

Integración sobre superficies

ISABEL MARRERO

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

imarrero@ull.es

OCW-ULL 2011/12: Cálculo Integral Vectorial

Instrucciones

A continuación se muestra una relación de problemas resueltos sobre integrales de superficie.

- Selecciona un enunciado en el menú de la derecha e intenta resolver el problema por tus propios medios.
- Pulsa en **Resolución.** para ver una forma de resolver el problema.
- Pulsa en ► para continuar viendo la resolución del problema.
- Pulsa en ■ para regresar al enunciado del mismo problema, o usa el menú para seleccionar otro diferente.
- Pulsa dos veces sobre el botón Volver del menú para regresar a la última página vista.
- Pulsa sobre la imagen que acompaña a la resolución de un problema para ampliarla o reducirla.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Problema 1

Hallar el área de la porción de la superficie $S : z = x^2 + (y - 1)^2$ comprendida entre los planos $z = 1$, $z = 4$.

Solución: $\frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$.

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Problema 1

Hallar el área de la porción de la superficie $S : z = x^2 + (y-1)^2$ comprendida entre los planos $z = 1, z = 4$.

Solución: $\frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$.

Resolución. Podemos parametrizar S (Figura 1) mediante $\vec{r}(x,y) = (x, y, x^2 + (y-1)^2)$ ($(x,y) \in D$), donde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + (y-1)^2 \leq 4\}.$$

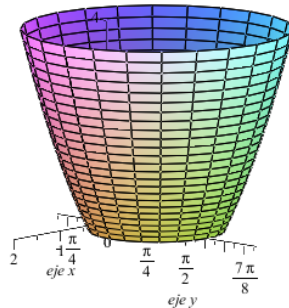


Figura 1.

El correspondiente producto vectorial fundamental es

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (-2x, -2(y-1), 1),$$

cuya norma vale $\sqrt{1 + 4x^2 + 4(y-1)^2}$.

Consecuentemente,

$$|S| = \iint_D \left\| \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \right\| dx dy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4(y-1)^2} dx dy.$$

Resolvemos esta integral mediante un cambio a polares, $x = r \cos \theta$, $y = 1 + r \sin \theta$, $|J(r, \theta)| = r$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$, $1 \leq r \leq 2$), obteniendo:

$$\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4(y-1)^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r \sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}).$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



Problema 2

Calcular

$$\iint_S z \, dS,$$

donde S es la superficie definida por las condiciones $2x = y^2 - z^2$, $y^2 + z^2 \leq 4$.

Solución: 0.

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Problema 2

Calcular

$$\iint_S z \, dS,$$

donde S es la superficie definida por las condiciones $2x = y^2 - z^2$, $y^2 + z^2 \leq 4$.

Solución: 0.

Resolución. Podemos parametrizar S (Figura 2) mediante

$$\vec{r}(y, z) = \left(\frac{1}{2}(y^2 - z^2), y, z \right) \quad ((y, z) \in D),$$

donde $D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq 4\}$.

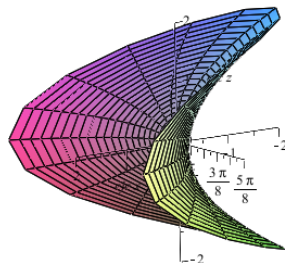


Figura 2.

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

El correspondiente producto vectorial fundamental es

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ y & 1 & 0 \\ -z & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -y, z),$$

cuya norma vale $\sqrt{1+y^2+z^2}$. Consecuentemente,

$$\iint_S z \, dS = \iint_D z \left\| \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} \right\| dy \, dz = \iint_D z \sqrt{1+y^2+z^2} \, dy \, dz.$$

Puesto que el integrando es impar en z y D es simétrico respecto a $z=0$, se concluye que esta integral es nula.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Problema 3

Sea S el tronco del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ situado por encima del plano $z = 0$. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de S .

Solución: 24π .

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Problema 3

Sea S el tronco del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ situado por encima del plano $z = 0$. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de S .

Solución: 24π .

Resolución. Podemos parametrizar S (Figura 3) mediante $\vec{r}(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$ ($(x, y) \in D$), donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

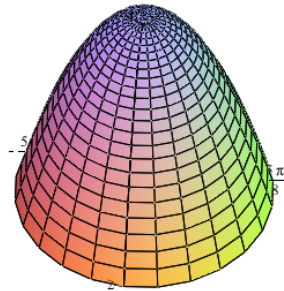


Figura 3.

