Aplicaciones físicas

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

OCW-ULL 2011/12: Cálculo Integral Vectorial

Instrucciones

A continuación se muestra una relación de problemas resueltos sobre aplicaciones físicas del cálculo integral vectorial.

- Selecciona un enunciado en el menú de la derecha e intenta resolver el problema por tus propios medios.
- Pulsa en **Resolución.** para ver una forma de resolver el problema.
- Pulsa en ► para continuar viendo la resolución del problema.
- Pulsa en ■ para regresar al enunciado del mismo problema, o usa el menú para seleccionar otro diferente.
- Pulsa dos veces sobre el botón *Volver* del menú para regresar a la última página vista.
- Pulsa sobre la imagen que acompaña a la resolución de un problema para ampliarla o reducirla.

OCGtools: processing OCG's ...

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 1

La temperatura de una placa es proporcional a su distancia al origen. Dicha placa se halla situada en la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}$. Sabiendo que en el punto $(1,0)$ su temperatura es de $100°$C, hallar la temperatura media de la placa.

Solución: $\dfrac{1000}{3}$ °C.

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 1

La temperatura de una placa es proporcional a su distancia al origen. Dicha placa se halla situada en la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}$. Sabiendo que en el punto $(1,0)$ su temperatura es de $100°$C, hallar la temperatura media de la placa.

Solución: $\dfrac{1000}{3}$ °C.

Resolución. La región D se muestra en la Figura 1.

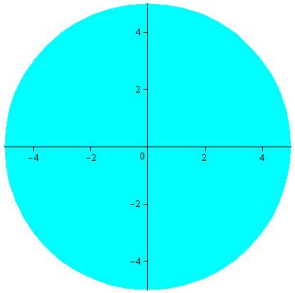

Figura 1.

La función de temperatura es de la forma $T(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$ $((x,y) \in D)$, donde $k \neq 0$ es una constante de proporcionalidad. Como $T(1,0) = 100 = k$, encontramos que $T(x,y) = 100\sqrt{x^2+y^2}$ $((x,y) \in D)$. Por otra parte, como es bien conocido, el área de D vale 25π.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Efectuando un cambio a coordenadas polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, con $|J(r,\theta)| = r$ $(0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 5)$, se concluye que la temperatura media de la placa es

$$\frac{100}{25\pi}\iint_D T(x,y)\,dx\,dy = \frac{4}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^5 r^2\,dr = \frac{1000}{3}.$$

■

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 2

La densidad en cualquier punto de una lámina semicircular de radio a es proporcional a la distancia desde el centro del círculo. Determinar el centro de masa de la lámina.

Solución: $\left(0, \dfrac{3a}{2\pi}\right)$.

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 2

La densidad en cualquier punto de una lámina semicircular de radio a es proporcional a la distancia desde el centro del círculo. Determinar el centro de masa de la lámina.

Solución: $\left(0, \dfrac{3a}{2\pi}\right)$.

Resolución. Sin pérdida de generalidad situamos la lámina en el semiplano superior de un sistema cartesiano de modo que el centro del semicírculo coincida con el origen de coordenadas (Figura 2). La función de densidad es entonces de la forma $\mu(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$ $((x,y) \in D)$, donde $k \neq 0$ es una constante de proporcionalidad.

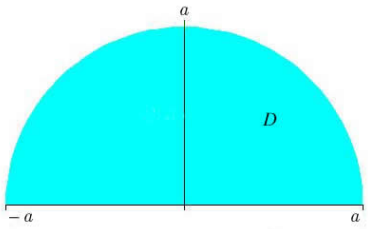

Figura 2.

Calculamos la masa de la lámina D y sus momentos de primer orden efectuando un cambio a polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, con $|J(r,\theta)| = r$ $(0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq r \leq a)$.

El valor de la masa será:

$$\iint_D \mu(x,y)\,dx\,dy = k\int_0^{\pi} d\theta \int_0^a r^2\,dr = \frac{ka^3\pi}{3}.$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Ya que D es simétrico respecto a $x = 0$ y el integrando es impar en x:

$$\iint_D x\mu(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Por otra parte:

$$\iint_D y\mu(x,y)\,dx\,dy = k\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta \int_0^a r^3\,dr = \frac{ka^4}{2}.$$

Se concluye que el centro de masa de la lámina está en el punto $(0, 3a/2\pi)$.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 3

Una lámina ocupa la parte del disco $x^2+y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante. Determinar su centro de masa si la densidad es proporcional al cuadrado de la distancia desde el eje OX para cualquier punto.

