Problemas resueltos

Integración sobre superficies

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Problema 1

Hallar el área de la porción de la superficie $S : z = x^2 + (y-1)^2$ comprendida entre los planos $z = 1$, $z = 4$.

Solución: $\dfrac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$.

RESOLUCIÓN. Podemos parametrizar S (Figura 1) mediante $\overline{r}(x,y) = (x, y, x^2 + (y-1)^2)$ $((x,y) \in D)$, donde

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + (y-1)^2 \leq 4\right\}.$$

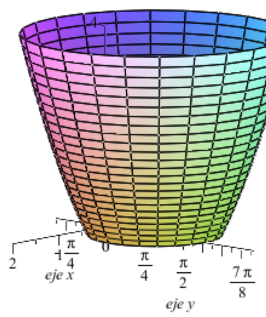

Figura 1.

El correspondiente producto vectorial fundamental es

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial y} = (-2x, -2(y-1), 1),$$

cuya norma vale $\sqrt{1 + 4x^2 + 4(y-1)^2}$.

Consecuentemente,

$$|S| = \iint_D \left\| \frac{\partial \overline{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial y} \right\| dx\, dy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4(y-1)^2}\, dx\, dy.$$

Resolvemos esta integral mediante un cambio a polares, $x = r\cos\theta$, $y = 1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $|J(r,\theta)| = r$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 1 \leq r \leq 2)$, obteniendo:

$$\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4(y-1)^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right).$$

□

2. Problema 2

Calcular

$$\iint_S z\,dS,$$

donde S es la superficie definida por las condiciones $2x = y^2 - z^2$, $y^2 + z^2 \leq 4$.

Solución: 0.

RESOLUCIÓN. Podemos parametrizar S (Figura 2) mediante

$$\bar{r}(y,z) = \left(\frac{1}{2}(y^2 - z^2), y, z\right) \qquad ((y,z) \in D),$$

donde $D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq 4\}$.

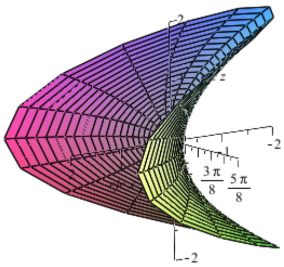

Figura 2.

El correspondiente producto vectorial fundamental es

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ y & 1 & 0 \\ -z & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -y, z),$$

cuya norma vale $\sqrt{1 + y^2 + z^2}$. Consecuentemente,

$$\iint_S z\,dS = \iint_D z \left\| \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} \right\| dy\,dz = \iint_D z\sqrt{1 + y^2 + z^2}\,dy\,dz.$$

Puesto que el integrando es impar en z y D es simétrico respecto a $z = 0$, se concluye que esta integral es nula.

□

3. Problema 3

Sea S el tronco del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ situado por encima del plano $z = 0$. Calcular el flujo del campo $\overline{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de S.

Solución: 24π.

RESOLUCIÓN. Podemos parametrizar S (Figura 3) mediante $\overline{r}(x,y) = (x,y,4-x^2-y^2)$ $((x,y) \in D)$, donde

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

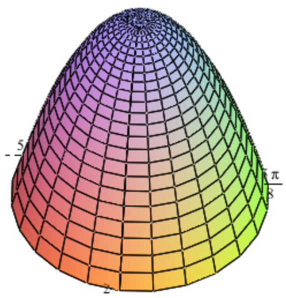

Figura 3.

El correspondiente producto vectorial fundamental es

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial y} = (2x, 2y, 1) \qquad ((x,y) \in D),$$

así que, sobre D,

$$\overline{F}(x,y,z) \cdot \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial y}\right) = (x,y,z) \cdot (2x,2y,1) = 2x^2 + 2y^2 + z = 2x^2 + 2y^2 + (4 - x^2 - y^2) = 4 + x^2 + y^2.$$

Mediante un cambio a polares, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $|J(r,\theta)| = r$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 2)$, ya obtenemos:

$$\iint_S \overline{F} \cdot dS = \iint_D (4 + x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 + r^2) r\, dr = 24\pi.$$

$\square$

4. Problema 4

Sea C la curva intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=9$ y el plano $x+z=3$.

(a) Utilizando el teorema de Stokes, transformar la integral de línea

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

en una integral de superficie y hallar su valor.