El correspondiente producto vectorial fundamental es

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (2x, 2y, 1) \quad ((x, y) \in D),$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



así que, sobre D ,

$$\overline{F}(x, y, z) \cdot \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial y} \right) = (x, y, z) \cdot (2x, 2y, 1) = 2x^2 + 2y^2 + z = 2x^2 + 2y^2 + (4 - x^2 - y^2) = 4 + x^2 + y^2.$$

Mediante un cambio a polares, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $|J(r, \theta)| = r$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$), ya obtenemos:

$$\iint_S \overline{F} \cdot dS = \iint_D (4 + x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 + r^2) r dr = 24\pi.$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Problema 4

Sea C la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y el plano $x + z = 3$.

- (a) Utilizando el teorema de Stokes, transformar la integral de línea

$$\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz$$

en una integral de superficie y hallar su valor.

- (b) Verificar el resultado calculando directamente la integral curvilínea.

Solución: $-\frac{9\pi}{\sqrt{2}}.$

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Problema 4

Sea C la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y el plano $x + z = 3$.

- (a) Utilizando el teorema de Stokes, transformar la integral de línea

$$\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz$$

en una integral de superficie y hallar su valor.

- (b) Verificar el resultado calculando directamente la integral curvilínea.

Solución: $-\frac{9\pi}{\sqrt{2}}.$

Resolución.

- (a) La intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y $x + z = 3$ es la elipse C de ecuación $2x^2 - 6x + y^2 = 0$, o, en forma canónica,

$$\frac{(x - 3/2)^2}{(3/2)^2} + \frac{y^2}{(3/\sqrt{2})^2} = 1,$$

a altura $z = 3 - x$ (Figura 4).

El teorema de Stokes asegura que la integral de línea buscada coincide con el flujo del rotacional del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$ a través de la porción S del plano $z = 3 - x$ encerrada por C , siempre que las orientaciones consideradas en S y C sean compatibles.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



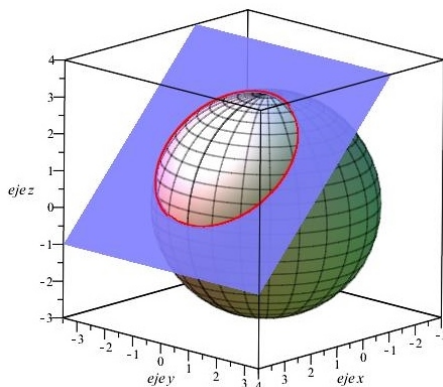


Figura 4.

Consideraremos S orientada en el sentido de la normal cuya tercera componente es positiva. Esta orientación se corresponde con la de C que deja S a la izquierda al ser recorrida.

Se obtiene fácilmente que $\text{rot } \bar{F} = -(1, 1, 1)$.

Por otra parte, podemos parametrizar S mediante $\bar{r}(u, v) = (u, v, 3 - u) \ ((u, v) \in D)$, donde

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x - 3/2)^2}{(3/2)^2} + \frac{y^2}{(3/\sqrt{2})^2} \leq 1 \right\}.$$

El producto vectorial fundamental correspondiente a esta parametrización es

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = (1, 0, 1) \quad ((u, v) \in D);$$

en particular, la parametrización preserva la orientación.

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



Consecuentemente,

$$\operatorname{rot} \bar{F} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right) = -2 \quad ((u, v) \in D).$$

Haciendo uso de la fórmula para el área encerrada por una elipse, se concluye que

$$\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz = \iint_S \operatorname{rot} \bar{F} \cdot dS = \iint_D \operatorname{rot} \bar{F} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right) du \, dv = -2|D| = -\frac{9\pi}{\sqrt{2}}.$$

