Universidad de La Laguna
Departamento de Análisis Económico

Carmen Dolores Álvarez Albelo
Miguel Becerra Domínguez
Rosa María Cáceres Alvarado
María del Pilar Osorno del Rosal
Olga María Rodríguez Rodríguez

Tema 3
La elasticidad y sus aplicaciones
Relación elasticidad-precio y gasto en la curva de demanda lineal

ESTUDIO DE LA ELASTICIDAD-PRECIO DE LA DEMANDA A LO LARGO DE UNA CURVA DE DEMANDA LINEAL DE PENDIENTE NEGATIVA

Sea una curva de demanda lineal de pendiente negativa, que viene dada por la expresión general: $P_X^D = a - bQ_X$, siendo $a, b > 0$.

La elasticidad-precio de la demanda se define de la siguiente manera: $\varepsilon_{XX}^D = \dfrac{\partial Q_X^D}{\partial P_X} \cdot \dfrac{P_X}{Q_X^D}$

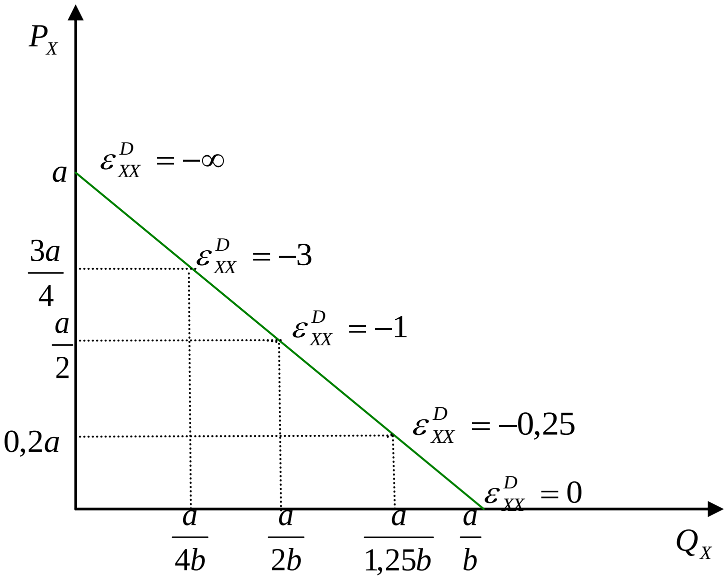
Calculemos el valor de esta elasticidad en diferentes puntos de la curva de demanda lineal. Como resultado, veremos que, aunque la pendiente de la curva sea constante e igual a $-b$, la **elasticidad-precio de la demanda lineal es diferente en cada punto**.

Operando en la expresión de la elasticidad-precio de la demanda, tenemos:

$$\varepsilon_{XX}^D = \frac{1}{-b} \cdot \frac{P_X}{Q_X^D}$$

Para obtener el valor de la elasticidad-precio en cada punto, basta sustituir los valores de P_X y de Q_X^D correspondientes en la expresión anterior. Para simplificar, calculemos el valor de esta elasticidad en 5 puntos "clave" de la curva, ya que, conociendo el valor de la elasticidad en éstos se puede saber cómo es en el resto de puntos de la curva.

Representemos gráficamente la curva de demanda lineal:



❖ ***Punto*** $(0, a)$***:***

$$\varepsilon_{XX}^{D} = \frac{1}{-b} \cdot \frac{a}{0} = -\infty$$

La demanda en el punto de corte con el eje de ordenadas es totalmente elástica.

❖ ***Punto medio de la curva*** $\left(\frac{a}{2b}, \frac{a}{2}\right)$***:***

$$\varepsilon_{XX}^{D} = \frac{1}{-b} \cdot \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2b}} = -1$$

La demanda en el punto medio de la curva tiene elasticidad-precio unitaria.

