



Tema 1

Equilibrio general y fallos de mercado

Tema 1. Equilibrio General y Fallos de Mercado.

- 1.1. Introducción.
 - 1.2. Un modelo de Equilibrio General.
 - 1.3. Equilibrio Walrasiano.
 - 1.3.1. La toma de decisiones por parte de los agentes de la economía.
 - 1.3.2. El concepto de equilibrio Walrasiano.
 - 1.3.3. El cálculo del equilibrio Walrasiano.
 - 1.4. Eficiencia productiva y frontera de posibilidades de producción.
 - 1.4.1. Conjunto de posibilidades de producción, eficiencia productiva y frontera de posibilidades de producción.
 - 1.4.2. La caja de Edgeworth de factores y la curva de asignaciones de factores con eficiencia productiva.
 - 1.4.3. La relación marginal de transformación o coste de oportunidad entre dos bienes.
 - 1.4.4. La convexidad del conjunto de posibilidades de producción.
 - 1.4.5. El cálculo de la frontera de posibilidades de producción y su representación a través de un gráfico de cuatro cuadrantes.
 - 1.4.6. El equilibrio Walrasiano y la eficiencia productiva.
 - 1.5. Eficiencia en sentido de Pareto.
 - 1.5.1. El concepto de eficiencia paretiana y el sistema de ecuaciones que definen el óptimo paretiano.
 - 1.5.2. Las condiciones de eficiencia:
 - 1.5.2.1. Eficiencia en la combinación factorial entre empresas (Eficiencia productiva).
 - 1.5.2.2. Eficiencia asignativa del consumo o eficiencia de la asignación de bienes entre consumidores.
 - 1.5.2.3. Eficiencia de la combinación productiva o elección en la combinación de producción en la FPP que sea eficiente.
 - 1.5.2.4. Utilización plena de los recursos de la economía.
 - 1.5.3. Representación del óptimo de Pareto en un gráfico de cuatro cuadrantes.
 - 1.6. Eficiencia del equilibrio Walrasiano: Teoremas del Bienestar.
 - 1.7. Algunos modelos de Equilibrio General.
 - 1.7.1. Intercambio puro.
 - 1.7.2. Un consumidor, dos empresas, un factor y dos bienes.
 - 1.8. Los fallos de mercado.
 - 1.8.1. Los efectos externos.
 - 1.8.2. Los bienes públicos.
- Apéndices.

1.1. Introducción.

Cuando en un modelo económico hay interacción entre una serie de agentes, se necesita definir algún tipo de **equilibrio** que nos permita dar predicciones sobre el comportamiento del modelo. Se entiende por equilibrio, tanto en economía como en otras materias, como la física, una situación en la que, una vez alcanzada, no hay tendencia a que cambie. En economía, equilibrio es una situación en la que todos los agentes tienen incentivos a hacer lo que están haciendo, lo que implica que no tienen incentivos a cambiar o desviarse de su comportamiento. Dicho de otra manera, todos los agentes hacen lo que quieren y, por tanto, no hay ninguna fuerza que haga que las cosas cambien, de ahí el equilibrio. Por ejemplo, en el modelo de oferta y demanda de un mercado, hay equilibrio cuando la oferta es igual a la demanda, y la cantidad que los consumidores compran y los productores venden coinciden, respectivamente, con sus demandas y ofertas individuales al precio de equilibrio. Esto implica que cada consumidor está comprando la cantidad que quiere comprar (su demanda del bien al precio de equilibrio) y cada productor está vendiendo la cantidad que quiere vender (su oferta al precio de equilibrio); por tanto, todo el mundo hace lo que quiere y no hay ningún incentivo a que los agentes cambien su comportamiento. Otro ejemplo: en el equilibrio de Nash, cada agente (jugador) elige la estrategia que maximiza sus pagos dadas las estrategias de los otros agentes y, por tanto, no tiene incentivos a desviarse porque está obteniendo lo máximo que puede obtener dado el comportamiento de los otros agentes.

Otro elemento fundamental de los modelos donde los distintos agentes interactúan en los mercados es el sistema de precios. Éste va a ser un indicador de la escasez relativa de los distintos bienes y factores, y va a proporcionar a los agentes un mecanismo de coordinación. Así, cuando hay mayor escasez de un determinado bien o factor, la manera en que se coordinan los agentes es estableciendo un precio relativo alto, lo que hace que los compradores (demandantes) no quieran comprar mucho de ese bien o factor, y los vendedores (oferentes) tengan incentivos a proporcionar mayores cantidades de ese bien o factor. Coordinar las cantidades que tienen que producir y consumir los distintos agentes en un sistema de planificación central resulta muy complicado, porque se requiere una gran cantidad de información. En el sistema de mercado, la coordinación entre productores y consumidores se hace a través del sistema de precios.

Entre los modelos en los que existe un sistema de precios se pueden distinguir dos tipos, dependiendo de si todos los precios que aparecen en el modelo son endógenos o no:

- Modelos de **equilibrio parcial**: son modelos donde una serie de precios vienen dados y se consideran como variables exógenas. De hecho, los mercados en los que los precios son variables exógenas ni siquiera aparecen representados en el modelo. De ahí el nombre de equilibrio parcial; hay equilibrio en una serie de mercados, aquellos donde los precios son variables endógenas, pero en los otros mercados donde los precios son variables exógenas, el equilibrio no se recoge en el modelo.
- Modelos de **equilibrio general**: son modelos donde todos los precios son endógenos y vienen determinados en cada uno de los mercados. Se llaman modelos de equilibrio general porque para que haya equilibrio, tienen que estar en equilibrio todos los mercados simultáneamente.

La elección entre analizar un fenómeno económico con un modelo de equilibrio general o parcial depende de la naturaleza del problema. El equilibrio parcial es adecuado para examinar cuestiones económicas donde las interacciones de distintos mercados no son muy relevantes para entender ese problema económico en cuestión. Si, por ejemplo, queremos estudiar la fijación de precios y cantidades en un mercado de un bien concreto bajo situación de oligopolio, el equilibrio parcial seguramente es el tipo de modelo más adecuado para hacerlo. Sin embargo, si la interacción entre los distintos mercados es un elemento importante del problema a tratar, lo más conveniente suele ser utilizar modelos de equilibrio general.

El equilibrio general no solo es una parte fundamental de la Microeconomía, sino que, además, se aplica en muchos otros campos de la economía. Si se quiere tener una visión general de la interacción de los mercados de la economía, lo ideal es utilizar modelos de equilibrio general. No es de extrañar, por tanto, que la mayoría de los modelos macroeconómicos de los últimos 25 años sean de equilibrio general. Pero, además de la Macroeconomía, los modelos de equilibrio general se usan en los más diversas ramas de la economía: Comercio Internacional, Hacienda Pública, Economía de los Recursos Naturales, Economía del Turismo, etc. Una de las tendencias de las últimas décadas es la utilización de modelos de equilibrio general cuantitativos, donde los parámetros del modelo se calculan numéricamente a través de regularidades empíricas o estimaciones. Estos modelos nos permiten dar predicciones cuantitativas sobre los efectos de determinados cambios de variables exógenas o analizar los efectos cuantitativos de determinadas políticas económicas. Evidentemente, para poder utilizar estos modelos cuantitativos es necesario poder calcular el equilibrio, uno de los aspectos en los que se hace hincapié en este tema.