Solución: $\dfrac{16}{15\pi}(1,2)$.

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 3

Una lámina ocupa la parte del disco $x^2+y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante. Determinar su centro de masa si la densidad es proporcional al cuadrado de la distancia desde el eje OX para cualquier punto.

Solución: $\dfrac{16}{15\pi}(1,2)$.

Resolución. La función de densidad es de la forma $\mu(x,y) = ky^2$ $((x,y) \in D)$, donde $k \neq 0$ es una constante de proporcionalidad y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ denota la lámina en cuestión (Figura 3).

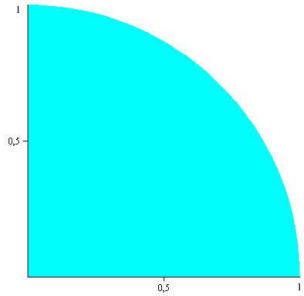

Figura 3.

Calculamos la masa de D y sus momentos de primer orden efectuando un cambio a polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $|J(r,\theta)| = r$ $(0 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq r \leq 1)$.

El valor de la masa será:

$$\iint_D \mu(x,y)\,dx\,dy = k\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^2\theta\,d\theta \int_0^1 r^3\,dr = \frac{k\pi}{16}.$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Inicio
Volver

Por otra parte:

$$\iint_D x\mu(x,y)\,dx\,dy = k\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^1 r^4\,dr = \frac{k}{15},$$

$$\iint_D y\mu(x,y)\,dx\,dy = k\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta\,d\theta\int_0^1 r^4\,dr = \frac{k}{10}B\left(2,\frac{1}{2}\right) = \frac{2k}{15}.$$

Se concluye que el centro de masa de la lámina está en el punto $(16/15\pi)(1,2)$.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 4

Se yuxtapone un rectángulo a un semicírculo de radio constante R, de modo que el diámetro coincida con uno de los lados del rectángulo. Se pide calcular las dimensiones a, b de éste para que el centro de masa de la figura completa coincida con el centro del semicírculo. Se supone la densidad superficial μ constante.

Solución: $a = R\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \quad b = 2R.$

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 4

Se yuxtapone un rectángulo a un semicírculo de radio constante R, de modo que el diámetro coincida con uno de los lados del rectángulo. Se pide calcular las dimensiones a, b de éste para que el centro de masa de la figura completa coincida con el centro del semicírculo. Se supone la densidad superficial μ constante.

Solución: $a = R\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \quad b = 2R.$

Resolución. Sea D la figura en cuestión, que situamos en un sistema de referencia cartesiano de manera que el centro del semicírculo coincida con el origen y los lados del rectángulo sean paralelos a los ejes de coordenadas (Figura 4). La longitud de la base del rectángulo será entonces $b = 2R$.

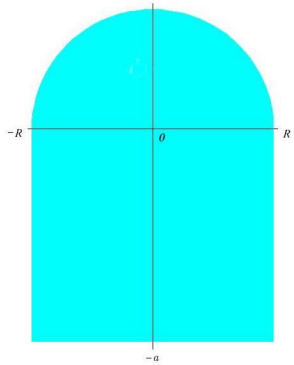

Figura 4.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Inicio
Volver

Para calcular la altura a del rectángulo impondremos que la ordenada del centro de masa de la figura completa sea nula, con lo que resulta la condición

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_{-R}^{R} dx \int_{-a}^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2-a^2)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{4R^3}{3}-2a^2R\right) = 0.$$

De aquí, descartando la solución $R=0$, concluimos que $a = R\sqrt{2/3}$.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 5

Encontrar los momentos de inercia I_x, I_y, I_0 para la lámina D, siendo D la región del primer cuadrante acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$, y con una densidad dada por la función $\mu(x,y) = xy$.