❖ ***Punto*** $\left(\frac{a}{b}, 0\right)$***:***

$$\varepsilon_{XX}^{D} = \frac{1}{-b} \cdot \frac{0}{\frac{a}{b}} = 0$$

La demanda en el punto de corte con el eje de abscisas es totalmente inelástica.

❖ ***Punto*** $\left(\frac{a}{4b}, \frac{3a}{4}\right)$***:***

$$\varepsilon_{XX}^{D} = \frac{1}{-b} \cdot \frac{\frac{3a}{4}}{\frac{a}{4b}} = -3$$

La demanda en este punto es elástica. La demanda será elástica ($-\infty < \varepsilon_{XX}^{D} < -1$) en cualquier punto situado entre el punto de corte con el eje de ordenadas (donde es totalmente elástica) y el punto medio de la curva (donde la elasticidad es unitaria).

- ***Punto*** $\left(\frac{a}{1{,}25b},\ 0{,}2a\right)$***:***

$$\varepsilon_{XX}^{D} = \frac{1}{-b}\cdot\frac{0{,}2a}{\frac{a}{1{,}25b}} = -0{,}25$$

La demanda en este punto es inelástica. La demanda será inelástica ($-1 < \varepsilon_{XX}^{D} < 0$) en cualquier punto situado entre el punto medio de la curva (donde la elasticidad es unitaria) y el punto de corte con el eje de abscisas (donde es totalmente inelástica).

ESTUDIO DE LA RELACIÓN ELASTICIDAD Y GASTO A LO LARGO DE LA CURVA DE DEMANDA LINEAL DE PENDIENTE NEGATIVA

La función de gasto en el bien X, G_X, se define de la siguiente manera:

$G_X = P_X \cdot Q_X$, siendo P_X el precio de mercado del bien X y Q_X la cantidad comprada del bien X.
Sabiendo que $P_X^D = a - bQ_X$, siendo $a,b > 0$, tenemos:

$$G_X = (a - bQ_X) \cdot Q_X = aQ_X - bQ_X^2$$

Como podemos observar, la función de gasto es una función parabólica. Si estamos interesados en analizar cómo varía el gasto a lo largo de la curva de demanda lineal de pendiente negativa, podemos estudiar la forma de esta parábola a medida que cambia Q_X. Para ello, veamos si esta función de gasto tiene algún óptimo:

Condición de primer orden de óptimo:

$\frac{\partial G_X}{\partial Q_X} = a - 2bQ_X = 0 \rightarrow \boxed{Q_X = \frac{a}{2b}} \rightarrow$ Para este valor de Q_X la función de gasto presenta un óptimo.

Condición de segundo orden de óptimo:

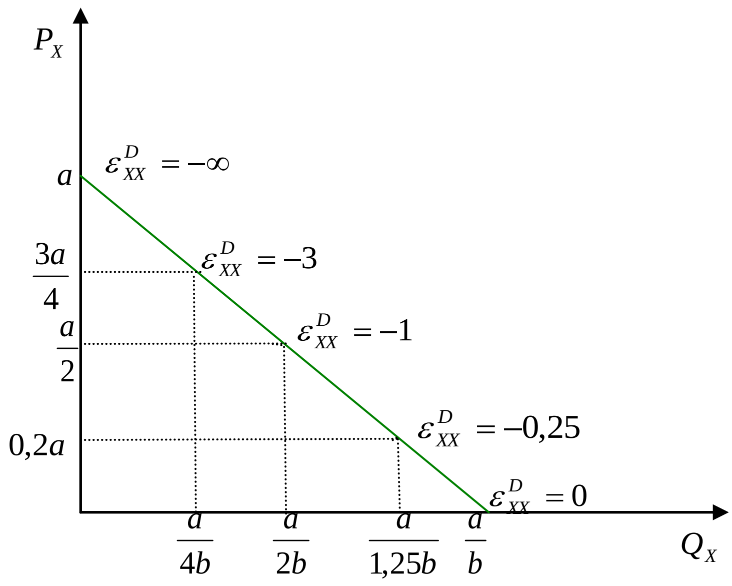
$\frac{\partial^2 G_X}{\partial Q_X^2} = -2b < 0 \rightarrow$ Para $Q_X = \frac{a}{2b}$, la función de gasto presenta un máximo.