(b) Verificar el resultado calculando directamente la integral curvilínea.

Solución: $-\dfrac{9\pi}{\sqrt{2}}$.

RESOLUCIÓN.

(a) La intersección de las superficies $x^2+y^2+z^2=9$ y $x+z=3$ es la elipse C de ecuación $2x^2-6x+y^2=0$, o, en forma canónica,

$$\frac{(x-3/2)^2}{(3/2)^2}+\frac{y^2}{(3/\sqrt{2})^2}=1,$$

a altura $z=3-x$ (Figura 4).

El teorema de Stokes asegura que la integral de línea buscada coincide con el flujo del rotacional del campo vectorial $\overline{F}(x,y,z)=(y,z,x)$ a través de la porción S del plano $z=3-x$ encerrada por C, siempre que las orientaciones consideradas en S y C sean compatibles.

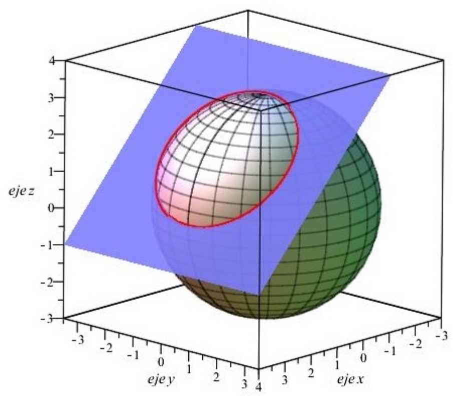

Figura 4.

Consideraremos S orientada en el sentido de la normal cuya tercera componente es positiva. Esta orientación se corresponde con la de C que deja S a la izquierda al ser recorrida.

Se obtiene fácilmente que rot $\overline{F} = -(1,1,1)$.

Por otra parte, podemos parametrizar S mediante $\overline{r}(u,v) = (u,v,3-u)$ $((u,v) \in D)$, donde

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-3/2)^2}{(3/2)^2} + \frac{y^2}{(3/\sqrt{2})^2} \leq 1 \right\}.$$

El producto vectorial fundamental correspondiente a esta parametrización es

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} = (1,0,1) \qquad ((u,v) \in D);$$

en particular, la parametrización preserva la orientación.

Consecuentemente,

$$\operatorname{rot} \overline{F} \cdot \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right) = -2 \qquad ((u,v) \in D).$$

Haciendo uso de la fórmula para el área encerrada por una elipse, se concluye que

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \iint_S \operatorname{rot} \overline{F} \cdot dS = \iint_D \operatorname{rot} \overline{F} \cdot \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right) du\,dv = -2|D| = -\frac{9\pi}{\sqrt{2}}.$$

(b) Parametrizamos C mediante

$$\overline{\alpha}(t) = \left(\frac{3}{2}(1+\cos t), \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t, \frac{3}{2}(1-\cos t) \right) \qquad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Entonces:

$$\overline{F}[\overline{\alpha}(t)] = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t, \frac{3}{2}(1-\cos t), \frac{3}{2}(1+\cos t) \right) \qquad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

$$\overline{\alpha}'(t) = \left(-\frac{3}{2} \operatorname{sen} t, \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{3}{2} \operatorname{sen} t \right) \qquad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Sigue que

$$\overline{F}[\overline{\alpha}(t)] \cdot \overline{\alpha}'(t) = -\frac{9}{2\sqrt{2}} + \frac{9}{2\sqrt{2}} \cos t + \frac{9}{4} \operatorname{sen} t + \frac{9}{4} \operatorname{sen} t \cos t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Por tanto,

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^{2\pi} \overline{F}[\overline{\alpha}(t)] \cdot \overline{\alpha}'(t)\,dt = -\frac{9}{2\sqrt{2}} \cdot 2\pi = -\frac{9\pi}{\sqrt{2}}.$$

□

5. Problema 5

Siendo C la curva intersección de las superficies $2x^2+2y^2=z^2$ y $z=y+1$, utilizar el teorema de Stokes para calcular la integral de línea

$$\int_C (y-1)\,dx + z^2\,dy + y\,dz.$$

Solución: $-\pi\sqrt{2}$.