Solución: $I_x = \dfrac{1}{10}, \quad I_y = \dfrac{1}{16}, \quad I_0 = \dfrac{13}{80}.$

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 5

Encontrar los momentos de inercia I_x, I_y, I_0 para la lámina D, siendo D la región del primer cuadrante acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$, y con una densidad dada por la función $\mu(x,y) = xy$.

Solución: $I_x = \dfrac{1}{10}, \quad I_y = \dfrac{1}{16}, \quad I_0 = \dfrac{13}{80}.$

Resolución. La región D se muestra en la Figura 5.

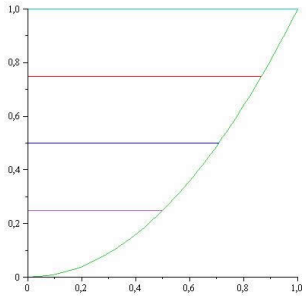

Figura 5.

Se tiene:

$$I_x = \iint_D xy^3\,dx\,dy = \int_0^1 y^3\,dy \int_0^{\sqrt{y}} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 y^4\,dy = \frac{1}{10},$$

$$I_y = \iint_D x^3 y\,dx\,dy = \int_0^1 y\,dy \int_0^{\sqrt{y}} x^3\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 y^3\,dy = \frac{1}{16},$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{13}{80}.$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 6

Calcular el momento de inercia del recinto encerrado por la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $z = 0$ respecto al eje OY. Considérese la densidad superficial μ constante.

Solución: $I_y = \dfrac{1}{4}a^3 b\mu\pi$.

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 6

Calcular el momento de inercia del recinto encerrado por la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $z = 0$ respecto al eje OY. Considérese la densidad superficial μ constante.

Solución: $I_y = \dfrac{1}{4}a^3 b\mu\pi$.

Resolución. Sin pérdida de generalidad suponemos $a, b > 0$.

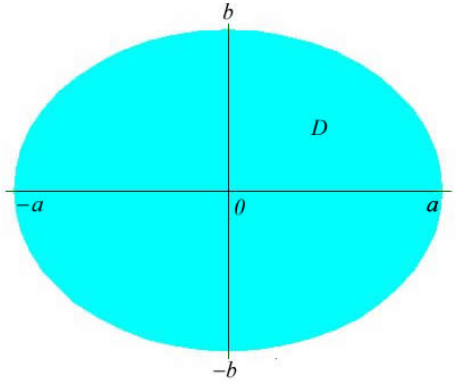

Figura 6.

Si D denota el recinto encerrado por la elipse en cuestión (Figura 6), se trata de calcular la integral

$$I_y = \mu \iint_D x^2 \, dx \, dy.$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Para ello efectuamos un cambio a coordenadas polares generalizadas: $x = ar\cos\theta$, $y = br\,\mathrm{sen}\,\theta$, con $|J(r,\theta)| = abr$ $(0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1)$. Se tiene entonces:

$$I_y = a^3 b\mu \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^1 r^3\, dr = \frac{1}{4} a^3 b\mu\pi.$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 7

Hallar I_x, I_y e I_0 para el área encerrada por la circunferencia de ecuación polar $r = 2(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$.

Solución: $I_x = I_y = \dfrac{1}{2} I_0 = 3\pi$.

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 7

Hallar I_x, I_y e I_0 para el área encerrada por la circunferencia de ecuación polar $r = 2(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$.

Solución: $I_x = I_y = \dfrac{1}{2} I_0 = 3\pi$.

Resolución. El área D considerada es la encerrada por la circunferencia de centro $(1,1)$ y radio $\sqrt{2}$ (Figura 7).

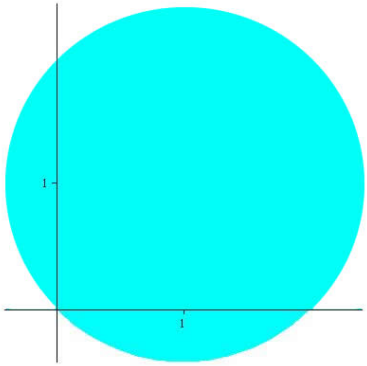

Figura 7.