(b) Parametrizamos C mediante

$$\bar{\alpha}(t) = \left(\frac{3}{2}(1 + \cos t), \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t, \frac{3}{2}(1 - \cos t) \right) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Entonces:

$$\bar{F}[\bar{\alpha}(t)] = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t, \frac{3}{2}(1 - \cos t), \frac{3}{2}(1 + \cos t) \right) \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

$$\bar{\alpha}'(t) = \left(-\frac{3}{2} \operatorname{sen} t, \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{3}{2} \operatorname{sen} t \right) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Sigue que

$$\bar{F}[\bar{\alpha}(t)] \cdot \bar{\alpha}'(t) = -\frac{9}{2\sqrt{2}} + \frac{9}{2\sqrt{2}} \cos t + \frac{9}{4} \operatorname{sen} t + \frac{9}{4} \operatorname{sen} t \cos t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Por tanto,

$$\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz = \int_0^{2\pi} \bar{F}[\bar{\alpha}(t)] \cdot \bar{\alpha}'(t) \, dt = -\frac{9}{2\sqrt{2}} \cdot 2\pi = -\frac{9\pi}{\sqrt{2}}.$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Problema 5

Siendo C la curva intersección de las superficies $2x^2 + 2y^2 = z^2$ y $z = y + 1$, utilizar el teorema de Stokes para calcular la integral de línea

$$\int_C (y - 1) dx + z^2 dy + y dz.$$

Solución: $-\pi\sqrt{2}$.

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Problema 5

Siendo C la curva intersección de las superficies $2x^2 + 2y^2 = z^2$ y $z = y + 1$, utilizar el teorema de Stokes para calcular la integral de línea

$$\int_C (y-1) dx + z^2 dy + y dz.$$

Solución: $-\pi\sqrt{2}$.

Resolución. La intersección de las superficies $2x^2 + 2y^2 = z^2$ y $z = y + 1$ es la elipse C de ecuación

$$x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

a altura $z = y + 1$ (Figura 5).

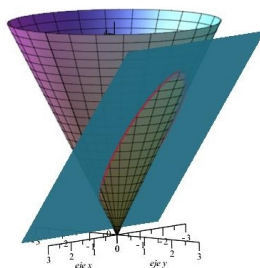


Figura 5.

El teorema de Stokes asegura que la integral de línea buscada coincide con el flujo del rotacional del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (y-1, z^2, y)$ a través de la porción S del plano $z = y + 1$ encerrada por C , siempre que las orientaciones consideradas en S y C sean compatibles.

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Suponemos que C se recorre dejando S a la izquierda y que, por tanto, S está orientada según la normal cuya tercera componente es positiva.

Se obtiene fácilmente que $\text{rot } \bar{F} = (1 - 2z, 0, -1)$.

Por otra parte, podemos parametrizar S mediante $\bar{r}(x, y) = (x, y, y + 1)$ $((x, y) \in D)$, siendo

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} \leq 1 \right\}.$$

El producto vectorial fundamental correspondiente a esta parametrización es

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} = (0, -1, 1) \quad ((x, y) \in D);$$

en particular, la parametrización preserva la orientación. Consecuentemente,

$$\text{rot } \bar{F} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \right) = -1.$$

Haciendo uso de la fórmula para el área encerrada por una elipse, se concluye que

$$\int_C (y-1) dx + z^2 dy + y dz = \iint_S \text{rot } \bar{F} \cdot dS = \iint_D \text{rot } \bar{F} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \right) dx dy = -|D| = -\pi\sqrt{2}.$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



Problema 6

Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,2z)$ a través de la superficie cerrada S que limita al sólido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - 2x^2 - 2y^2\}$,

- (a) directamente;
- (b) mediante el teorema de Gauss.

Solución: 16π .

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Problema 6

Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,2z)$ a través de la superficie cerrada S que limita al sólido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - 2x^2 - 2y^2\}$,

- (a) directamente;
- (b) mediante el teorema de Gauss.

Solución: 16π .

Resolución. Se trata de calcular la integral

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Los dos procedimientos deben conducir al mismo resultado.

Obsérvese que S se compone de dos superficies: una porción S_1 del paraboloide $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ («tapa») y una porción S_2 del plano OXY («fondo»), las cuales se suponen orientadas en el sentido de la normal exterior a S (Figura 6).



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



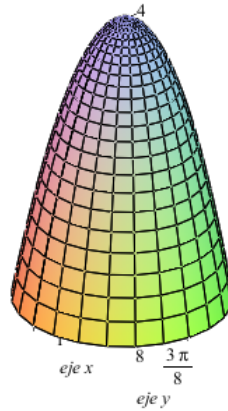


Figura 6.