RESOLUCIÓN. La intersección de las superficies $2x^2+2y^2=z^2$ y $z=y+1$ es la elipse C de ecuación

$$x^2+\frac{(y-1)^2}{2}=1$$

a altura $z=y+1$ (Figura 5).

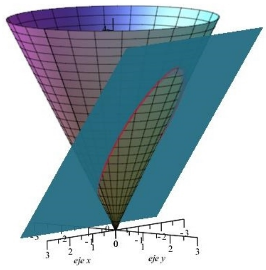

Figura 5.

El teorema de Stokes asegura que la integral de línea buscada coincide con el flujo del rotacional del campo vectorial $\overline{F}(x,y,z)=(y-1,z^2,y)$ a través de la porción S del plano $z=y+1$ encerrada por C, siempre que las orientaciones consideradas en S y C sean compatibles.

Suponemos que C se recorre dejando S a la izquierda y que, por tanto, S está orientada según la normal cuya tercera componente es positiva.

Se obtiene fácilmente que $\operatorname{rot}\overline{F}=(1-2z,0,-1)$.

Por otra parte, podemos parametrizar S mediante $\overline{r}(x,y)=(x,y,y+1)$ $((x,y)\in D)$, siendo

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+\frac{(y-1)^2}{2}\leq 1\right\}.$$

El producto vectorial fundamental correspondiente a esta parametrización es

$$\frac{\partial\overline{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial y}=(0,-1,1) \qquad ((x,y)\in D);$$

en particular, la parametrización preserva la orientación. Consecuentemente,

$$\operatorname{rot} \overline{F} \cdot \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial y} \right) = -1.$$

Haciendo uso de la fórmula para el área encerrada por una elipse, se concluye que

$$\int_C (y-1)\, dx + z^2\, dy + y\, dz = \iint_S \operatorname{rot} \overline{F} \cdot dS = \iint_D \operatorname{rot} \overline{F} \cdot \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial y} \right) dx\, dy = -|D| = -\pi\sqrt{2}.$$

□

6. Problema 6

Calcular el flujo del campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = (x,y,2z)$ a través de la superficie cerrada S que limita al sólido $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 4 - 2x^2 - 2y^2\right\}$,

(a) directamente;

(b) mediante el teorema de Gauss.

Solución: 16π.

RESOLUCIÓN. Se trata de calcular la integral

$$\iint_S \overline{F} \cdot dS.$$

Los dos procedimientos deben conducir al mismo resultado.

Obsérvese que S se compone de dos superficies: una porción S_1 del paraboloide $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ («tapa») y una porción S_2 del plano OXY («fondo»), las cuales se suponen orientadas en el sentido de la normal exterior a S (Figura 6).

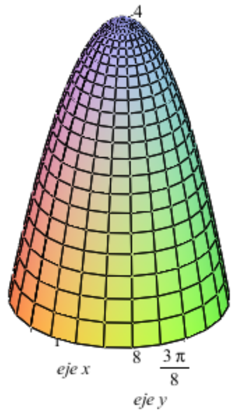

Figura 6.

(a) Parametrizamos por separado S_1: $\overline{r}_1(x,y) = (x,y,4-2x^2-2y^2)$ y S_2: $\overline{r}_2(x,y) = (x,y,0)$ $((x,y) \in D)$, con

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2\right\}$$

en ambos casos. Los respectivos productos vectoriales fundamentales son:

$$\frac{\partial \overline{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \overline{r}_1}{\partial y} = (4x, 4y, 1)\,, \quad \frac{\partial \overline{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \overline{r}_2}{\partial y} = (0,0,1) \qquad ((x,y) \in D)\,.$$

Nótese que $\overline{r}_1$ preserva la orientación, pero $\overline{r}_2$ la invierte.

Se tiene

$$\iint_{S_1} \overline{F} \cdot dS_1 = \iint_D (x, y, 8 - 4x^2 - 4y^2) \cdot (4x, 4y, 1)\, dx\, dy = 8|D| = 16\pi,$$

$$\iint_{S_2} \overline{F} \cdot dS_2 = -\iint_D (x,y,0) \cdot (0,0,1)\, dx\, dy = 0,$$

y finalmente

$$\iint_S \overline{F} \cdot dS = \iint_{S_1} \overline{F} \cdot dS_1 + \iint_{S_2} \overline{F} \cdot dS_2 = 16\pi.$$