Efectuamos una traslación del punto $(1,1)$ al origen y un cambio a coordenadas polares: $x-1 = r\cos\theta$, $y-1 = r\operatorname{sen}\theta$, $|J(r,\theta)| = r$ $(0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le \sqrt{2})$. Suponiendo que la densidad es constantemente igual a 1, se obtiene:

$$I_x = \iint_D y^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r(1 + r\operatorname{sen}\theta)^2\,dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (r + 2r^2\operatorname{sen}\theta + r^3\operatorname{sen}^2\theta)\,dr = 3\pi.$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Por simetría:

$$I_y = \iint_D x^2 \, dx \, dy = 3\pi.$$

Finalmente:

$$I_0 = I_x + I_y = 6\pi.$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 8

Hallar el valor promedio de la función

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$$

en el interior de la esfera $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$.

Solución: $\dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{3}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 8

Hallar el valor promedio de la función

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$$

en el interior de la esfera $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$.

Solución: $\dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{3}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Resolución. Sea R el sólido encerrado por S, esto es, $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ (Figura 8), y sea V su volumen.

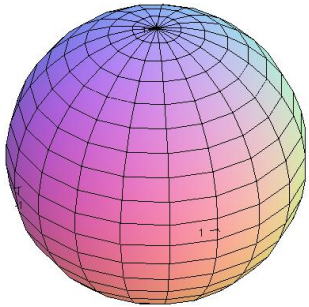

Figura 8.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Como es bien conocido, $V = 4\pi/3$. No obstante, podemos calcular V como una integral triple haciendo un cambio a esféricas: $x = \rho\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi$, $y = \rho\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi$, $z = \rho\cos\varphi$, con $|J(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2\,\operatorname{sen}\varphi$ $(0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \rho \le 1)$, de modo que

$$V = \iiint_R dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi \int_0^1 \rho^2\,d\rho = \frac{4\pi}{3}. \tag{1}$$

Similarmente,

$$\iiint_R \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1+\rho^2}}\,d\rho = 4\pi \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1+\rho^2}}\,d\rho. \tag{2}$$

Integrando por partes:

$$\int \frac{\rho^2}{\sqrt{1+\rho^2}}\,d\rho = \rho\sqrt{1+\rho^2} - \int \sqrt{1+\rho^2}\,d\rho = \rho\sqrt{1+\rho^2} - \int \frac{1+\rho^2}{\sqrt{1+\rho^2}}\,d\rho.$$

De aquí

$$2\int \frac{\rho^2}{\sqrt{1+\rho^2}}\,d\rho = \rho\sqrt{1+\rho^2} - \int \frac{d\rho}{\sqrt{1+\rho^2}},$$

o bien

$$\int \frac{\rho^2}{\sqrt{1+\rho^2}}\,d\rho = \frac{\rho}{2}\sqrt{1+\rho^2} - \frac{1}{2}\int \frac{d\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} = \frac{\rho}{2}\sqrt{1+\rho^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\rho + \sqrt{1+\rho^2}\right) + C.$$

Consecuentemente,

$$\int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1+\rho^2}}\,d\rho = \frac{\rho}{2}\sqrt{1+\rho^2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln\left(\rho + \sqrt{1+\rho^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right). \tag{3}$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

En virtud de (1), (2) y (3), el valor promedio pedido es

$$\frac{1}{V}\iiint_R \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 9

Calcular la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2+y^2=2x$ y el cono $z^2=x^2+y^2$ si la densidad es $\mu(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Solución: 3π.

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 9

Calcular la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2+y^2=2x$ y el cono $z^2=x^2+y^2$ si la densidad es $\mu(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Solución: 3π.

Resolución. Sea R el sólido en cuestión (Figura 9). Por simetría y paridad, para calcular la masa M de R es suficiente cuadruplicar la masa M^* de la porción R^* de R situada en el primer octante.

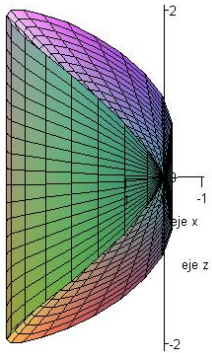

Figura 9.