(a) Parametrizamos por separado $S_1: \bar{r}_1(x,y) = (x,y,4-2x^2-2y^2)$ y $S_2: \bar{r}_2(x,y) = (x,y,0)$ $((x,y) \in D)$, con

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$$

en ambos casos. Los respectivos productos vectoriales fundamentales son:

$$\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial y} = (4x, 4y, 1), \quad \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial y} = (0, 0, 1) \quad ((x,y) \in D).$$

Nótese que $\bar{r}_1$ preserva la orientación, pero $\bar{r}_2$ la invierte.

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



Se tiene

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_D (x, y, 8 - 4x^2 - 4y^2) \cdot (4x, 4y, 1) \, dx \, dy = 8|D| = 16\pi,$$

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}_2 = - \iint_D (x, y, 0) \cdot (0, 0, 1) \, dx \, dy = 0,$$

y finalmente

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}_2 = 16\pi.$$

(b) Ya que $\text{div } \vec{F} = 4$, sigue del teorema de Gauss que

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4 \iiint_V dx \, dy \, dz.$$

Para calcular la integral triple empleamos un argumento «tapa-fondo», efectuando un cambio a coordenadas polares: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $|J(r, \theta)| = r$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq \sqrt{2}$. Entonces

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4 \iiint_V dx \, dy \, dz = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2r^2)r \, dr = 8\pi \left[2r^2 - \frac{1}{2}r^4 \right]_0^{\sqrt{2}} = 16\pi.$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



Problema 7

Se consideran las superficies

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \leq z \leq 2\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 5, z = e^{-x^2 - y^2} + 2 - e^{-5}\},$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}.$$

Determinar:

- (a) el área de $S_1 + S_3$;
- (b) $\iint_S \vec{F} \cdot dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = 2(x, y, z)$ y $S = S_1 + S_2$.

Solución: (a) $7\pi - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln(3 - 2\sqrt{2})$; (b) $2\pi(17 - 18e^{-5})$.

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Problema 7

Se consideran las superficies

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \leq z \leq 2\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 5, z = e^{-x^2 - y^2} + 2 - e^{-5}\},$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}.$$

Determinar:

- (a) el área de $S_1 + S_3$;
- (b) $\iint_S \bar{F} \cdot dS$, donde $\bar{F}(x, y, z) = 2(x, y, z)$ y $S = S_1 + S_2$.

Solución: (a) $7\pi - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln(3 - 2\sqrt{2})$; (b) $2\pi(17 - 18e^{-5})$.

Resolución.

- (a) Las superficies S_1 , S_2 y S_3 son, respectivamente, la superficie lateral, la «tapa» y el «fondo» del sólido de la Figura 7.

La superficie S_3 es el disco unidad del plano OXY , de modo que $|S_3| = \pi$. Para calcular $|S_1|$ parametrizamos S_1 mediante $\bar{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \sqrt{u^2 - 1})$ ($(u, v) \in D$), donde

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq \sqrt{5}, 0 \leq v \leq 2\pi\}.$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



El correspondiente producto vectorial fundamental es

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos v & \sin v & \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{u^2 \cos v}{\sqrt{u^2-1}}, -\frac{u^2 \sin v}{\sqrt{u^2-1}}, u \right) \quad ((u, v) \in D),$$

cuya norma vale

$$\left\| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{\frac{u^4}{u^2-1} + u^2} = u \sqrt{\frac{u^2}{u^2-1} + 1} = u \sqrt{2 + \frac{1}{u^2-1}} \quad ((u, v) \in D).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |S_1| &= \iint_{S_1} dS_1 = \iint_D \left\| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right\| du dv \\ &= \iint_D u \sqrt{2 + \frac{1}{u^2-1}} du dv = \int_0^{2\pi} dv \int_1^{\sqrt{5}} u \sqrt{2 + \frac{1}{u^2-1}} du. \end{aligned}$$

Efectuando el cambio de variable

$$t^2 = 2 + \frac{1}{u^2-1}, \quad t dt = -\frac{u}{(u^2-1)^2} du, \quad u du = -t(u^2-1)^2 dt = -\frac{t}{(t^2-2)^2} dt$$

obtenemos

$$\int_1^{\sqrt{5}} u \sqrt{2 + \frac{1}{u^2-1}} du = \int_{3/2}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2-2)^2} dt.$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



Integrando ahora por partes encontramos que

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2}{(t^2-2)^2} dt &= -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2-2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2-2} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2-2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}} \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2-2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + C,\end{aligned}$$

donde C es una constante arbitraria. Consecuentemente

$$\int_1^{\sqrt{5}} u \sqrt{2 + \frac{1}{u^2 - 1}} du = 3 - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \right| = 3 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(3-2\sqrt{2}),$$

así que

$$|S_1| = 6\pi - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln(3-2\sqrt{2}).$$

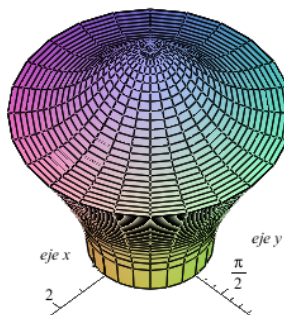


Figura 7.