(b) Ya que $\operatorname{div} \overline{F} = 4$, sigue del teorema de Gauss que

$$\iint_S \overline{F} \cdot dS = 4 \iiint_V \, dx\, dy\, dz.$$

Para calcular la integral triple empleamos un argumento «tapa-fondo», efectuando un cambio a coordenadas polares: $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, $|J(r,\theta)| = r$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq \sqrt{2}$. Entonces

$$\iint_S \overline{F} \cdot dS = 4 \iiint_V \, dx\, dy\, dz = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2r^2) r\, dr = 8\pi \left[2r^2 - \frac{1}{2} r^4 \right]_0^{\sqrt{2}} = 16\pi.$$

□

7. Problema 7

Se consideran las superficies

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2 = 1,\ 0 \le z \le 2\},$$

$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 5,\ z = e^{-x^2-y^2}+2-e^{-5}\right\},$$

$$S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1,\ z = 0\}.$$

Determinar:

(a) el área de S_1+S_3;

(b) $\displaystyle\iint_S \overline{F}\cdot dS$, donde $\overline{F}(x,y,z) = 2(x,y,z)$ y $S = S_1+S_2$.

Solución: (a) $7\pi - \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\ln(3-2\sqrt{2})$; (b) $2\pi\left(17-18e^{-5}\right)$.

RESOLUCIÓN.

(a) Las superficies S_1, S_2 y S_3 son, respectivamente, la superficie lateral, la «tapa» y el «fondo» del sólido de la Figura 7.

La superficie S_3 es el disco unidad del plano OXY, de modo que $|S_3| = \pi$. Para calcular $|S_1|$ parametrizamos S_1 mediante $\overline{r}(u,v) = \left(u\cos v, u\,\mathrm{sen}\, v, \sqrt{u^2-1}\right)$ $((u,v)\in D)$, donde

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le u \le \sqrt{5},\ 0 \le v \le 2\pi\right\}.$$

El correspondiente producto vectorial fundamental es

$$\frac{\partial\overline{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \cos v & \mathrm{sen}\, v & \dfrac{u}{\sqrt{u^2-1}} \\ -u\,\mathrm{sen}\, v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{u^2\cos v}{\sqrt{u^2-1}}, -\frac{u^2\,\mathrm{sen}\, v}{\sqrt{u^2-1}}, u\right) \qquad ((u,v)\in D),$$

cuya norma vale

$$\left\|\frac{\partial\overline{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial v}\right\| = \sqrt{\frac{u^4}{u^2-1}+u^2} = u\sqrt{\frac{u^2}{u^2-1}+1} = u\sqrt{2+\frac{1}{u^2-1}} \qquad ((u,v)\in D).$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
|S_1| &= \iint_{S_1} dS_1 = \iint_D \left\| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right\| du\, dv \\
&= \iint_D u\sqrt{2+\frac{1}{u^2-1}}\, du\, dv = \int_0^{2\pi} dv \int_1^{\sqrt{5}} u\sqrt{2+\frac{1}{u^2-1}}\, du.
\end{aligned}
$$

Efectuando el cambio de variable

$$
t^2 = 2+\frac{1}{u^2-1}, \qquad t\,dt = -\frac{u}{(u^2-1)^2}\,du, \qquad u\,du = -t(u^2-1)^2\,dt = -\frac{t}{(t^2-2)^2}\,dt
$$

obtenemos

$$
\int_1^{\sqrt{5}} u\sqrt{2+\frac{1}{u^2-1}}\, du = \int_{3/2}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2-2)^2}\, dt.
$$

Integrando ahora por partes encontramos que

$$
\begin{aligned}
\int \frac{t^2}{(t^2-2)^2}\, dt &= -\frac{1}{2}\frac{t}{t^2-2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-2} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{t}{t^2-2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}} \right) dt \\
&= -\frac{1}{2}\frac{t}{t^2-2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + C,
\end{aligned}
$$

donde C es una constante arbitraria. Consecuentemente

$$
\int_1^{\sqrt{5}} u\sqrt{2+\frac{1}{u^2-1}}\, du = 3 - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left| \frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \right| = 3 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(3-2\sqrt{2}),
$$

así que

$$
|S_1| = 6\pi - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln(3-2\sqrt{2}).
$$

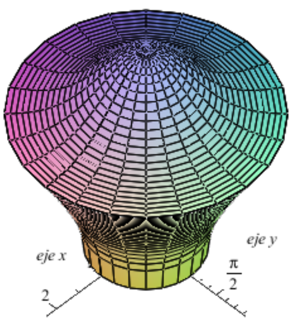

Figura 7.