Para ello aplicamos un argumento «tapa-fondo», donde la «tapa» es el semicono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y el «fondo» el semidisco de centro $(1,0)$ y radio 1 en el semiplano $y\geq 0$ del plano OXY.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Haciendo un cambio de variable a cilíndricas: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$, con jacobiano $|J(r,\theta,z)| = r$ $(0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le r \le 2\cos\theta,\ 0 \le z \le r)$, encontramos que la masa M^* de R^* es

$$\begin{aligned} M^* &= \iiint_{R^*} \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2\,dr \int_0^r dz = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^3\,dr = 4\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta = 2B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Por tanto, $M = 4M^* = 3\pi$.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 10

Se considera un semicono que forma en el vértice un ángulo de 60°. Hallar el centroide del volumen cortado en dicho semicono por una esfera de radio 2 con centro en el vértice del cono.

Solución: $\left(0, 0, \frac{3}{8}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$.

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 10

Se considera un semicono que forma en el vértice un ángulo de $60°$. Hallar el centroide del volumen cortado en dicho semicono por una esfera de radio 2 con centro en el vértice del cono.

Solución: $\left(0, 0, \frac{3}{8}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$.

Resolución. Sea R el volumen en cuestión (Figura 10). Sin pérdida de generalidad suponemos que R tiene densidad 1.

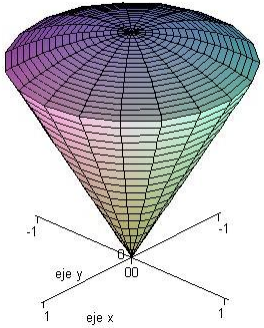

Figura 10.

Si referimos R a un sistema de coordenadas cartesianas situándolo en el semiespacio superior de manera que el vértice del cono coincida con el origen y su eje con el eje OZ, criterios de simetría y paridad muestran que su centroide debe estar situado sobre dicho eje; por tanto, sólo necesitamos calcular la tercera componente.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

A tal fin, efectuamos un cambio a coordenadas esféricas, teniendo en cuenta que en este nuevo sistema de coordenadas la ecuación del semicono es $\varphi = \pi/(3\cdot 2) = \pi/6$ y la de la esfera, $\rho = 2$, por lo que las ecuaciones y el jacobiano del cambio son:

$$x = \rho\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi, \quad y = \rho\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi, \quad z = \rho\cos\varphi;$$

$$|J(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2\operatorname{sen}\varphi \qquad (0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi/6,\ 0 \le \rho \le 2).$$

No se pierde generalidad suponiendo que la densidad del sólido R es constantemente igual a 1 (su valor real no afecta al cálculo del centroide). En tal caso, la masa de R coincide con su volumen:

$$\iiint_R dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi \int_0^2 \rho^2\,d\rho = \frac{8\pi}{3}(2-\sqrt{3}).$$

Por otra parte,

$$\iiint_R z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int_0^2 \rho^3\,d\rho = \pi.$$

Consecuentemente, el centroide de R es el punto $\left(0,0,3\left(2+\sqrt{3}\right)/8\right)$.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 11

Determinar el centro de masa de un sólido con densidad constante que está acotado por el cilindro parabólico $x = y^2$ y los planos $x = z$, $z = 0$, $x = 1$.

Solución: $\left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14}\right)$.

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 11

Determinar el centro de masa de un sólido con densidad constante que está acotado por el cilindro parabólico $x = y^2$ y los planos $x = z$, $z = 0$, $x = 1$.

Solución: $\left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14}\right)$.

Resolución. Sin pérdida de generalidad suponemos que la función de densidad es constantemente igual a 1 (su valor real no afecta al cálculo del centro de masa).

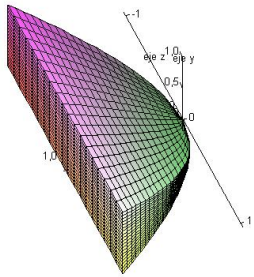

Figura 11.

Aplicando un argumento «tapa-fondo», el volumen del sólido R en cuestión (Figura 11) resulta ser

$$\iiint_R dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy \int_0^x dz = 2\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx = \frac{4}{5}.$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Inicio
Volver

Seguidamente calculamos de forma análoga los momentos de primer orden de R. En primer lugar,

$$\iiint_R x\,dx\,dy\,dz = 2\int_0^1 x^2\sqrt{x}\,dx = \frac{4}{7}.$$

Como R es simétrico respecto de $y=0$ y el integrando es impar en y:

$$\iiint_R y\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Por último,

$$\iiint_R z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 x^2\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{7}.$$

Se concluye que el centro de masa está en el punto $(5/7, 0, 5/14)$.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 12

Se considera el sólido homogéneo limitado por las superficies $x^2+y^2=4x$, $z=0$ y $x^2+y^2=4z$. Calcular sus momentos de inercia respecto a los ejes de coordenadas, expresándolos en función de su volumen.