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Concluimos:

$$|S_1 + S_3| = 7\pi - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln(3 - 2\sqrt{2}).$$

(b) Es claro que, con cualquier orientación de S_3 ,

$$\iint_{S_3} \bar{F} \cdot dS_3 = 0.$$

Como $\text{div } \bar{F} = 6$, el teorema de Gauss entraña que

$$\iint_S \bar{F} \cdot dS = \iiint_{\Sigma} \bar{F} \cdot d\Sigma = 6V,$$

donde S y $\Sigma = S_1 + S_2 - S_3$ tienen orientación exterior y V denota el volumen del sólido que Σ encierra (Figura 7). Efectuando un cambio a polares:

$$V = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\sqrt{5}} u \left(e^{-u^2} + 2 - e^{-5} \right) du - \int_0^{2\pi} dv \int_1^{\sqrt{5}} u \sqrt{u^2 - 1} du = \pi \left(\frac{17}{3} - 6e^{-5} \right).$$

Luego,

$$\iint_S \bar{F} \cdot dS = 2\pi \left(17 - 18e^{-5} \right).$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Problema 8

Se consideran el campo vectorial

$$\overline{F}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

y las superficies S , determinada por los puntos del paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ tales que $z \geq 1$, y σ , constituida por el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ en el plano $z = 1$.

- (a) Probar que $\operatorname{div} \overline{F} = 0$.
- (b) Utilizando el teorema de la divergencia, justificar que el flujo exterior de $\overline{F}$ a través de S es igual al flujo exterior de $\overline{F}$ a través de σ .
- (c) Calcular el flujo exterior de $\overline{F}$ a través de σ .

Solución: (c) $\pi(2 - \sqrt{2})$.

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Problema 8

Se consideran el campo vectorial

$$\overline{F}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

y las superficies S , determinada por los puntos del paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ tales que $z \geq 1$, y σ , constituida por el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ en el plano $z = 1$.

- (a) Probar que $\operatorname{div} \overline{F} = 0$.
- (b) Utilizando el teorema de la divergencia, justificar que el flujo exterior de $\overline{F}$ a través de S es igual al flujo exterior de $\overline{F}$ a través de σ .
- (c) Calcular el flujo exterior de $\overline{F}$ a través de σ .

Solución: (c) $\pi(2 - \sqrt{2})$.

Resolución.

- (a) Se tiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \overline{F}(x, y, z) &= -\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}(2x^2 + 2y^2 + 2z^2) + 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \\ &= -3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = 0.\end{aligned}$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



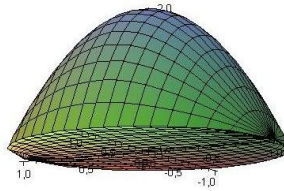


Figura 8.

- (b) Si se orientan S y σ de manera que la normal a ambas superficies tenga tercera componente positiva, entonces $\Sigma = S - \sigma$ es una superficie cerrada con orientación exterior (Figura 8). Denotando por V el recinto que Σ encierra, el teorema de la divergencia permite afirmar que

$$\iint_S \bar{F} \cdot dS - \iint_\sigma \bar{F} \cdot d\sigma = \iint_\Sigma \bar{F} \cdot d\Sigma = \iiint_V \operatorname{div} \bar{F} \, dx \, dy \, dz = 0,$$

y de aquí

$$\iint_S \bar{F} \cdot dS = \iint_\sigma \bar{F} \cdot d\sigma.$$

- (c) Parametrizamos σ mediante $\bar{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 1)$ ($0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$). El producto vectorial fundamental correspondiente a esta parametrización es

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = (0, 0, u) \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi).$$

Por tanto,

$$\iint_\sigma \bar{F} \cdot d\sigma = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} (u \cos v, u \sin v, 1) \cdot (0, 0, u) \, du = \pi \int_0^1 \frac{2u}{(1+u^2)^{3/2}} \, du = \pi(2 - \sqrt{2}).$$

Problema 9

Sea S la porción de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, situada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, y sea $\vec{F}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$. Calcular el flujo exterior del campo $\vec{F}$ a través de S :

- (a) directamente;
- (b) mediante el teorema de Stokes;
- (c) mediante el teorema de Gauss.