Si para $Q_X = \frac{a}{2b}$ la función de gasto presenta un máximo, esto quiere decir que para valores de $Q_X < \frac{a}{2b}$ la función de gasto crece, mientras que para valores de $Q_X > \frac{a}{2b}$ la función de gasto decrece.
Para obtener qué precio es el que haría máximo el gasto, basta sustituir el valor de $Q_X = \frac{a}{2b}$ en la función de demanda lineal:

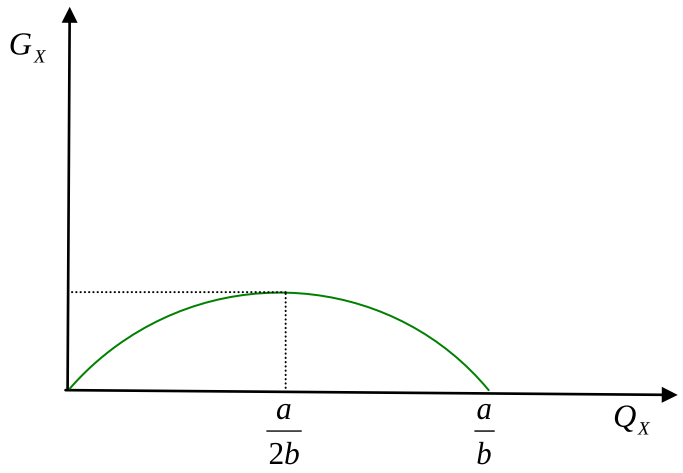
$$P_X^D = a - bQ_X = a - b\frac{a}{2b} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \rightarrow \boxed{P_X = \frac{a}{2}}$$

Por lo tanto, podríamos relacionar las siguientes curvas de demanda y de gasto, siendo Q_X la variable del eje de abscisas en ambas gráficas.

Curva de demanda lineal de pendiente negativa



Función de gasto asociada a una curva de demanda lineal de pendiente negativa



Esta relación entre la elasticidad precio de la demanda lineal de pendiente negativa y el gasto también se puede hacer analíticamente. Lo vemos por partes:

- Cuando la cantidad comprada es cero, el gasto también es cero, por lo que la función de gasto parte del origen.
- En el tramo creciente de la función de gasto, la curva de demanda lineal es elástica. Al reducirse el precio, la cantidad demandada aumenta, aunque al estar en el tramo elástico de la demanda, la cantidad demandada aumenta porcentualmente más que la reducción porcentual que experimenta el precio, por lo que el resultado final es que el gasto aumenta.
- Cuando la curva de demanda lineal presenta elasticidad unitaria, el gasto es máximo, tal y como se obtuvo al calcular las condiciones de óptimo de la función de gasto. Este punto

es $\left(Q_X = \frac{a}{2b}; P_X = \frac{a}{2}\right)$ en la curva de demanda lineal. Esto se debe a que la variación porcentual que experimenta la cantidad demandada coincide con la variación porcentual que experimenta el precio.

- En el tramo decreciente de la función de gasto, la curva de demanda lineal es inelástica. Al reducirse el precio, la cantidad demandada aumenta, aunque al estar en el tramo inelástico de la demanda, la cantidad demandada aumenta porcentualmente menos que la reducción porcentual que experimenta el precio, por lo que el resultado final es que el gasto se reduce.
- Nuevamente, el gasto vuelve a ser cero para $Q_X = \frac{a}{b}$. En este punto, el precio es cero y esto se puede comprobar simplemente sustituyendo la cantidad anterior en la curva de demanda lineal: $P_X^D = a - bQ_X = a - b\frac{a}{b} = 0$.