En estos apuntes se empieza presentando un modelo de equilibrio general y definiendo lo que es el **equilibrio Walrasiano**. En el equilibrio Walrasiano todos los agentes maximizan sus funciones objetivo, es decir, los consumidores maximizan su utilidad y las empresas maximizan sus beneficios y, además, todos los mercados, tanto de bienes como de factores, están en equilibrio simultáneamente (es decir, la demanda de cada bien o factor se iguala a su oferta). Por tanto, el equilibrio Walrasiano es similar a otros conceptos de equilibrio en economía: si los agentes están maximizando sus funciones objetivo, no pueden mejorar desviándose de su comportamiento y, por tanto, no tienen ningún incentivo a cambiar. En otras palabras, los agentes están haciendo “lo que quieren”, es decir, tienen incentivos a hacer los que están haciendo. Los agentes en el equilibrio Walrasiano compran y venden bienes o factores. Más concretamente, los consumidores o economías domésticas compran bienes y venden factores productivos, mientras que las empresas venden bienes y compran factores productivos.

Uno de los supuestos básicos del equilibrio Walrasiano es que los agentes son **competitivos**, es decir, son agentes que no tienen poder de mercado suficiente para modificar los precios de mercado, siendo, por tanto, **precio-aceptantes**, esto es, consideran los precios como dados y no como una variable de elección. Los modelos con agentes competitivos son muy populares en economía porque tienen una gran virtud: la simplicidad. Esto hace que este tipo de modelos sean casi siempre la mejor manera de empezar a analizar un problema económico, constituyendo, de este modo, el modelo de referencia (“benchmark model”). Una vez que se entiende cómo funciona el modelo competitivo, suele hacerse modificaciones de éste si el problema económico que

se está tratando requiere de modelos más complejos, pero siempre se utiliza como modelo de referencia el competitivo. Además, suelen compararse los resultados de los modelos más complejos con los del modelo de referencia.

En estos apuntes se analizan algunas propiedades del equilibrio Walrasiano. Así, se empieza por la **eficiencia productiva**, que significa que para aumentar la producción de un bien es necesario reducir la producción de otro. Al conjunto de las combinaciones de bienes eficientes desde el punto de vista productivo se denomina **frontera de posibilidades de producción**. Si estamos en una combinación productiva en la frontera de posibilidades de producción, entonces, se puede definir **coste de oportunidad** de un bien en términos de otro, o **relación marginal de transformación** de un bien por otro, a la cantidad adicional del segundo bien que se podría producir si se dejara de producir una unidad del primer bien. La maximización de los beneficios de las empresas implica que el equilibrio Walrasiano es eficiente desde un punto de vista productivo, pero, además, los precios relativos son iguales al coste de oportunidad o relación marginal de transformación de los bienes, lo que significa que los precios del equilibrio Walrasiano reflejan correctamente la escasez de los bienes en la economía. Ésta, como veremos más adelante, es una propiedad importante del equilibrio Walrasiano.

La propiedad más importante que vamos a analizar en este tema es, sin duda, la **eficiencia en sentido de Pareto**. Se dice que una situación es eficiente en sentido de Pareto si no podemos mejorar a un agente sin empeorar a otro. La eficiencia paretiana es un criterio más fuerte que la eficiencia productiva, ya que bajo el axioma de insaciabilidad de las preferencias, la eficiencia paretiana implica la eficiencia productiva, pero la eficiencia productiva no implica la eficiencia paretiana. De este modo, si no se da la eficiencia productiva, podemos aumentar la producción de un bien sin reducir la de otro, lo que implica que podemos dar esa cantidad adicional de producción de ese bien a un agente mejorándolo sin empeorar a nadie. Por tanto, si no se da la eficiencia productiva, seguro que tampoco se da la eficiencia en sentido de Pareto. Ahora bien, puede darse la eficiencia productiva sin que se dé la eficiencia de Pareto, bien porque no se elige la combinación productiva eficiente o porque no se distribuyen eficientemente los bienes entre los agentes económicos.

Un resultado muy importante del tema es el **Primer Teorema del Bienestar**, según el cual el equilibrio Walrasiano es eficiente en sentido de Pareto. Este resultado es fundamental, no porque no haya situaciones en las que no se dé la eficiencia paretiana, sino porque hace que el modelo competitivo sea el modelo de referencia donde se cumple la eficiencia paretiana y, a partir de ahí, podemos modificar este modelo básico para identificar, de forma precisa, las causas que generan ineficiencia en la economía y las posibles soluciones a la misma. Esto lo analizaremos en el epígrafe 1.8, cuando tratemos el problema de los efectos externos y de los bienes públicos (los llamados fallos de mercado). La “inversa” del Primer Teorema del Bienestar también se cumple y se le conoce como Segundo Teorema del Bienestar. Éste señala que cualquier asignación de recursos eficiente en sentido de Pareto, la podemos implementar como un equilibrio Walrasiano si distribuimos los derechos de propiedad sobre los factores y las empresas de la manera adecuada.

Tal y como se comenta arriba, hay situaciones reales en las que no se dan las condiciones necesarias para que el equilibrio de mercado sea eficiente, esto es, no se

cumplen los supuestos que requiere el Primer Teorema del Bienestar. En este tema también se analizan algunas de estas situaciones de ineficiencia. Empezaremos con los **efectos externos**, que ocurren cuando las acciones de un agente afectan a otro/s sin que haya contrapartida monetaria. Un ejemplo es el caso de las empresas que generan contaminación y afectan a la salud de las personas, que no reciben ningún pago en contrapartida; esto hace que la empresa contaminante genere unos costes en otros agentes que no paga. Por tanto, los costes privados no coinciden con los sociales y esto hace que el sistema de precios de mercado no refleje correctamente la escasez de los bienes en la economía, lo que implica una serie de incentivos incorrectos que generan la ineficiencia del mecanismo de mercado. Así, si una empresa genera efectos externos negativos, es decir, afectan negativamente a otros agentes sin que haya pagos de contrapartida, los costes privados de esta empresa no reflejan los costes que imponen a nivel social, lo que implica que, al no tener en cuenta los costes generados por los efectos externos, produzcan cantidades ineficientemente grandes. Por el contrario, si una empresa genera efectos externos positivos, la empresa beneficia a otros agentes sin recibir ningún pago a cambio. Esto hace que los costes privados de la empresa sean superiores a los sociales, lo que reduce los incentivos de la empresa a producir, y hace que la cantidad producida sea ineficientemente pequeña.

