}(t)] \cdot \overline{\alpha}'(t) = -32\operatorname{sen} t\cos t - 2\operatorname{sen} t + 4\sqrt{2}\cos^2 t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Finalmente,

$$\oint_C \overline{F} \cdot d\overline{\alpha} = \int_0^{2\pi} \overline{F}[\overline{\alpha}(t)] \cdot \overline{\alpha}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (-32 \operatorname{sen} t \cos t - 2 \operatorname{sen} t + 4\sqrt{2} \cos^2 t)\, dt = 4\pi\sqrt{2}.$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Inicio
Volver

Problema 5

Se considera el campo vectorial $\overline{F}(x,y) = (y^2+2xy, x^2+2xy)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$.

(a) Comprobar que $\overline{F}$ admite función potencial en todo $\mathbb{R}^2$ y hallarla.

(b) Calcular la integral de $\overline{F}$ a lo largo de cualquier curva regular a trozos que una los puntos $(0,0)$ y $(2,1)$.

(c) Calcular la circulación de $\overline{F}$ a lo largo de cualquier curva cerrada regular a trozos.

Solución: (a) $\Phi(x,y) = x^2y + y^2x + C$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$; (b) 6; (c) 0.

Resolución.

Problema 5

Se considera el campo vectorial $\overline{F}(x,y) = (y^2+2xy, x^2+2xy)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$.

(a) Comprobar que $\overline{F}$ admite función potencial en todo $\mathbb{R}^2$ y hallarla.

(b) Calcular la integral de $\overline{F}$ a lo largo de cualquier curva regular a trozos que una los puntos $(0,0)$ y $(2,1)$.

(c) Calcular la circulación de $\overline{F}$ a lo largo de cualquier curva cerrada regular a trozos.

Solución: (a) $\Phi(x,y) = x^2y+y^2x+C$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$; (b) 6; (c) 0.

Resolución.

(a) Sean $P(x,y) = y^2+2xy$, $Q(x,y) = x^2+2xy$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$. Como $P,Q \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ y $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, la condición necesaria y suficiente para que $\overline{F}$ admita una función potencial Φ en todo $\mathbb{R}^2$ es que $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ en $\mathbb{R}^2$. Pero, en efecto:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x+2y = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Por simple inspección se advierte que $\Phi(x,y) = x^2y+y^2x+C$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$, siendo C una constante arbitraria.

(b) Conociendo el potencial Φ podemos calcular la integral como la diferencia de potencial entre el extremo y el origen de la curva: $\Phi(2,1)-\Phi(0,0) = 6$.

(c) Puesto que $\overline{F}$ es conservativo, la circulación es 0.

Problema 6

Probar que la integral

$$\int_C (6xy^2 - y^3)\, dx + (6x^2y - 3xy^2)\, dy$$

es independiente del camino que une los puntos $(1,2)$ y $(3,4)$. Hallar su valor mediante:

(a) un cálculo directo, aplicando la definición;

(b) una función potencial del integrando.

Solución: 236.

Resolución.

Problema 6

Probar que la integral

$$\int_C (6xy^2 - y^3)\, dx + (6x^2y - 3xy^2)\, dy$$

es independiente del camino que une los puntos $(1,2)$ y $(3,4)$. Hallar su valor mediante:

(a) un cálculo directo, aplicando la definición;

(b) una función potencial del integrando.

Solución: 236.

Resolución. Ya que $P(x,y) = 6xy^2 - y^3$ y $Q(x,y) = 6x^2y - 3xy^2$ son de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ y se cumple

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy - 3y^2 = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

el campo $\overline{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ es conservativo, y la integral

$$\int_C \overline{F} \cdot ds = \int_C P\, dx + Q\, dy$$

es independiente del camino C que una $(1,2)$ con $(3,4)$.

(a) Podemos tomar como C el segmento rectilíneo determinado por ambos puntos. Una parametrización de este segmento con la orientación indicada es $\overline{\alpha}(t) = t(3,4) + (1-t)(1,2) = (1+2t, 2+2t)$, con $\overline{\alpha}'(t) = (2,2)$ $(0 \leq t \leq 1)$.