Concluimos:

$$|S_1 + S_3| = 7\pi - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln(3 - 2\sqrt{2}).$$

(b) Es claro que, con cualquier orientación de S_3,

$$\iint_{S_3} \overline{F} \cdot dS_3 = 0.$$

Como div $\overline{F} = 6$, el teorema de Gauss entraña que

$$\iint_S \overline{F} \cdot dS = \iint_\Sigma \overline{F} \cdot d\Sigma = 6V,$$

donde S y $\Sigma = S_1 + S_2 - S_3$ tienen orientación exterior y V denota el volumen del sólido que Σ encierra (Figura 7). Efectuando un cambio a polares:

$$V = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\sqrt{5}} u \left(e^{-u^2} + 2 - e^{-5} \right) du - \int_0^{2\pi} dv \int_1^{\sqrt{5}} u\sqrt{u^2 - 1}\, du = \pi \left(\frac{17}{3} - 6e^{-5} \right).$$

Luego,

$$\iint_S \overline{F} \cdot dS = 2\pi \left(17 - 18e^{-5} \right).$$

□

8. Problema 8

Se consideran el campo vectorial

$$\overline{F}(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$$

y las superficies S, determinada por los puntos del paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ tales que $z \geq 1$, y σ, constituida por el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ en el plano $z = 1$.

(a) Probar que div $\overline{F} = 0$.

(b) Utilizando el teorema de la divergencia, justificar que el flujo exterior de $\overline{F}$ a través de S es igual al flujo exterior de $\overline{F}$ a través de σ.

(c) Calcular el flujo exterior de $\overline{F}$ a través de σ.

Solución: (c) $\pi(2-\sqrt{2})$.

RESOLUCIÓN.

(a) Se tiene que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \overline{F}(x,y,z) &= -\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}(2x^2+2y^2+2z^2) + 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} \\
&= -3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} = 0.
\end{aligned}$$

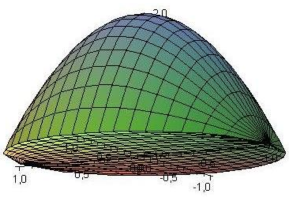

Figura 8.

(b) Si se orientan S y σ de manera que la normal a ambas superficies tenga tercera componente positiva, entonces $\Sigma = S - \sigma$ es una superficie cerrada con orientación exterior (Figura 8). Denotando por V el recinto que Σ encierra, el teorema de la divergencia permite afirmar que

$$\iint_S \overline{F}\cdot dS - \iint_\sigma \overline{F}\cdot d\sigma = \iint_\Sigma \overline{F}\cdot d\Sigma = \iiint_V \operatorname{div} \overline{F}\, dx\, dy\, dz = 0,$$

y de aquí

$$\iint_S \overline{F} \cdot dS = \iint_\sigma \overline{F} \cdot d\sigma.$$

(c) Parametrizamos σ mediante $\overline{r}(u,v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, 1)$ $(0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 2\pi)$. El producto vectorial fundamental correspondiente a esta parametrización es

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} = (0,0,u) \qquad (0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 2\pi).$$

Por tanto,

$$\iint_\sigma \overline{F} \cdot d\sigma = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} (u\cos v, u\operatorname{sen} v, 1) \cdot (0,0,u)\, du = \pi \int_0^1 \frac{2u}{(1+u^2)^{3/2}}\, du = \pi(2-\sqrt{2}).$$

$\square$

9. Problema 9

Sea S la porción de la semiesfera $x^2+y^2+z^2=4$, $z \geq 0$, situada dentro del cilindro $x^2+y^2=1$, y sea $\overline{F}(x,y,z)=(xy,yz,xz)$. Calcular el flujo exterior del campo rot $\overline{F}$ a través de S:

(a) directamente;

(b) mediante el teorema de Stokes;

(c) mediante el teorema de Gauss.

Solución: 0.

RESOLUCIÓN.