Los bienes a los que se refiere la definición de equilibrio Walrasiano son los llamados bienes privados, con dos importantes características: 1) si un agente consume un bien privado, esto reduce el posible consumo de este mismo bien por parte de otros agentes, es decir, los bienes privados son **rivales**; 2) es posible impedir a una persona que consuma un bien (por ejemplo, si no lo paga), es decir, los bienes privados son **excluibles**. Aquellos bienes que no son rivales ni excluibles son denominados **bienes públicos**. Por ejemplo, los fuegos artificiales pueden ser vistos por una persona sin que ello reduzca el disfrute de dichos fuegos por parte de otras personas: son bienes no rivales; y, además, es muy difícil impedir que esos fuegos artificiales sean vistos por algunas personas, por ejemplo, por los que no los paguen, es decir, son bienes no excluibles. Hay muchos ejemplos de bienes públicos: calles, carreteras (bajo ciertas condiciones), la ley, parques públicos,...etc. Tanto la no exclusión como la no rivalidad de los bienes públicos conllevan problemas de eficiencia. De este modo, la no exclusión hace que no sea posible hacer pagar a las personas que disfrutan del bien público, ya que lo disfrutarán independientemente de que paguen o no dicho bien. Esto es lo que se denomina el problema del “**free rider**” (o del “gorroneo”), que consiste en que las personas que disfrutan de los bienes públicos no los pagan. Por tanto, si los bienes públicos fueran producidos por empresas privadas, dichos bienes o no se producirían o se produciría una cantidad ineficientemente pequeña de los mismos, ya que los “free riders” no pagarían por el uso de los mismos, con lo que las empresas privadas no tendrían incentivos a producirlos. Por otro lado, la no rivalidad también implica problemas de ineficiencia. Cuando los bienes no son rivales, se consigue alcanzar la cantidad óptima cuando cada agente paga según su disposición a pagar, es decir, cada agente paga un precio por unidad igual a lo que estaría dispuesto a pagar por disfrutar de la última unidad de bien público: **equilibrio de Lindahl**. Ahora bien, en el equilibrio de Lindahl, cada agente paga un precio distinto, ya que la disposición a pagar cambia según las preferencias y la renta de los consumidores, pero esta heterogeneidad de los precios pagados por los distintos agentes es incompatible con el equilibrio Walrasiano, donde todos los consumidores pagan lo mismo.

1.2. Un modelo de Equilibrio General.

En el primer modelo de equilibrio general que se presenta vamos a considerar lo siguiente:

- Hay dos factores, capital (K) y trabajo (L), dos bienes, x e y , dos consumidores o economías domésticas, 1 y 2, y dos empresas, la que produce el bien x y la que produce el bien y , respectivamente.
- Los preferencias de las economías domésticas vienen dadas por la función de utilidad¹ $u^1(c_x^1, c_y^1)$ para el consumidor 1 y $u^2(c_x^2, c_y^2)$ para el consumidor 2, siendo c_x^1 la cantidad de bien x consumida por la economía doméstica 1, c_y^1 la cantidad de bien y consumida por la economía doméstica 1, c_x^2 la cantidad de bien x consumida por la economía doméstica 2, y c_y^2 la cantidad de bien y consumida por la economía doméstica 2.
- La producción de la empresa que produce el bien x y la correspondiente a la empresa que produce el bien y vienen dadas por las respectivas funciones de producción² $F_x(K_x, L_x)$ y $F_y(K_y, L_y)$, siendo K_x y L_x las cantidades de capital y trabajo utilizadas por la empresa productora del bien x , y K_y y L_y las cantidades de capital y trabajo utilizadas por la empresa productora del bien y . A la producción de la empresa del bien x la denominaremos q_x y a la producción de la empresa del bien y la llamaremos q_y .
- p_x y p_y son, respectivamente, el precio del bien x y del bien y , mientras que w y r son, respectivamente, los precios de utilización del trabajo y del capital.
- Los beneficios de las empresas son la diferencia entre los ingresos y los costes, y vienen dados por $\pi_x = p_x q_x - wL_x - rK_x$ y $\pi_y = p_y q_y - wL_y - rK_y$, siendo π_x y π_y , respectivamente, los beneficios de las empresas productoras del bien x y del bien y .
- Las economías domésticas son dueñas de los factores productivos y de las empresas de la economía. Denotaremos por N^1 y B^1 las cantidades de trabajo y capital que posee la economía doméstica 1. Análogamente, N^2 y B^2 son las cantidades de trabajo y capital que posee la economía doméstica 2. θ_x^1 y θ_y^1 son las participaciones del consumidor 1 en los beneficios de las empresas productoras del bien x y del bien y , mientras que θ_x^2 y θ_y^2 son las participaciones del consumidor 2 en los beneficios de las empresas productoras del bien x y del bien y . Las participaciones de los consumidores en los beneficios se pueden interpretar intuitivamente como el porcentaje de acciones que tiene un consumidor de una empresa, si ésta fuera una sociedad anónima. Evidentemente, dado que los consumidores son los propietarios de las empresas de la economía, las participaciones de los consumidores en cada empresa tienen que sumar 1:

¹ Las funciones de utilidad son continuas, diferenciables de segundo orden, estrictamente crecientes en ambos argumentos en $\Re_{++}^2$ y estrictamente cuasi-cóncavas.

² Las funciones de producción son continuas, diferenciables de segundo orden, estrictamente crecientes en ambos argumentos en $\Re_{++}^2$ y estrictamente cuasi-cóncavas.

$$\theta_x^1 + \theta_x^2 = 1; \theta_y^1 + \theta_y^2 = 1$$

Como las economías domésticas son propietarias de los factores y de las empresas, sus rentas proceden del alquiler de sus factores y la participación en los beneficios de las empresas. Por tanto, las rentas del consumidor 1 y 2 serían, respectivamente:

$$m^1 = wN^1 + rB^1 + \theta_x^1 \pi_x + \theta_y^1 \pi_y$$

$$m^2 = wN^2 + rB^2 + \theta_x^2 \pi_x + \theta_y^2 \pi_y$$

A los largo de este tema vamos a suponer que los agentes son competitivos, es decir, un agente (un consumidor o una empresa) que individualmente no puede afectar al precio del mercado y, por tanto, maximiza su función objetivo (función de utilidad o beneficios) considerando los precios como dados (es decir, es precio-aceptante). Para que nuestro modelo sea tratable y por motivos didácticos, vamos a suponer un número pequeño de consumidores y empresas, pero vamos a considerar que los agentes son precio-aceptantes. No obstante, hay que tener en cuenta que el modelo se puede generalizar fácilmente para considerar un número elevado de consumidores y empresas.

1.3. Equilibrio Walrasiano.

1.3.1. La toma de decisiones por parte de los agentes de la economía.

En esta sección vamos a analizar la toma de decisiones por parte de agentes individuales, que son las economías domésticas y las empresas.