Así:

$$\begin{aligned}\overline{F}[\overline{\alpha}(t)] &= \left(24(1+2t)(1+t)^2-8(1+t)^3, 12(1+2t)^2(1+t)-12(1+2t)(1+t)^2\right)\\ &= 4\left(4+18t+24t^2+10t^3, 3t+9t^2+6t^3\right) \qquad (0\le t\le 1),\end{aligned}$$

$$\overline{F}[\overline{\alpha}(t)]\cdot\overline{\alpha}'(t) = 8(4+21t+33t^2+16t^3) \qquad (0\le t\le 1).$$

Por tanto,

$$\int_C \overline{F}\cdot ds = \int_0^1 \overline{F}[\overline{\alpha}(t)]\cdot\overline{\alpha}'(t)\,dt = 8\int_0^1 (4+21t+33t^2+16t^3)\,dt = 8\left[4t+\frac{21}{2}t^2+11t^3+4t^4\right]_0^1 = 236.$$

(b) Sea $\Phi(x,y)$ la función potencial del campo $\overline{F}$. Integrando miembro a miembro respecto de x la ecuación

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 6xy^2-y^3$$

resulta $\Phi(x,y)=3x^2y^2-xy^3+\varphi(y)$. Si ahora imponemos que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 6x^2y-3xy^2+\varphi'(y) = 6x^2y-3xy^2$$

obtenemos $\varphi'(y)=0$ y de aquí $\varphi(y)=K$, donde K denota una constante arbitraria. Así pues, $\Phi(x,y)=3x^2y^2-xy^3+K$. Concluimos que

$$\int_C \overline{F}\cdot ds = \Phi(3,4)-\Phi(1,2) = 240-4 = 236.$$

Problema 7

(a) Demostrar que el campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = (\operatorname{sen} x, y^2, e^z)$ es conservativo.

(b) Suponiendo que $\overline{F}$ representa un campo de fuerzas, hallar el trabajo efectuado por $\overline{F}$ para desplazar una masa unidad del punto $(0,1,0)$ al punto $(0,0,1)$.

Solución: (b) $e - \dfrac{4}{3}$.

Resolución.

Problema 7

(a) Demostrar que el campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = (\operatorname{sen} x, y^2, e^z)$ es conservativo.

(b) Suponiendo que $\overline{F}$ representa un campo de fuerzas, hallar el trabajo efectuado por $\overline{F}$ para desplazar una masa unidad del punto $(0,1,0)$ al punto $(0,0,1)$.

Solución: (b) $e - \dfrac{4}{3}$.

Resolución.

(a) Por inspección se advierte que una función potencial de $\overline{F}$ en $\mathbb{R}^3$ es

$$\Phi(x,y,z) = -\cos x + \frac{1}{3}y^3 + e^z,$$

pues claramente satisface $\nabla\Phi = \overline{F}$.

(b) Consecuentemente, el trabajo pedido es igual a la diferencia de potencial

$$\Phi(0,0,1) - \Phi(0,1,0) = e - \frac{4}{3}.$$

Problema 8

¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = (axy - z^3, (a-2)x^2, (1-a)xz^2)$ es el gradiente de una función potencial? Para esos valores, calcular la función potencial.

Solución: $a = 4$; $\Phi(x,y,z) = 2x^2y - xz^3 + C$.

Resolución.

Problema 8

¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = (axy - z^3, (a-2)x^2, (1-a)xz^2)$ es el gradiente de una función potencial? Para esos valores, calcular la función potencial.

Solución: $a = 4$; $\quad \Phi(x,y,z) = 2x^2y - xz^3 + C$.

Resolución. Si $\overline{F}$ es un campo gradiente entonces rot $\overline{F} = \overline{0}$. Imponiendo esta condición encontramos que se debe tener:

$$\frac{\partial[(a-2)x^2]}{\partial z} = \frac{\partial[(1-a)xz^2]}{\partial y},$$
$$\frac{\partial(axy - z^3)}{\partial y} = \frac{\partial[(a-2)x^2]}{\partial x},$$
$$\frac{\partial[(1-a)xz^2]}{\partial x} = \frac{\partial(axy - z^3)}{\partial z}.$$

La primera ecuación no aporta ninguna restricción sobre a. La segunda se traduce en que $ax = 2(a-2)x$, de donde (dada la arbitrariedad de x) deducimos que $a = 4$. De la tercera se sigue que $(1-a)z^2 = -3z^2$, y (ahora por la arbitrariedad de z) inferimos nuevamente que $a = 4$.