Solución: 0.

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Problema 9

Sea S la porción de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, situada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, y sea $\vec{F}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$. Calcular el flujo exterior del campo $\vec{F}$ a través de S :

- (a) directamente;
- (b) mediante el teorema de Stokes;
- (c) mediante el teorema de Gauss.

Solución: 0.

Resolución.

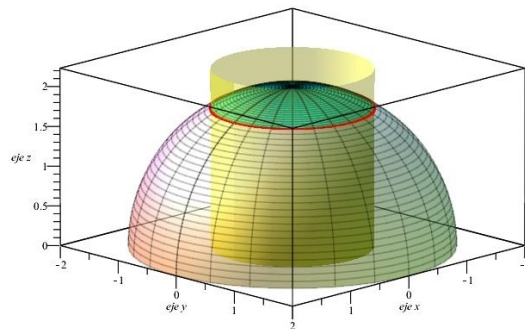


Figura 9.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



(a) Podemos parametrizar S (Figura 9) mediante $\vec{r}(x,y) = (x,y,\sqrt{4-x^2-y^2})$ $((x,y) \in D)$, donde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

El correspondiente producto vectorial fundamental es

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1 \right) \quad ((x,y) \in D),$$

que apunta hacia el exterior de la esfera y, por tanto, coincide con la normal exterior a ésta, $\vec{n}$. Por otra parte, se obtiene fácilmente que $\text{rot } \vec{F} = -(y,z,x)$. Así

$$\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = -\frac{xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} - y - x \quad ((x,y) \in D),$$

de donde, mediante un cambio a polares,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta; \quad |J(r,\theta)| = r \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1),$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= - \iint_D \left(\frac{xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + y + x \right) dx \, dy \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{4-r^2}} + r \sin \theta + r \cos \theta \right) r \, dr \\ &= 0. \end{aligned}$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



(b) La intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ($z \geq 0$) y $x^2 + y^2 = 1$ se produce en la curva $x^2 + y^2 = 1$ situada en el plano $z = \sqrt{3}$, que denotamos C y parametrizamos mediante

$$\bar{\alpha}(t) = (\cos t, \sin t, \sqrt{3}) \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

con

$$\bar{\alpha}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Nótese que la orientación de C coincide con la inducida por la normal exterior a S . En virtud del teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \bar{F} \cdot dS &= \int_0^{2\pi} \bar{F}[\bar{\alpha}(t)] \cdot \bar{\alpha}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t, \sqrt{3} \sin t, \sqrt{3} \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + \sqrt{3} \sin t) \cos t dt = 0. \end{aligned}$$

(c) Como $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{F} = 0$, el teorema de Gauss proporciona la igualdad

$$\iint_S \operatorname{rot} \bar{F} \cdot dS = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \bar{F} \cdot d\Sigma,$$

donde Σ es la porción del plano $z = \sqrt{3}$ cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada de manera que la normal al plano tiene tercera componente positiva.

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



Podemos parametrizar Σ mediante $\overline{\sigma}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \sqrt{3})$ $((u, v) \in T)$, donde

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi\}.$$

Se comprueba fácilmente que el correspondiente producto vectorial fundamental es $(0, 0, u)$. Por tanto

$$\operatorname{rot} \overline{F} \cdot (0, 0, u) = -u^2 \cos v \quad ((u, v) \in T),$$

y, de aquí,

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \overline{F} \cdot d\Sigma = - \iint_T u^2 \cos v \, du \, dv = - \int_0^{2\pi} \cos v \, dv \int_0^1 u^2 \, du = 0.$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



Problema 10

Sea S el casquete del paraboloide $z = x^2 + y^2$ situado por debajo del plano $z = x$ y orientado en el sentido de la normal exterior, y sea $\overline{F}(x, y, z) = (-xz, x, y^2)$. Calcular el flujo

$$\iint_S \text{rot } \overline{F} \cdot dS :$$

- (a) directamente;
- (b) mediante el teorema de Stokes;
- (c) mediante el teorema de Gauss.