Problema de optimización de los consumidores: como ya se ha visto en Microeconomía I, el problema de maximización de los consumidores es el siguiente (se resuelve solo para el consumidor 1 y sería análogo para el consumidor 2):

$$\max_{c_x^1, c_y^1} u^1(c_x^1, c_y^1)$$

$$s.a \quad p_x c_x^1 + p_y c_y^1 \leq m^1$$

El Lagrangiano correspondiente a este problema sería de la siguiente forma:

$$\ell = u^1(c_x^1, c_y^1) + \lambda [m^1 - p_x c_x^1 - p_y c_y^1]$$

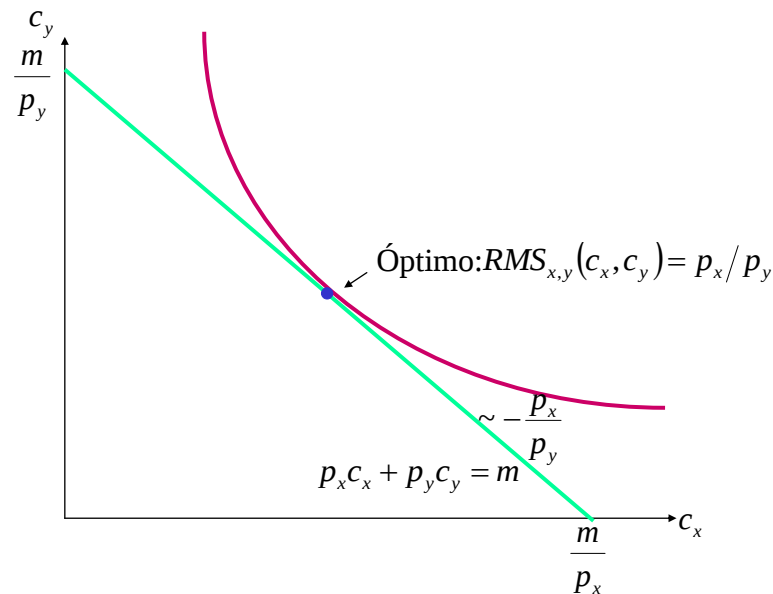
Las condiciones de primer orden para solución interior, cuando el consumidor elige cantidades positivas de todos los bienes, son de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial c_x^1} &= \frac{\partial u^1(c_x^1, c_y^1)}{\partial c_x^1} - \lambda p_x = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial c_y^1} &= \frac{\partial u^1(c_x^1, c_y^1)}{\partial c_y^1} - \lambda p_y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow RMS_{x,y}^1(c_x^1, c_y^1) = \frac{\frac{\partial u^1(c_x^1, c_y^1)}{\partial c_x^1}}{\frac{\partial u^1(c_x^1, c_y^1)}{\partial c_y^1}} = \frac{p_x}{p_y}$$

Los consumidores maximizan su utilidad cuando la relación marginal de sustitución coincide

con el precio relativo de los bienes: $RMS_{x,y}^1(c_x^1, c_y^1) = \frac{p_x}{p_y}$

En el punto óptimo la RMS se tiene que igualar al precio relativo



En dicho punto, la curva de indiferencia es tangente a la recta de balance. Esto implica que para alcanzar un nivel de utilidad mayor se tendría que optar por un punto que no cumpla la restricción presupuestaria.

Problema de optimización de las empresas: el problema de maximización de beneficios se puede tratar de dos maneras (se resuelve solo para la empresa que produce el bien x y sería análogo para la empresa que produce el bien y):

- Desde el punto de vista de la contratación de factores:

$$\max_{q_x, K_x, L_x} p_x q_x - wL_x - rK_x$$

$$s.a \ F_x(K_x, L_x) \geq q_x$$
- Desde el punto de vista de la elección de la cantidad de producción:

$$\max_{q_x} p_x q_x - c_x(w, r, q_x)$$

Estos dos enfoques son absolutamente equivalentes, aunque en equilibrio general suele ser más sencillo utilizar el primer punto de vista.

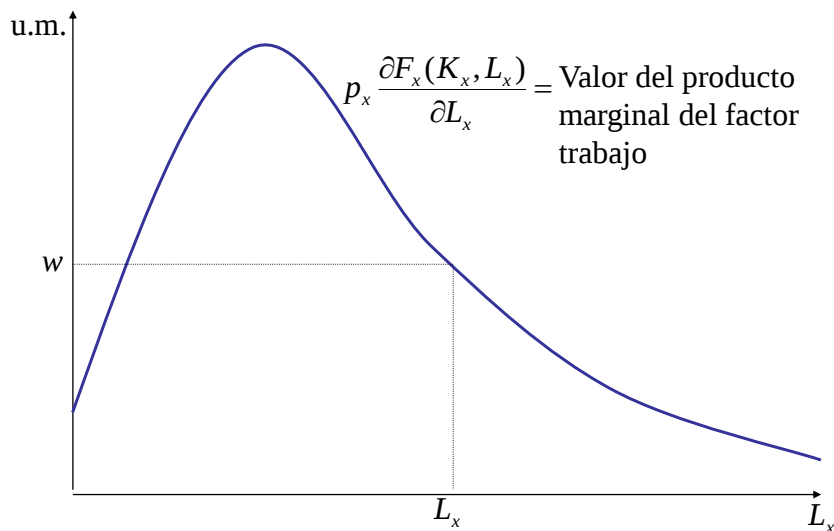
Siguiendo el primer punto de vista, la función Lagrangiana correspondiente al problema de maximización de beneficios es la siguiente:

$$\ell = p_x q_x - wL_x - rK_x + \psi[F_x(K_x, L_x) - q_x]$$

Las condiciones de primer orden para solución interior son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial q_x} &= p_x - \psi = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial L_x} &= -w + \psi \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial K_x} &= -r + \psi \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} &= w \\ p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} &= r \end{aligned}$$

Es decir, se contrata un factor hasta el punto en que el valor del producto marginal de dicho factor, $p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x}$, se iguale a su coste unitario, es decir, su precio, w . Si, por ejemplo, el valor del producto marginal del trabajo fuera mayor que su precio, $p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} > w$, entonces aumentando la contratación de una unidad adicional de trabajo aumentaría más los ingresos que los costes, por lo que en este punto inicial no se estaría maximizando los beneficios. Si, por el contrario, el valor del producto marginal del trabajo fuera menor que su precio, $p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} < w$, entonces disminuyendo en una unidad la cantidad de trabajo, disminuirían más los costes que los ingresos, por lo que en este punto inicial no se estarían maximizando los beneficios. Por tanto, una condición necesaria para que se maximicen los beneficios es que el valor del producto marginal de dicho factor, $p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x}$, se iguale a su precio, w .