Solución: $I_x=\dfrac{55}{18}V, \quad I_y=\dfrac{175}{18}V, \quad I_z=\dfrac{80}{9}V.$

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 12

Se considera el sólido homogéneo limitado por las superficies $x^2+y^2=4x$, $z=0$ y $x^2+y^2=4z$. Calcular sus momentos de inercia respecto a los ejes de coordenadas, expresándolos en función de su volumen.

Solución: $I_x=\dfrac{55}{18}V, \quad I_y=\dfrac{175}{18}V, \quad I_z=\dfrac{80}{9}V.$

Resolución. Sea R el sólido en cuestión (Figura 13). Suponemos sin pérdida de generalidad que la densidad es constantemente igual a 1.

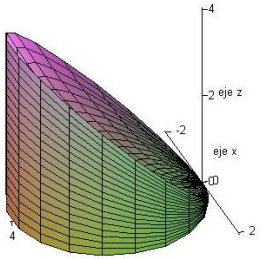

Figura 13.

Por simetría y paridad podemos restringir el cálculo del volumen y los momentos de inercia a la porción de R situada en el primer octante y duplicar luego el resultado. Aplicando un cambio a cilíndricas estándar, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}V &= \iiint_R dx\,dy\,dz=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{4\cos\theta}r\,dr\int_0^{r^2/4}dz\\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{4\cos\theta}r^3\,dr=4^2\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta=2^3B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)=3\pi.\end{aligned}$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Inicio
Volver

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}I_x &= \iiint_R (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{4\cos\theta} r\,dr \int_0^{r^2/4} (r^2\,\mathrm{sen}^2\theta + z^2)\,dz \\
&= \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^2\theta\,d\theta \int_0^{4\cos\theta} r^3\,dr \int_0^{r^2/4} dz + \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{4\cos\theta} r\,dr \int_0^{r^2/4} z^2\,dz \\
&= \frac{4^4}{3} B\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right) + \frac{4^3}{3} B\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right) = \frac{55\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}I_y &= \iiint_R (x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{4\cos\theta} r\,dr \int_0^{r^2/4} (r^2\cos^2\theta + z^2)\,dz \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta \int_0^{4\cos\theta} r^3\,dr \int_0^{r^2/4} dz + \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{4\cos\theta} r\,dr \int_0^{r^2/4} z^2\,dz \\
&= \frac{5\cdot 4^3}{3} B\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right) = \frac{175\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}I_z &= \iiint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{4\cos\theta} r^3\,dr \int_0^{r^2/4} dz \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{4\cos\theta} r^5\,dr = \frac{4^4}{3} B\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right) = \frac{80\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

De las igualdades anteriores se infiere el resultado requerido.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 13

Determinar el momento de inercia de una bola no homogénea de radio R y masa M respecto a un diámetro si la densidad de cada punto es proporcional a la distancia del punto al centro de la bola.

Solución: $\dfrac{4MR^2}{9}$.

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 13

Determinar el momento de inercia de una bola no homogénea de radio R y masa M respecto a un diámetro si la densidad de cada punto es proporcional a la distancia del punto al centro de la bola.

Solución: $\dfrac{4MR^2}{9}$.

Resolución. Sea B la bola en cuestión, que centramos en el origen de un sistema de referencia cartesiano (Figura 12).

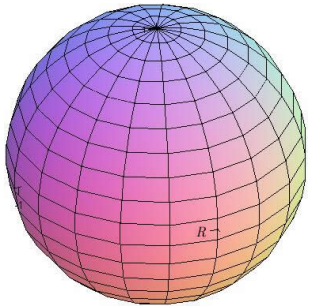

Figura 12.