Para $a = 4$ es $\overline{F}(x,y,z) = (4xy - z^3, 2x^2, -3xz^2)$. Llamando Φ a la función potencial de $\overline{F}$, debemos tener $\overline{F} = \nabla\Phi$. En particular,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2x^2.$$

Integrando esta expresión término a término respecto de y resulta

$$\Phi(x,y,z) = 2x^2y + \varphi(x,z). \tag{1}$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Inicio
Volver

Para determinar φ, derivamos (1) respecto de x e imponemos que esta derivada coincida con la primera componente de $\overline{F}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4xy + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 4xy - z^3.$$

De aquí,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -z^3.$$

Integramos ahora término a término respecto de x para obtener $\varphi(x,z) = -xz^3 + \psi(z)$, e incorporamos esta expresión a (1):

$$\Phi(x,y,z) = 2x^2y - xz^3 + \psi(z). \tag{2}$$

Finalmente, derivamos (2) respecto de z imponiendo que esta derivada coincida con la tercera componente de $\overline{F}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -3xz^2 + \psi'(z) = -3xz^2,$$

lo que proporciona $\psi(z) = C$, siendo C una constante arbitraria. Insertando esta expresión en (2) concluimos que la función potencial de $\overline{F}$ es $\Phi(x,y,z) = 2x^2y - xz^3 + C$.

Problema 9

Calcular

$$\int_C (x^2 - yz)\, dx + (y^2 - xz)\, dy - xy\, dz$$

a lo largo de cualquier curva uniendo el origen de coordenadas con el punto $P(1, 1/2, 1/2)$.

Solución: $\dfrac{1}{8}$.

Resolución.

Problema 9

Calcular

$$\int_C (x^2 - yz)\, dx + (y^2 - xz)\, dy - xy\, dz$$

a lo largo de cualquier curva uniendo el origen de coordenadas con el punto $P(1, 1/2, 1/2)$.

Solución: $\dfrac{1}{8}$.

Resolución. Pongamos

$$P(x,y,z) = x^2 - yz, \quad Q(x,y,z) = y^2 - xz, \quad R(x,y,z) = -xy \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3).$$

Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -z = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -x = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = -y = \frac{\partial P}{\partial z} \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3).$$

Como $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo, el campo $\overline{F} = (P, Q, R)$ admite función potencial o, equivalentemente, tiene una integral de línea independiente del camino.

Se abren ahora dos opciones:

- Determinar la función potencial $\Phi = \Phi(x,y,z)$ y calcular la integral como la diferencia de potencial entre el extremo y el origen de la curva. Por el procedimiento habitual encontramos que

$$\Phi(x,y,z) = \frac{x^3}{3} - xyz + \frac{y^3}{3} + K,$$

donde K representa una constante arbitraria. La integral pedida es entonces

$$\Phi\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-\Phi(0,0,0)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}.$$

- Calcular la integral a lo largo de cualquier camino C que una los puntos considerados, por ejemplo $\overline{\alpha}(t)=(t,t/2,t/2)$ $(0\leq t\leq 1)$. Para $0\leq t\leq 1$:

$$\overline{F}[\overline{\alpha}(t)]=\left(\frac{3t^2}{4},-\frac{t^2}{4},-\frac{t^2}{2}\right),\quad \overline{\alpha}'(t)=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad \overline{F}[\overline{\alpha}(t)]\cdot\overline{\alpha}'(t)=\frac{3t^2}{4}-\frac{t^2}{8}-\frac{t^2}{4}=\frac{3t^2}{8}.$$

Por tanto, la integral pedida vale

$$\int_C (x^2-yz)\,dx+(y^2-xz)\,dy-xy\,dz=\frac{3}{8}\int_0^1 t^2\,dt=\frac{1}{8}.$$

Problema 10

Sea γ la circunferencia $(x-2)^2+y^2=4$, orientada positivamente. Usar el teorema de Green para calcular

$$\oint_{\gamma} (x^2+2y^3)\, dy.$$

Solución: 16π.

Resolución.

Problema 10

Sea γ la circunferencia $(x-2)^2+y^2=4$, orientada positivamente. Usar el teorema de Green para calcular

$$\oint_{\gamma} (x^2+2y^3)\, dy.$$

Solución: 16π.

Resolución. El círculo D encerrado por γ (Figura 4) puede ser descrito en coordenadas polares mediante las ecuaciones $x=2+r\cos\theta$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$, con $|J(r,\theta)|=r$ $(0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq r\leq 2)$.