Evidentemente, la maximización de los beneficios implica la minimización del coste. Para verlo vamos a recordar el problema de minimización del coste:

$$\begin{aligned} \min_{L_x, K_x} \quad & wL_x + rK_x \\ \text{s.a.} \quad & F_x(K_x, L_x) \geq q_x \end{aligned}$$

La función Lagrangiana correspondiente a este problema de minimización es como sigue:

$$\ell = wL_x + rK_x - \mu[F_x(K_x, L_x) - q_x]$$

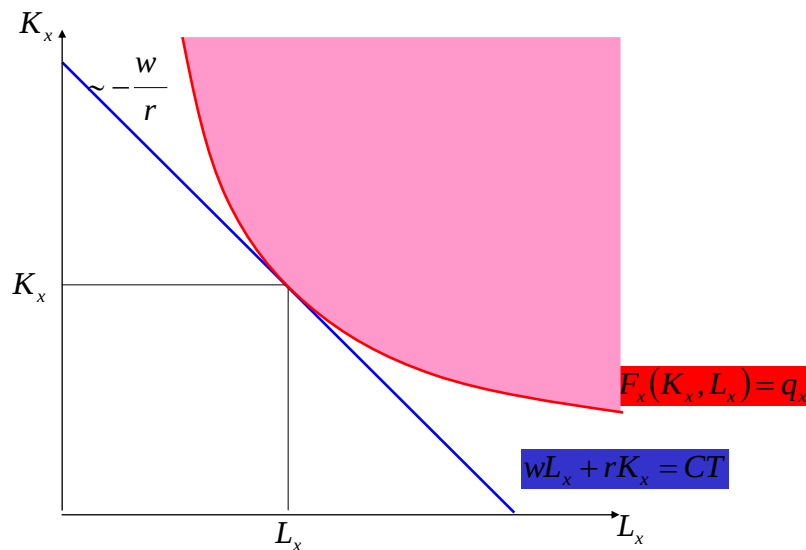
Las condiciones de primer orden (para solución interior) son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} w &= \mu \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} \\ r &= \mu \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{w}{r} = \frac{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x}}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x}} = RMST_{L,K}^x(K_x, L_x)$$

Por tanto, para minimizar el coste, la relación marginal de sustitución técnica entre dos factores se tiene que igualar al precio relativo de esos factores. Es fácil de comprobar que cuando se maximiza el beneficio se minimiza el coste:

$$\left. \begin{aligned} p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} &= w \\ p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} &= r \end{aligned} \right\} \Rightarrow RMST_{L,K}^x(K_x, L_x) = \frac{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x}}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x}} = \frac{w}{r}$$

La maximización de los beneficios implica la minimización del coste



Cuando se maximiza beneficios desde el punto de vista de la elección del nivel de producción, el precio se iguala al coste marginal:

$$\max_{q_x} p_x q_x - c_x(w, r, q_x)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$p_x = \frac{\partial c_x(w, r, q_x)}{\partial q_x} = CMg_x(w, r, q_x)$$

Las condiciones de primer orden del problema de minimización del coste también se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\underbrace{\frac{w}{\partial F_x(K_x, L_x)}}_{\text{Coste de la última unidad producida por el trabajo}} = \underbrace{\frac{r}{\partial F_x(K_x, L_x)}}_{\text{Coste de la última unidad producida por el capital}}$$

La parte de la izquierda de la ecuación anterior es lo que aumentarían los costes si se contratara una unidad adicional de trabajo partido por lo que aumentaría la producción si se aumentara una unidad adicional de trabajo. Por tanto, podemos interpretar esta parte de la expresión como lo que aumentan los costes con la última unidad de bien producida por el factor trabajo. La parte derecha de la ecuación la podemos interpretar como lo que aumentan los costes con la última unidad producida por el capital. Si el coste de la última unidad de bien producida por el factor trabajo fuera mayor que el coste de la última unidad de bien producida por el capital se podrían reducir los costes incrementando la cantidad de capital y reduciendo la de trabajo.

El coste marginal, lo que aumentan los costes debido al incremento de la producción, lo podemos descomponer en la parte correspondiente al trabajo y la parte correspondiente al capital:

$$\begin{aligned}
 dCT_x &= d[rK_x + wL_x] = r dK_x + w dL_x \\
 dq_x &= \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x + \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} dCT_x \\ dq_x \end{aligned}} \right\}$$

$$CMg_x(w, r, q_x) = \frac{dCT_x}{dq_x} = \frac{r dK_x + w dL_x}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x + \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x} =$$

$$\frac{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x + \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x} \frac{r}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x}} + \frac{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x + \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x} \frac{w}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x}}$$

$$\underbrace{\frac{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x + \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x}}_{\alpha = \text{Porcentaje del incremento de la producción debida al capital}} \underbrace{\frac{r}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x}}}_{\text{Coste de la última unidad producida por el capital}} + \underbrace{\frac{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x + \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x}}_{1-\alpha = \text{Porcentaje del incremento de la producción debida al trabajo}} \underbrace{\frac{w}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x}}}_{\text{Coste de la última unidad producida por el trabajo}}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Incremento del coste debido al incremento del capital}} \hspace{10em} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Incremento del coste debido al incremento del trabajo}}$$

$$CMg_x(w, r, q_x) = \underbrace{\alpha}_{\text{Porcentaje del incremento de la producción debida al capital}} \underbrace{\frac{r}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x}}}_{\text{Coste de la última unidad producida por el capital}} + \underbrace{(1-\alpha)}_{\text{Porcentaje del incremento de la producción debida al trabajo}} \underbrace{\frac{w}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x}}}_{\text{Coste de la última unidad producida por el trabajo}}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Incremento del coste debido al incremento del capital}} \hspace{10em} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Incremento del coste debido al incremento del trabajo}}$$

Para aumentar la producción del bien x es necesario incrementar las cantidades de capital y de trabajo utilizadas, lo que hace que los costes aumenten. El incremento de los costes se puede descomponer en el incremento del coste debido al incremento del trabajo y en la parte debida al incremento del capital. El incremento total de los costes resulta ser una media ponderada del coste de la última unidad producida por el trabajo y el coste de la última unidad producida del capital. Estos dos costes se igualan cuando se elige la combinación de factores que minimiza el coste, por lo que el coste marginal es igual al coste de la última unidad producida por el trabajo y por el capital³:

$$CMg_x(w, r, q_x) = \alpha \frac{r}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x}} + (1-\alpha) \frac{w}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x}} = \frac{w}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x}} = \frac{r}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x}}$$

Es fácil de comprobar, a través de las condiciones de primer orden, que la maximización del beneficio desde el punto de vista de la elección de factores también implica que el precio se iguala al coste marginal:

³ En el apéndice 1 aparece otra forma (mucho más general) de verlo a través del Teorema de la Envoltente.

$$\left. \begin{aligned} p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} &= w \\ p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} &= r \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_x = \frac{r}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x}} = \frac{w}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x}} = CMg_x(w, r, q_x)$$

Una vez que hemos visto el proceso de toma de decisiones de los agentes de la economía, podemos definir lo que se conoce como asignación.