Solución: $-\frac{\pi}{4}$.

Resolución.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

Problema 10

Sea S el casquete del paraboloide $z = x^2 + y^2$ situado por debajo del plano $z = x$ y orientado en el sentido de la normal exterior, y sea $\vec{F}(x, y, z) = (-xz, x, y^2)$. Calcular el flujo

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} :$$

- (a) directamente;
- (b) mediante el teorema de Stokes;
- (c) mediante el teorema de Gauss.

Solución: $-\frac{\pi}{4}$.

Resolución.

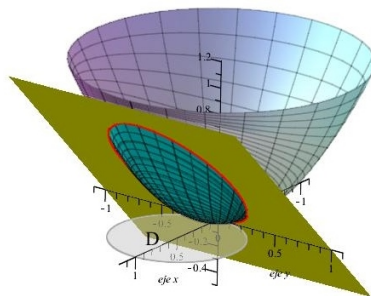


Figura 10.

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver

(a) Podemos parametrizar S (Figura 10) mediante $\vec{r}(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$ $((x,y) \in D)$, donde

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

El correspondiente producto vectorial fundamental es

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (-2x, -2y, 1) \quad ((x,y) \in D),$$

que apunta hacia el interior del paraboloide; consecuentemente, la normal exterior es $\vec{n} = (2x, 2y, -1)$ $((x,y) \in D)$.

Por otra parte, se obtiene fácilmente que $\text{rot } \vec{F} = (2y, -x, 1)$. Luego

$$\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = 2xy - 1 \quad ((x,y) \in D),$$

así que

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D (2xy - 1) \, dx \, dy.$$

Resolvemos esta integral mediante un cambio a polares,

$$x = \frac{1}{2} + r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta; \quad |J(r, \theta)| = r \quad \left(0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{2}\right),$$

obteniendo:

$$\iint_D (2xy - 1) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} \left[2 \left(\frac{1}{2} + r \cos \theta \right) r \sin \theta - 1 \right] r \, dr = -\frac{\pi}{4}.$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



(b) La intersección de $z = x^2 + y^2$ y $z = x$ se produce en la curva

$$C: \bar{\alpha}(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos t, \sin t, 1 + \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

con

$$\bar{\alpha}'(t) = \frac{1}{2}(-\sin t, \cos t, -\sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Nótese que la orientación de C es la opuesta a la inducida por la normal exterior a S . En virtud del teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \bar{F} \cdot dS &= - \int_0^{2\pi} \bar{F}[\bar{\alpha}(t)] \cdot \bar{\alpha}'(t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{(1 + \cos t)^2}{4}, \frac{1 + \cos t}{2}, \frac{\sin^2 t}{4} \right) \cdot (-\sin t, \cos t, -\sin t) dt \\ &= -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)^2 \sin t dt - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos t) \cos t dt + \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t) \sin t dt \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(c) Como $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{F} = 0$, el teorema de Gauss proporciona la igualdad

$$\iint_S \operatorname{rot} \bar{F} \cdot dS = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \bar{F} \cdot d\Sigma,$$

donde Σ es la porción del plano $z = x$ cortada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, orientada de manera que la normal al plano tenga tercera componente negativa.



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver



Podemos parametrizar Σ mediante $\overline{\sigma}(x, y) = (x, y, x)$ $((x, y) \in D)$, donde, como antes,

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

El correspondiente producto vectorial fundamental es

$$\frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial x} \times \frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial y} = (-1, 0, 1) \quad ((x, y) \in D).$$

Por tanto

$$\text{rot } \overline{F} \cdot (1, 0, -1) = (2y, -x, 1) \cdot (1, 0, -1) = 2y - 1 \quad ((x, y) \in D),$$

y de aquí

$$\iint_{\Sigma} \text{rot } \overline{F} \cdot d\Sigma = \iint_D (2y - 1) \, dx \, dy.$$

Resolvemos esta integral mediante un cambio a polares,

$$x = \frac{1}{2} + r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta; \quad |J(r, \theta)| = r \quad \left(0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{2}\right),$$

obteniendo:

$$\iint_D (2y - 1) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} (2r \sin \theta - 1) r \, dr = -\frac{\pi}{4}.$$



Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Problema 6

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Inicio

Volver