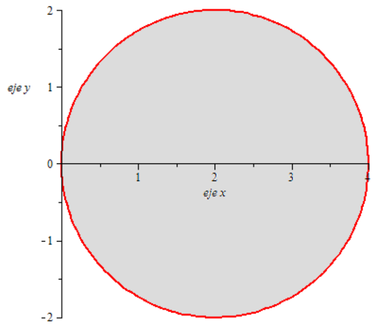

Figura 4.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma}(x^2+2y^3)\,dy &= \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+2y^3\right)\,dx\,dy \\
&= 2\iint_D x\,dx\,dy \\
&= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r(2+r\cos\theta)\,dr \\
&= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (2r+r^2\cos\theta)\,dr \\
&= 16\pi.
\end{aligned}$$

Problema 11

Evaluar

$$\oint_C y\,dx + x\,dy$$

a lo largo de la curva cerrada C compuesta por el primer cuadrante de la elipse $9x^2+16y^2=144$ y el segmento rectilíneo que une los puntos $(0,3)$ y $(4,0)$:

(a) directamente;

(b) mediante el teorema de Green.

Solución: 0.

Resolución.

Problema 11

Evaluar

$$\oint_C y\,dx + x\,dy$$

a lo largo de la curva cerrada C compuesta por el primer cuadrante de la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ y el segmento rectilíneo que une los puntos $(0,3)$ y $(4,0)$:

(a) directamente;

(b) mediante el teorema de Green.

Solución: 0.

Resolución. La Figura 5 representa la curva C y el recinto D que encierra.

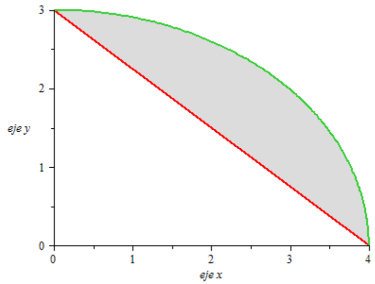

Figura 5.

(a) La curva C se compone de dos tramos: el segmento rectilíneo C_1, y el cuadrante de elipse C_2. Una parametrización de C_1 es $x_1(t) = t$, $y_1(t) = 3 - 3t/4$ $(0 \leq t \leq 4)$. Ya que $x_1'(t) = 1$, $y_1'(t) = -3/4$ $(0 \leq t \leq 4)$, y se tiene

$$\left(3 - \frac{3t}{4}, t\right) \cdot \left(1, -\frac{3}{4}\right) = 3 - \frac{3t}{2} \qquad (0 \leq t \leq 4),$$

encontramos que

$$\int_{C_1} y\,dx + x\,dy = \int_0^4 \left(3 - \frac{3t}{2}\right)\,dt = \left[3t - \frac{3t^2}{4}\right]_0^4 = 12 - 12 = 0.$$

Una parametrización de C_2 es $x_2(t) = 4\cos t$, $y_2(t) = 3\,\mathrm{sen}\,t$ $(0 \leq t \leq \pi/2)$. Ya que $x_2'(t) = -4\,\mathrm{sen}\,t$, $y_2'(t) = 3\cos t$ $(0 \leq t \leq \pi/2)$, y se tiene

$$(3\,\mathrm{sen}\,t, 4\cos t) \cdot (-4\,\mathrm{sen}\,t, 3\cos t) = 12\cos 2t \qquad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

encontramos que

$$\int_{C_2} y\,dx + x\,dy = 12\int_0^{\pi/2} \cos 2t\,dt = 6\,\mathrm{sen}\,2t\Big|_0^{\pi/2} = 0.$$

Consecuentemente,

$$\oint_C y\,dx + x\,dy = \int_{C_1} y\,dx + x\,dy + \int_{C_2} y\,dx + x\,dy = 0.$$

(b) El teorema de Green establece que

$$\oint_C y\,dx + x\,dy = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy = \iint_D (1-1)\,dx\,dy = 0.$$

Problema 12

Se considera la región plana $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2x,\ x^2+y^2 \geq 2\}$.

(a) Hallar el área de R por integración doble.

(b) Sea C la curva frontera de R, orientada positivamente. Determinar la longitud de C.

(c) Usar el teorema de Green para obtener el área de R mediante una integral de línea.

(d) También mediante el teorema de Green, evaluar la integral de línea

$$\oint_C (2xy - y^2)\, dx + (x^2 + y)\, dy.$$

Solución: (a), (c) 1; (b) $\pi\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (d) 0.