Asignación: es un vector que especifica la cantidad de bien consumido por cada economía doméstica, la cantidad de bien producido por cada empresa y la cantidad de factor utilizado por cada empresa:

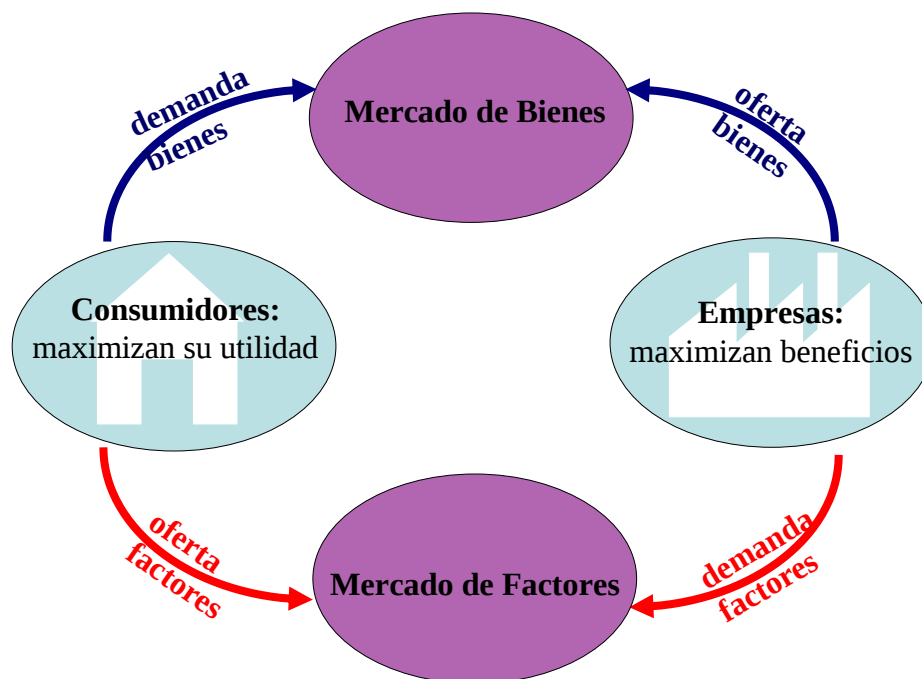
$$(\underbrace{c_x^1, c_y^1}_{\text{Cesta de consumo agente 1}}, \underbrace{c_x^2, c_y^2}_{\text{Cesta de consumo agente 2}}, \underbrace{q_x, K_x, L_x}_{\text{producción y factores de la empresa } x}, \underbrace{q_y, K_y, L_y}_{\text{producción y factores de la empresa } y})$$

Es decir, una asignación nos detalla todas las variables de decisión de los distintos agentes. Esto significa que nos especifica las cestas de consumo de las economías domésticas (que es la variable sobre la que deciden los consumidores) y la producción y la cantidad de factores que utilizan las empresas (que son las variables que eligen las empresas).

1.3.2. El concepto de equilibrio Walrasiano.

En la economía que hemos presentado, los consumidores compran bienes y, por tanto, representan la demanda en el mercado de bienes. Además, estas economías domésticas al ser las propietarias de los factores productivos, son los que ofertan factores en el mercado de factores. Mientras que las empresas juegan el papel opuesto en los mercados: venden bienes en el mercado de bienes, por tanto representan la oferta en dicho mercado; y contratan factores en el mercado de factores, por tanto representan la demanda en dicho mercado.

La siguiente figura recoge esta idea:



El concepto de equilibrio Walrasiano implica que todos los agentes eligen aquellas cantidades de bienes o factores que desean, es decir, que maximiza su función objetivo, y además el vector de precios es tal que las cantidades ofrecidas y demandas se igualan en cada uno de los mercados de la economía, tanto de bienes como de factores.

Definición 1: Un **equilibrio Walrasiano** es una asignación $(c_x^1, c_y^1, c_x^2, c_y^2, q_x, K_x, L_x, q_y, K_y, L_y)$, llamada **asignación de equilibrio**, y un vector de precios (p_x, p_y, w, r) , llamado **vector de precios de equilibrio**, tal que:

- Las economías domésticas eligen aquella cesta de consumo que maximizan su utilidad (demanda de bienes):

- Consumidor 1:

$$(c_x^1, c_y^1) \in \arg \max_{c_x^1, c_y^1} u^1(c_x^1, c_y^1)$$

$$s.a \quad p_x c_x^1 + p_y c_y^1 \leq wN^1 + rB^1 + \theta_x^1 \pi_x + \theta_y^1 \pi_y$$

- Consumidor 2:

$$(c_x^2, c_y^2) \in \arg \max_{c_x^2, c_y^2} u^2(c_x^2, c_y^2)$$

$$s.a \quad p_x c_x^2 + p_y c_y^2 \leq wN^2 + rB^2 + \theta_x^2 \pi_x + \theta_y^2 \pi_y$$

- Las empresas eligen el nivel de producción (oferta de bienes) y la combinación de factores (demanda de factores) que maximizan los beneficios:

- Empresa del bien x:

$$(q_x, K_x, L_x) \in \arg \max_{q_x, K_x, L_x} p_x q_x - wL_x - rK_x$$

$$s.a \quad F_x(K_x, L_x) \geq q_x$$

- Empresa del bien y:

$$(q_y, K_y, L_y) \in \arg \max_{q_y, K_y, L_y} p_y q_y - w L_y - r K_y$$

$$s.a. F_y(K_y, L_y) \geq q_y$$

- Los mercados de bienes están en equilibrio (demanda = oferta):

- Bien x :

$$\underbrace{c_x^1 + c_x^2}_{\text{demanda de bien x por todos los consumidores}} = \underbrace{q_x}_{\text{oferta del bien x por la empresa productora del bien x}}$$

- Bien y :

$$\underbrace{c_y^1 + c_y^2}_{\text{demanda de bien y por todos los consumidores}} = \underbrace{q_y}_{\text{oferta del bien y por la empresa productora del bien y}}$$

- Los mercados de factores están en equilibrio (demanda = oferta):

- Mercado de trabajo:

$$\underbrace{L_x + L_y}_{\text{demanda de trabajo por todas las empresas}} = \underbrace{N^1 + N^2}_{\text{oferta de trabajo por todos los consumidores}}$$

- Mercado de capital:

$$\underbrace{K_x + K_y}_{\text{demanda de capital por todas las empresas}} = \underbrace{B^1 + B^2}_{\text{oferta de capital por todos los consumidores}}$$

Es decir, en el equilibrio Walrasiano todos los agentes maximizan sus funciones objetivo (los consumidores su utilidad y las empresas sus beneficios) y los mercados (tanto de bienes como de factores) se vacían, es decir, la oferta se iguala a la demanda. Como todos los conceptos de equilibrio en Economía, una situación es de equilibrio cuando todos los agentes tienen incentivos a hacer lo que están haciendo. O lo que es lo mismo, todos los agentes están haciendo lo que quieren.