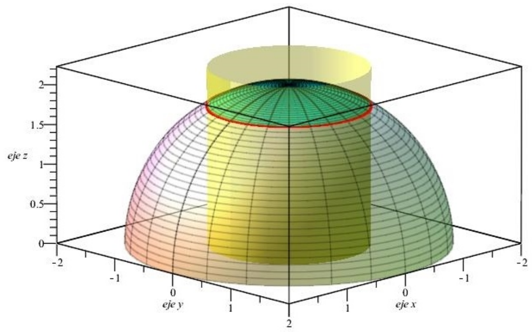

Figura 9.

(a) Podemos parametrizar S (Figura 9) mediante $\overline{r}(x,y)=(x,y,\sqrt{4-x^2-y^2})$ $((x,y)\in D)$, donde

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\right\}.$$

El correspondiente producto vectorial fundamental es

$$\frac{\partial\overline{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial y}=\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},1\right)\qquad((x,y)\in D),$$

que apunta hacia el exterior de la esfera y, por tanto, coincide con la normal exterior a ésta, $\overline{n}$. Por otra parte, se obtiene fácilmente que rot $\overline{F}=-(y,z,x)$. Así

$$\text{rot}\,\overline{F}\cdot\overline{n}=-\frac{xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}-y-x\qquad((x,y)\in D),$$

de donde, mediante un cambio a polares,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta; \qquad |J(r,\theta)| = r \qquad (0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1),$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathrm{rot}\,\overline{F}\cdot\overline{n}\,dS &= -\iint_D \left(\frac{xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + y + x\right) dx\,dy \\
&= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\frac{r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{4-r^2}} + r\,\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta\right) r\,dr \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) La intersección de $x^2+y^2+z^2=4$ $(z \ge 0)$ y $x^2+y^2=1$ se produce en la curva $x^2+y^2=1$ situada en el plano $z=\sqrt{3}$, que denotamos C y parametrizamos mediante

$$\overline{\alpha}(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, \sqrt{3}) \qquad (0 \le t \le 2\pi),$$

con

$$\overline{\alpha}'(t) = (-\mathrm{sen}\,t, \cos t, 0) \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Nótese que la orientación de C coincide con la inducida por la normal exterior a S. En virtud del teorema de Stokes,

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathrm{rot}\,\overline{F}\cdot d\overline{S} &= \int_0^{2\pi} \overline{F}[\overline{\alpha}(t)]\cdot\overline{\alpha}'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\cos t\,\mathrm{sen}\,t, \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,t, \sqrt{3}\cos t\right)\cdot(-\mathrm{sen}\,t, \cos t, 0)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\mathrm{sen}^2 t + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,t\right)\cos t\,dt = 0.
\end{aligned}$$

(c) Como div rot $\overline{F} = 0$, el teorema de Gauss proporciona la igualdad

$$\iint_S \mathrm{rot}\,\overline{F}\cdot d\overline{S} = \iint_\Sigma \mathrm{rot}\,\overline{F}\cdot d\overline{\Sigma},$$

donde Σ es la porción del plano $z=\sqrt{3}$ cortada por el cilindro $x^2+y^2=1$, orientada de manera que la normal al plano tiene tercera componente positiva.

Podemos parametrizar Σ mediante $\overline{\sigma}(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, \sqrt{3})$ $((u,v) \in T)$, donde

$$T = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 2\pi\right\}.$$

Se comprueba fácilmente que el correspondiente producto vectorial fundamental es $(0,0,u)$. Por tanto

$$\operatorname{rot} \overline{F} \cdot (0,0,u) = -u^2 \cos v \qquad ((u,v) \in T),$$

y, de aquí,

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} \overline{F} \cdot d\Sigma = -\iint_T u^2 \cos v \, du \, dv = -\int_0^{2\pi} \cos v \, dv \int_0^1 u^2 \, du = 0.$$

$\square$

10. Problema 10

Sea S el casquete del paraboloide $z = x^2 + y^2$ situado por debajo del plano $z = x$ y orientado en el sentido de la normal exterior, y sea $\overline{F}(x,y,z) = (-xz, x, y^2)$. Calcular el flujo

$$\iint_S \operatorname{rot} \overline{F} \cdot dS:$$

(a) directamente;

(b) mediante el teorema de Stokes;

(c) mediante el teorema de Gauss.

Solución: $-\dfrac{\pi}{4}$.