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Inicio
Volver

Problema 12

Se considera la región plana $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2x,\ x^2+y^2 \geq 2\right\}$.

(a) Hallar el área de R por integración doble.

(b) Sea C la curva frontera de R, orientada positivamente. Determinar la longitud de C.

(c) Usar el teorema de Green para obtener el área de R mediante una integral de línea.

(d) También mediante el teorema de Green, evaluar la integral de línea

$$\oint_C (2xy - y^2)\, dx + (x^2 + y)\, dy.$$

Solución: (a), (c) 1; (b) $\pi\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (d) 0.

Resolución. La ecuación $x^2+y^2 \leq 2x$ corresponde al círculo de centro $(1,0)$ y radio 1, mientras que la ecuación $x^2+y^2 \geq 2$ representa el exterior de la circunferencia de centro en el origen y radio $\sqrt{2}$. Se trata por tanto de hallar el área encerrada por la circunferencia $x^2+y^2 = 2x$ que es exterior a la circunferencia $x^2+y^2 = 2$ (Figura 6). La intersección de ambas circunferencias se produce en los puntos $(1,\pm 1)$.

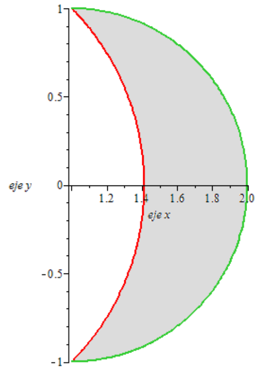

Figura 6.

(a) Calculamos el área pedida efectuando un cambio a polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $|J(r,\theta)| = r$, $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$, $\sqrt{2} \leq r \leq 2\cos\theta$, de modo que

$$\iint_R dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta} r\,dr = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(4\cos^2\theta - 2\right) d\theta = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$$

(b) Sea C la curva frontera de R, con orientación positiva. Escribimos $C = C_1 - C_2$, donde C_1 está parametrizada por $\bar{r}_1(t) = (1+\cos t,\ \text{sen}\,t)$ $(-\pi/2 \leq t \leq \pi/2)$ y C_2 por $\bar{r}_2(t) = \sqrt{2}(\cos t,\ \text{sen}\,t)$ $(-\pi/4 \leq t \leq \pi/4)$. Entonces

$$\left\|\bar{r}_1'(t)\right\| = 1 \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right), \qquad \left\|\bar{r}_2'(t)\right\| = \sqrt{2} \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}\right).$$

Se concluye que

$$\int_C ds = \int_{C_1} ds + \int_{C_2} ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt + \sqrt{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} dt = \pi\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(c) En la notación de (b), el teorema de Green asegura que el área de R es igual a

$$\frac{1}{2}\oint_{C} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_{C_1} x\,dy - y\,dx - \frac{1}{2}\int_{C_2} x\,dy - y\,dx.$$

Valiéndonos de las mismas parametrizaciones que en (b), encontramos que:

$$\int_{C_1} x\,dy - y\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\operatorname{sen} t, 1+\cos t)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos t)\,dt = \pi + 2$$

y

$$\int_{C_2} x\,dy - y\,dx = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (-\operatorname{sen} t, \cos t)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} dt = \pi.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{2}\int_{C} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}[(\pi+2)-\pi] = 1.$$

(d) El teorema de Green establece que

$$\oint_{C} (2xy - y^2)\,dx + (x^2+y)\,dy = \iint_{R}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy-y^2)\right]dx\,dy = 2\iint_{R} y\,dx\,dy.$$

Puesto que R es simétrico respecto de $y=0$ (eje OX) y el integrando es impar en y, concluimos que

$$\oint_{C} (2xy - y^2)\,dx + (x^2+y)\,dy = 0.$$

Problema 13

Calcular el área de la región D del primer cuadrante comprendida entre las curvas $y^2 = 2x$, $2x + y = 20$, $y = 0$:

(a) mediante una integral doble;

(b) mediante una integral de línea.

Solución: $\dfrac{76}{3}$.

Resolución.

Problema 13

Calcular el área de la región D del primer cuadrante comprendida entre las curvas $y^2 = 2x$, $2x + y = 20$, $y = 0$:

(a) mediante una integral doble;

(b) mediante una integral de línea.