La función de densidad es entonces de la forma $\mu(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $((x,y,z) \in B)$. Por simetría, no se pierde generalidad calculando el momento de inercia I_z respecto al diámetro de B situado sobre el eje OZ.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Aplicando un cambio a esféricas estándar se tiene:

$$M = k\iiint_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi \int_0^R \rho^3\,d\rho = k\pi R^4.$$

Así:

$$\begin{aligned} I_z &= k\iiint_B (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\varphi\,d\varphi \int_0^R \rho^5\,d\rho \\ &= \frac{k\pi R^6}{3} B\left(2,\frac{1}{2}\right) = \frac{4MR^2}{9}. \end{aligned}$$

■

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 14

Dado el sólido R de volumen V limitado por un semicono circular recto de radio a y altura h, se pide hallar:

(a) el centroide de R;

(b) el momento de inercia de R con respecto al eje del cono.

Solución: (a) $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(0,0,\dfrac{3}{4}h\right)$; (b) $I_z = \dfrac{3}{10}a^2V$.

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 14

Dado el sólido R de volumen V limitado por un semicono circular recto de radio a y altura h, se pide hallar:

(a) el centroide de R;

(b) el momento de inercia de R con respecto al eje del cono.

Solución: (a) $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(0,0,\dfrac{3}{4}h\right)$; (b) $I_z = \dfrac{3}{10}a^2V$.

Resolución. Referimos R a un sistema cartesiano situándolo en el semiespacio superior de manera que su vértice sea el origen de coordenadas y su eje, el eje OZ (Figura 14). Se pide calcular el centroide de R, lo que implícitamente proporciona el dato de que R tiene densidad constante k.

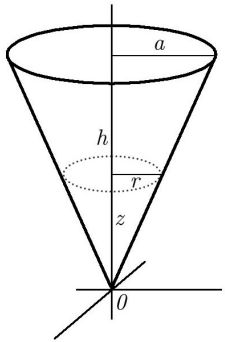

Figura 14.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $k = 1$, ya que el valor real de k no afecta al cálculo del centroide y, en caso de que fuese $k \neq 1$, la expresión que obtendremos para el momento de inercia permanecería válida sin más que reemplazar en ella el volumen por la masa. Aprovechando la simetría del recinto respecto del eje OZ podemos calcular el volumen V de R cuadruplicando el correspondiente a la porción de R situada en el primer octante. Para resolver la integral triple que resulta haremos un cambio de variables a coordenadas cilíndricas: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$, con $|J(r,\theta,z)| = r$. Mediante semejanza de triángulos (ver Figura 14) encontramos que la ecuación del semicono en coordenadas cilíndricas es

$$r = \frac{a}{h}z,$$

de manera que los límites de integración tras el cambio a las nuevas variables serán: $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq r \leq a$, $hr/a \leq z \leq h$. Consecuentemente,

$$V = \iiint_R dx\,dy\,dz = 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a r\,dr \int_{hr/a}^h dz = 2\pi h \int_0^a r\left(1 - \frac{r}{a}\right)\,dr = \frac{1}{3}\pi h a^2.$$

(a) El centroide es el punto $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ cuyas coordenadas satisfacen

$$V\overline{x} = \iiint_R x\,dx\,dy\,dz, \quad V\overline{y} = \iiint_R y\,dx\,dy\,dz, \quad V\overline{z} = \iiint_R z\,dx\,dy\,dz.$$

Al ser R simétrico respecto de los planos $x = 0$ e $y = 0$ y los correspondientes integrandos impares en x e y, respectivamente, las integrales que comparecen en los segundos miembros de las dos primeras igualdades anteriores son nulas; en otras palabras, $\overline{x} = \overline{y} = 0$, lo que coincide con nuestra percepción física de que el centroide debe estar situado sobre el eje OZ.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Calcularemos ahora $\overline{z}$. Teniendo en cuenta nuevamente la simetría de R respecto de los planos $x=0$ e $y=0$ junto con la paridad del integrando en las variables x e y, y efectuando un cambio de variables a coordenadas cilíndricas, obtenemos

$$M_{xy} = \iiint_R z\,dx\,dy\,dz = 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a r\,dr \int_{hr/a}^h z\,dz = \pi h^2 \int_0^a r\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\,dr = \frac{1}{4}\pi h^2 a^2,$$

de donde

$$\overline{z} = \frac{1}{V}M_{xy} = \frac{3}{4}h.$$

Se concluye que

$$(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(0,0,\frac{3}{4}h\right).$$