RESOLUCIÓN.

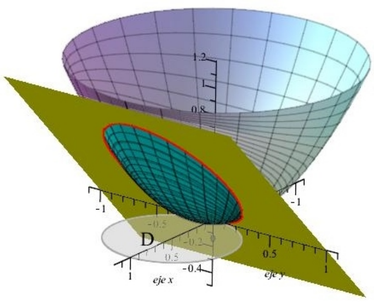

Figura 10.

(a) Podemos parametrizar S (Figura 10) mediante $\overline{r}(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$ $((x,y) \in D)$, donde

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

El correspondiente producto vectorial fundamental es

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial y} = (-2x, -2y, 1) \qquad ((x,y) \in D),$$

que apunta hacia el interior del paraboloide; consecuentemente, la normal exterior es $\overline{n} = (2x, 2y, -1)$ $((x,y) \in D)$. Por otra parte, se obtiene fácilmente que $\operatorname{rot} \overline{F} = (2y, -x, 1)$. Luego

$$\operatorname{rot} \overline{F} \cdot \overline{n} = 2xy - 1 \qquad ((x,y) \in D),$$

así que

$$\iint_S \text{rot}\,\overline{F}\cdot\overline{n}\,dS = \iint_D (2xy-1)\,dx\,dy.$$

Resolvemos esta integral mediante un cambio a polares,

$$x = \frac{1}{2} + r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta; \qquad |J(r,\theta)| = r \qquad \left(0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le \frac{1}{2}\right),$$

obteniendo:

$$\iint_D (2xy-1)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} \left[2\left(\frac{1}{2} + r\cos\theta\right) r\,\text{sen}\,\theta - 1\right] r\,dr = -\frac{\pi}{4}.$$

(b) La intersección de $z = x^2 + y^2$ y $z = x$ se produce en la curva

$$C:\ \overline{\alpha}(t) = \frac{1}{2}(1+\cos t, \text{sen}\,t, 1+\cos t) \qquad (0 \le t \le 2\pi),$$

con

$$\overline{\alpha}'(t) = \frac{1}{2}(-\text{sen}\,t, \cos t, -\text{sen}\,t) \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Nótese que la orientación de C es la opuesta a la inducida por la normal exterior a S. En virtud del teorema de Stokes,

$$\begin{aligned}
\iint_S \text{rot}\,\overline{F}\cdot dS &= -\int_0^{2\pi} \overline{F}[\overline{\alpha}(t)]\cdot\overline{\alpha}'(t)\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(-\frac{(1+\cos t)^2}{4}, \frac{1+\cos t}{2}, \frac{\text{sen}^2 t}{4}\right)\cdot(-\text{sen}\,t, \cos t, -\text{sen}\,t)\,dt \\
&= -\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1+\cos t)^2\,\text{sen}\,t\,dt - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\cos t\,dt + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t)\,\text{sen}\,t\,dt \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = -\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt = -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(c) Como div rot $\overline{F} = 0$, el teorema de Gauss proporciona la igualdad

$$\iint_S \text{rot}\,\overline{F}\cdot dS = \iint_\Sigma \text{rot}\,\overline{F}\cdot d\Sigma,$$

donde Σ es la porción del plano $z = x$ cortada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, orientada de manera que la normal al plano tenga tercera componente negativa.

Podemos parametrizar Σ mediante $\overline{\sigma}(x,y) = (x,y,x)$ $((x,y) \in D)$, donde, como antes,

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

El correspondiente producto vectorial fundamental es

$$\frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial x} \times \frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial y} = (-1,0,1) \qquad ((x,y) \in D).$$

Por tanto

$$\operatorname{rot} \overline{F} \cdot (1,0,-1) = (2y,-x,1) \cdot (1,0,-1) = 2y - 1 \qquad ((x,y) \in D),$$

y de aquí

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \overline{F} \cdot d\Sigma = \iint_{D} (2y-1)\, dx\, dy.$$

Resolvemos esta integral mediante un cambio a polares,

$$x = \frac{1}{2} + r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta; \qquad |J(r,\theta)| = r \qquad \left(0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \right),$$

obteniendo:

$$\iint_{D} (2y-1)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} (2r\,\mathrm{sen}\,\theta - 1)\, r\, dr = -\frac{\pi}{4}.$$

□