Ya hemos visto que cuando los consumidores maximizan su utilidad igualan la relación marginal de sustitución entre bienes a los precios relativos de esos bienes, y las empresas igualan el valor del producto marginal de cada uno de los factores a los precios de utilización de dichos factores. Por tanto, una definición alternativa de equilibrio Walrasiano se podría basar en esas condiciones de primer orden. Esta definición tiene la ventaja de que implica un sistema de ecuaciones con el que podríamos calcular el equilibrio Walrasiano.

Cuando todas las economías domésticas y todas las empresas tienen soluciones interiores, el equilibrio Walrasiano también se puede definir de la siguiente manera:

Definición 2: Un **equilibrio Walrasiano** es una asignación $(c_x^1, c_y^1, c_x^2, c_y^2, q_x, K_x, L_x, q_y, K_y, L_y)$, llamada **asignación de equilibrio**, y un vector de precios (p_x, p_y, w, r) , llamado **vector de precios de equilibrio**, tal que:

- Las economías domésticas eligen aquella cesta de consumo que maximizan su utilidad (demanda de bienes):

- Consumidor 1:

$$RMS_{x,y}^1(c_x^1, c_y^1) = \frac{p_x}{p_y}$$

$$p_x c_x^1 + p_y c_y^1 = wN^1 + rB^1 + \theta_x^1 \pi_x + \theta_y^1 \pi_y$$

- Consumidor 2:

$$RMS_{x,y}^2(c_x^2, c_y^2) = \frac{p_x}{p_y}$$

$$p_x c_x^2 + p_y c_y^2 = wN^2 + rB^2 + \theta_x^2 \pi_x + \theta_y^2 \pi_y$$

- Las empresas eligen el nivel de producción (oferta de bienes) y la combinación de factores (demanda de factores) que maximizan los beneficios:

- Empresa del bien x:

$$p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} = w$$

$$p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} = r$$

$$q_x = F_x(K_x, L_x)$$

- Empresa del bien y:

$$p_y \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y} = w$$

$$p_y \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y} = r$$

$$q_y = F_y(K_y, L_y)$$

- Los mercados de bienes están en equilibrio (demanda = oferta):

- Bien x:

$$c_x^1 + c_x^2 = q_x$$

- Bien y:

$$c_y^1 + c_y^2 = q_y$$

- Los mercados de factores están en equilibrio (demanda = oferta):

- Mercado de trabajo:

$$L_x + L_y = N^1 + N^2$$

- Mercado de capital:

$$K_x + K_y = B^1 + B^2$$

1.3.3. El cálculo del equilibrio Walrasiano.

De la definición 2 de equilibrio Walrasiano se obtiene el sistema de ecuaciones que nos permitiría calcularlo. Por tanto, calcular un equilibrio Walrasiano consiste en resolver el siguiente sistema de ecuaciones donde las incógnitas son la asignación $(c_x^1, c_y^1, c_x^2, c_y^2, q_x, K_x, L_x, q_y, K_y, L_y)$ y el vector de precios (p_x, p_y, w, r) ,

$$RMS_{x,y}^1(c_x^1, c_y^1) = \frac{p_x}{p_y} \quad (\text{EW.1})$$

$$p_x c_x^1 + p_y c_y^1 = wN^1 + rB^1 + \theta_x^1 \pi_x + \theta_y^1 \pi_y \quad (\text{EW.2})$$

$$RMS_{x,y}^2(c_x^2, c_y^2) = \frac{p_x}{p_y} \quad (\text{EW.3})$$

$$p_x c_x^2 + p_y c_y^2 = wN^2 + rB^2 + \theta_x^2 \pi_x + \theta_y^2 \pi_y \quad (\text{EW.4})$$

$$p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} = w \quad (\text{EW.5})$$

$$p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} = r \quad (\text{EW.6})$$

$$q_x = F_x(K_x, L_x) \quad (\text{EW.7})$$

$$p_y \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y} = w \quad (\text{EW.8})$$

$$p_y \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y} = r \quad (\text{EW.9})$$

$$q_y = F_y(K_y, L_y) \quad (\text{EW.10})$$

$$c_x^1 + c_x^2 = q_x \quad (\text{EW.11})$$

$$c_y^1 + c_y^2 = q_y \quad (\text{EW.12})$$

$$L_x + L_y = N^1 + N^2 \quad (\text{EW.13})$$

$$K_x + K_y = B^1 + B^2 \quad (\text{EW.14})$$

Por tanto, tenemos un sistema de 14 ecuaciones con 14 incógnitas, que son:

- Las cestas de consumo de las economías domésticas $(c_x^1, c_y^1, c_x^2, c_y^2)$ (4 incógnitas = 2 consumidores $\times$ 2 bienes).
- La asignación de factores a las empresas y las producciones de las empresas $(q_x, K_x, L_x, q_y, K_y, L_y)$ (6 incógnitas = 2 empresas $\times$ (1 producción + 2 factores)).
- El vector de precios de los bienes (p_x, p_y) (2 incógnitas = 2 bienes).
- El vector de precios de los factores (w, r) (2 incógnitas = 2 factores).

Además, para resolver este sistema de ecuaciones tenemos que tener en cuenta algunas propiedades importantes del equilibrio Walrasiano.

La normalización de precios:

Hay que tener en cuenta que si (p_x, p_y, w, r) es un vector de precios de equilibrio, entonces, para cualquier constante positiva λ , el vector de precios $(\lambda p_x, \lambda p_y, \lambda w, \lambda r)$ es también un vector de precios de equilibrio:

$$\begin{aligned}
 RMS_{x,y}^1(c_x^1, c_y^1) &= \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow RMS_{x,y}^1(c_x^1, c_y^1) = \frac{\lambda p_x}{\lambda p_y} \\
 p_x c_x^1 + p_y c_y^1 &= wN^1 + rB^1 + \theta_x^1 [p_x q_x - wL_x - rK_x] + \theta_y^1 [p_y q_y - wL_y - rK_y] \Leftrightarrow \\
 \lambda p_x c_x^1 + \lambda p_y c_y^1 &= \lambda wN^1 + \lambda rB^1 + \theta_x^1 [\lambda p_x q_x - \lambda wL_x - \lambda rK_x] + \theta_y^1 [\lambda p_y q_y - \lambda wL_y - \lambda rK_y] \\
 RMS_{x,y}^2(c_x^2, c_y^2) &= \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow RMS_{x,y}^2(c_x^2, c_y^2) = \frac{\lambda p_x}{\lambda p_y} \\
 p_x c_x^2 + p_y c_y^2 &= wN^2 + rB^2 + \theta_x^2 [p_x q_x - wL_x - rK_x] + \theta_y^2 [p_y q_y - wL_y - rK_y] \Leftrightarrow \\
 \lambda p_x c_x^2 + \lambda p_y c_y^2 &= \lambda wN^2 + \lambda rB^2 + \theta_x^2 [\lambda p_x q_x - \lambda wL_x - \lambda rK_x] + \theta_y^2 [\lambda p_y q_y - \lambda wL_y - \lambda rK_y] \\
 p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} &= w \Leftrightarrow \lambda p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} = \lambda w \\
 p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} &= r \Leftrightarrow \lambda p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} = \lambda r \\
 q_x &= F_x(K_x, L_x) \\
 p_y \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y} &= w \Leftrightarrow \lambda p_y \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y} = \lambda w \\
 p_y \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y} &= r \Leftrightarrow \lambda p_y \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y} = \lambda r \\
 q_y &= F_y(K_y, L_y) \\
 c_x^1 + c_x^2 &= q_x \\
 c_y^1 + c_y^2 &= q_y \\
 L_x + L_y &= N^1 + N^2 \\
 K_x + K_y &= B^1 + B^2
 \end{aligned}$$