Solución: $\dfrac{76}{3}$.

Resolución. La región D puede verse en la Figura 7.

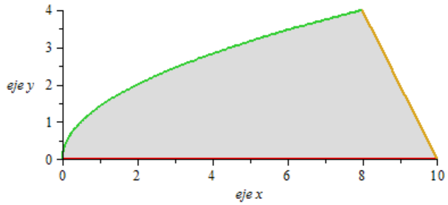

Figura 7.

(a) Considerando D como región de tipo II:

$$D = \int_0^4 dy \int_{y^2/2}^{(20-y)/2} dx = \int_0^4 \left(10 - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2}\right) dy = \left[10y - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{6}\right]_0^4 = \frac{76}{3}.$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Inicio
Volver

(b) Aplicaremos el teorema de Green escribiendo la integral de área como la integral de línea de una forma diferencial $P\,dx + Q\,dy$ elegida de manera que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

Si, por ejemplo, tomamos $Q(x,y) = x$, $P(x,y) = 0$, se tiene

$$|D| = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\gamma x\,dy,$$

donde γ denota la frontera de D con orientación canónica. Para calcular esta última integral escribimos $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, donde γ_1, γ_2 y γ_3 denotan los tramos de γ situados sobre las curvas $y^2 = 2x$, $y = 0$ y $2x + y = 20$, respectivamente. Parametrizamos estos arcos de la siguiente manera:

$$-\overline{\gamma}_1(t) = \left(\frac{t^2}{2}, t\right), \quad -\overline{\gamma}_1'(t) = (t,1) \qquad (0 \le t \le 4);$$

$$\overline{\gamma}_2(t) = (t,0), \quad \overline{\gamma}_2'(t) = (1,0) \qquad (0 \le t \le 10);$$

$$\overline{\gamma}_3(t) = (10-t, 2t), \quad \overline{\gamma}_3'(t) = (-1,2) \qquad (0 \le t \le 2).$$

Ahora:

$$\begin{aligned} |D| &= \int_\gamma x\,dy = -\int_0^4 \left(0, \frac{t^2}{2}\right) \cdot (t,1)\,dt + \int_0^{10} (0,t)\cdot(1,0)\,dt + \int_0^2 (0,10-t)\cdot(-1,2)\,dt \\ &= -\int_0^4 \frac{t^2}{2}\,dt + \int_0^2 (20-2t)\,dt = -\left[\frac{t^3}{6}\right]_0^4 + \left[20t - t^2\right]_0^2 = 40 - 4 - \frac{32}{3} = \frac{76}{3}. \end{aligned}$$

■

Open Course Ware ULL

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15

Inicio

Volver

Problema 14

Sea R la región plana limitada por las curvas

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 9, \quad x + y = 4, \quad x + y = 6.$$

Mediante el cambio de variables $u = x + y$, $v = x - y$ se transforma R en otra región T.

(a) Calcular el área de R utilizando T.

(b) Siendo C la frontera de R recorrida en sentido positivo, calcular el valor de la integral de línea

$$\oint_C (x^2 - y^2)\, dx + (x^2 - 4)\, dy.$$

Solución: (a) $4 \ln \frac{3}{2}$; (b) 16.

Resolución.

Problema 14

Sea R la región plana limitada por las curvas

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 9, \quad x + y = 4, \quad x + y = 6.$$

Mediante el cambio de variables $u = x + y$, $v = x - y$ se transforma R en otra región T.

(a) Calcular el área de R utilizando T.

(b) Siendo C la frontera de R recorrida en sentido positivo, calcular el valor de la integral de línea

$$\oint_C (x^2 - y^2)\, dx + (x^2 - 4)\, dy.$$

Solución: (a) $4 \ln \frac{3}{2}$; (b) 16.

Resolución. El recinto R se muestra en la Figura 8.

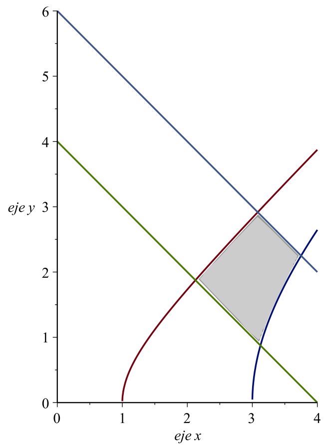

Figura 8.