(b) Aprovechando de nuevo la simetría de R respecto de los planos $x=0$ e $y=0$ junto con la paridad del integrando en las variables x e y, y efectuando un cambio a cilíndricas en la integral extendida a la porción de R situada en el primer octante, encontramos que el momento de inercia de R respecto a su eje (eje OZ) es

$$I_z = \iiint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a r^3\,dr \int_{hr/a}^h dz = 2\pi h \int_0^a r^3\left(1-\frac{r}{a}\right)\,dr = \frac{1}{10}\pi h a^4 = \frac{3}{10}a^2 V.$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 15

Hallar el centroide de un arco circular de radio r y ángulo central 2θ.

Solución: $\left(\dfrac{r \operatorname{sen}\theta}{\theta}, 0\right)$.

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 15

Hallar el centroide de un arco circular de radio r y ángulo central 2θ.

Solución: $\left(\dfrac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{\theta}, 0\right)$.

Resolución. Referimos el arco, C, a un sistema polar (equivalentemente, a un sistema cartesiano de modo que el vértice y la bisectriz del ángulo subtendido coincidan con el origen de coordenadas y el semieje OX positivo, respectivamente). Véase la Figura 15 para una representación con $r = 2$ y $\theta = \pi/2$.

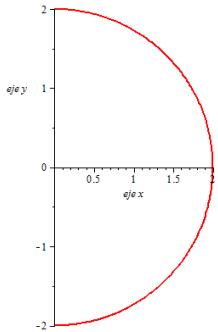

Figura 15.

Una parametrización para C es $\overline{\alpha}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t)$ $(-\theta \le t \le \theta)$, con $\overline{\alpha}'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t)$ y $\|\overline{\alpha}'(t)\| = r$ $(-\theta \le t \le \theta)$.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

El arco tiene longitud

$$L = \int_C ds = r \int_{-\theta}^{\theta} dt = 2r\theta.$$

Razones de simetría y paridad muestran que

$$\int_C x\, ds = r^2 \int_{-\theta}^{\theta} \cos t\, dt = 2r^2 \int_0^{\theta} \cos t\, dt = 2r^2 \operatorname{sen}\theta, \qquad \int_C y\, ds = r^2 \int_{-\theta}^{\theta} \operatorname{sen} t\, dt = 0.$$

Por tanto, las coordenadas del centroide son

$$\overline{x} = \frac{1}{L}\int_C x\, ds = \frac{2r^2 \operatorname{sen}\theta}{2r\theta} = \frac{r \operatorname{sen}\theta}{\theta}, \qquad \overline{y} = \frac{1}{L}\int_C y\, ds = 0.$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 16

Calcular el momento de inercia de la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=9$ respecto de uno de sus diámetros. Supóngase densidad superficial μ constante.

Solución: $216\mu\pi$.

Resolución.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

Problema 16

Calcular el momento de inercia de la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=9$ respecto de uno de sus diámetros. Supóngase densidad superficial μ constante.

Solución: $216\mu\pi$.

Resolución. Sea S la superficie esférica en cuestión (Figura 16).

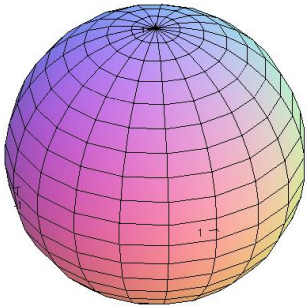

Figura 16.

Por simetría, es suficiente calcular el momento de inercia de S respecto al eje OZ. Parametrizamos S mediante

$$\bar{r}(u,v)=(3\cos u\,\operatorname{sen} v, 3\operatorname{sen} u\,\operatorname{sen} v, 3\cos v) \quad (0\le u\le 2\pi,\ 0\le v\le \pi).$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16

La norma del correspondiente producto vectorial fundamental es

$$\left\| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right\| = 9 \operatorname{sen} v \quad (0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq \pi).$$

Por tanto,

$$I_z = \mu \iint_S (x^2 + y^2)\, dS = 81\mu \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 v\, dv = 162\mu\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 v\, dv = 216\mu\pi.$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Problema 7
Problema 8
Problema 9
Problema 10
Problema 11
Problema 12
Problema 13
Problema 14
Problema 15
Problema 16