(a) El cambio propuesto transforma las hipérbolas $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$ en las hipérbolas $uv = 1$, $uv = 9$, mientras que las rectas $x + y = 4$, $x + y = 6$ son transformadas en las rectas verticales $u = 4$, $u = 6$, respectivamente. Por tanto,

$$T = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq u \leq 6,\ \frac{1}{u} \leq v \leq \frac{9}{u} \right\},$$

una región de tipo I. En valor absoluto, el jacobiano del cambio es $|J(u,v)| = 1/2$. Aplicando el teorema del cambio de variables obtenemos:

$$|R| = \iint_R dx\,dy = \frac{1}{2} \iint_T du\,dv = \frac{1}{2} \int_4^6 du \int_{1/u}^{9/u} dv = 4 \ln u \Big|_4^6 = 4 \ln \frac{6}{4} = 4 \ln \frac{3}{2}.$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Inicio
Volver

(b) Estamos en condiciones de aplicar el teorema de Green. Para resolver la integral doble que resulta usaremos el mismo cambio de variable anterior:

$$\begin{aligned}\oint_C (x^2-y^2)\,dx+(x^2-4)\,dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2-4)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)\right]dx\,dy = 2\iint_R (x+y)\,dx\,dy \\ &= \iint_T u\,du\,dv = \int_4^6 u\,du \int_{1/u}^{9/u} dv = 8\int_4^6 du = 16.\end{aligned}$$

Problema 15

(a) Justificar la siguiente afirmación: si P, Q son derivables con continuidad en un dominio triplemente conexo $R \subset \mathbb{R}^2$ y si $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en R, entonces existen a lo sumo siete valores posibles distintos para las integrales

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy$$

tomadas sobre curvas de Jordan regulares a trozos C situadas en R.

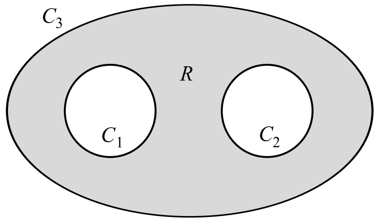

Figura 9.

(b) Obtener todos esos posibles valores en el dominio de la Figura 9, si se sabe que

$$I_1 = \oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = 3, \quad I_2 = \oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy = -1.$$

Solución: (b) ± 3, ∓ 1, ± 2, 0.

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Inicio
Volver

Problema 15

(a) Justificar la siguiente afirmación: si P, Q son derivables con continuidad en un dominio triplemente conexo $R \subset \mathbb{R}^2$ y si $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en R, entonces existen a lo sumo siete valores posibles distintos para las integrales

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy$$

tomadas sobre curvas de Jordan regulares a trozos C situadas en R.

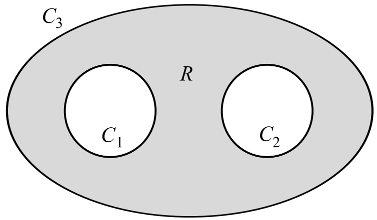

Figura 9.

(b) Obtener todos esos posibles valores en el dominio de la Figura 9, si se sabe que

$$I_1 = \oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = 3, \quad I_2 = \oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy = -1.$$

Solución: (b) ± 3, ∓ 1, ± 2, 0.

Resolución.

(a) Supongamos que R es un dominio triplemente conexo con dos agujeros H_i $(i = 1,2)$. Sea C una curva de Jordan regular a trozos en R, y sea C_i una curva de Jordan regular a trozos en R, positivamente orientada, que rodea H_i $(i = 1,2)$ sin intersectar C. Supongamos que la integral a lo largo de C_i vale a_i $(i = 1,2)$. Por el teorema de invariancia de la integral de línea por deformación del camino, las posibilidades son las siguientes:

- C rodea H_1 pero no H_2. Entonces la integral a lo largo de C vale a_1 si la orientación de C es positiva, y $-a_1$ si es negativa.
- C rodea H_2 pero no H_1. Entonces la integral a lo largo de C vale a_2 si la orientación de C es positiva, y $-a_2$ si es negativa.
- C rodea H_1 y H_2. Entonces la integral a lo largo de C vale $a_1 + a_2 = b$ si la orientación de C es positiva, y $-b$ si es negativa.
- C no rodea H_1 ni H_2. Entonces la integral a lo largo de C con cualquier orientación vale 0.

(b) De acuerdo con lo anterior, los siete valores posibles son: $\pm 3, \mp 1, \pm 2, 0$.