La razón de esta propiedad de los precios de equilibrio descansa en que lo único que es relevante para la toma de decisiones de los agentes son los precios relativos. Así, tenemos:

$$\begin{aligned}
 RMS_{x,y}^1(c_x^1, c_y^1) &= \frac{\lambda p_x}{\lambda p_y} = \frac{p_x}{p_y} \\
 \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y} &= \frac{\lambda w}{\lambda p_y} = \frac{w}{p_y}
 \end{aligned}$$

Si los precios de los bienes y de los factores se duplican, los consumidores van a poder comprar exactamente las mismas cestas de consumo que antes que se duplicaran los precios, ya que cualquier cesta de consumo cuesta el doble, pero las rentas de los consumidores también van a ser el doble. Como el hecho de que se dupliquen los

precios no afecta el conjunto presupuestario del consumidor (el conjunto de cestas de consumo que cumple la restricción presupuestaria), tampoco afecta a las decisiones del consumidor. En cuanto a las empresas, si se duplican los precios, se duplican tanto los ingresos como los costes, pero esto no afecta a la oferta de producto o a la demanda de factores, porque los precios relativos no han cambiado. De hecho, podemos escribir el sistema de ecuaciones del equilibrio Walrasiano en función de precios relativos, por ejemplo con respecto al precio del bien x $\left(1, \frac{p_y}{p_x}, \frac{w}{p_x}, \frac{r}{p_x}\right)$:

$$\begin{aligned}
 RMS_{x,y}^1(c_x^1, c_y^1) &= \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow RMS_{x,y}^1(c_x^1, c_y^1) = \frac{1}{p_y / p_x} \\
 p_x c_x^1 + p_y c_y^1 &= wN^1 + rB^1 + \theta_x^1 [p_x q_x - wL_x - rK_x] + \theta_y^1 [p_y q_y - wL_y - rK_y] \Leftrightarrow \\
 c_x^1 + \frac{p_y}{p_x} c_y^1 &= \frac{w}{p_x} N^1 + \frac{r}{p_x} B^1 + \theta_x^1 \left[q_x - \frac{w}{p_x} L_x - \frac{r}{p_x} K_x \right] + \theta_y^1 \left[\frac{p_y}{p_x} q_y - \frac{w}{p_x} L_y - \frac{r}{p_x} K_y \right] \\
 RMS_{x,y}^2(c_x^2, c_y^2) &= \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow RMS_{x,y}^2(c_x^2, c_y^2) = \frac{1}{p_y / p_x} \\
 p_x c_x^2 + p_y c_y^2 &= wN^2 + rB^2 + \theta_x^2 [p_x q_x - wL_x - rK_x] + \theta_y^2 [p_y q_y - wL_y - rK_y] \Leftrightarrow \\
 c_x^2 + \frac{p_y}{p_x} c_y^2 &= \frac{w}{p_x} N^2 + \frac{r}{p_x} B^2 + \theta_x^2 \left[q_x - \frac{w}{p_x} L_x - \frac{r}{p_x} K_x \right] + \theta_y^2 \left[\frac{p_y}{p_x} q_y - \frac{w}{p_x} L_y - \frac{r}{p_x} K_y \right] \\
 p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} &= w \Leftrightarrow \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} = \frac{w}{p_x} \\
 p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} &= r \Leftrightarrow \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} = \frac{r}{p_x} \\
 q_x &= F_x(K_x, L_x) \\
 p_y \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y} &= w \Leftrightarrow \frac{p_y}{p_x} \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y} = \frac{w}{p_x} \\
 p_y \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y} &= r \Leftrightarrow \frac{p_y}{p_x} \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y} = \frac{r}{p_x} \\
 q_y &= F_y(K_y, L_y) \\
 c_x^1 + c_x^2 &= q_x \\
 c_y^1 + c_y^2 &= q_y \\
 L_x + L_y &= N^1 + N^2 \\
 K_x + K_y &= B^1 + B^2
 \end{aligned}$$

Dado que lo único que importan son los precios relativos, lo que se suele hacer para que el vector de precios de equilibrio sea único es normalizar el vector de precios, que significa que se pone una restricción adicional a los precios que hace que esos precios sean únicos. Por ejemplo, se iguala el precio del bien x a la unidad: $p_x = 1$, lo que significa que todos los demás precios están medidos en unidades del bien x , es decir, el

vector de precios resultante de esta normalización será el vector de precios relativos de los distintos bienes y factores con respecto al bien x .

El hecho de que lo único relevante sean los precios relativos y que se normalice el vector de precios implica que hay una incógnita menos. Si, por ejemplo, normalizamos el precio del bien x a la unidad, las incógnitas del sistema del equilibrio Walrasiano serían el precio relativo del bien y con respecto al bien x , el precio relativo del factor trabajo con respecto al bien x y el precio relativo del capital con respecto al bien x , pero evidentemente el precio relativo del bien x con respecto a sí mismo es uno, por lo que desaparecería una incógnita:

$$(p_x, p_y, w, r) = \left(1, \frac{p_y}{p_x}, \frac{w}{p_x}, \frac{r}{p_x}\right)$$

Por tanto, el sistema de 14 ecuaciones que define el equilibrio Walrasiano en este modelos tendría 10 incógnitas de la asignación $(c_x^1, c_y^1, c_x^2, c_y^2, q_x, K_x, L_x, q_y, K_y, L_y)$ y

3 incógnitas correspondientes a los precios relativos $\left(\frac{p_y}{p_x}, \frac{w}{p_x}, \frac{r}{p_x}\right)$, es decir tendríamos un sistema de 14 ecuaciones y 13 incógnitas.

Ley de Walras: Si sumamos las restricciones presupuestarias de los consumidores obtenemos lo que se denomina la Ley de Walras, que nos dice que el valor de los excesos de demanda suman siempre cero:

$$\begin{aligned} p_x c_x^1 + p_y c_y^1 &= wN^1 + rB^1 + \theta_x^1 \pi_x + \theta_y^1 \pi_y \\ + p_x c_x^2 + p_y c_y^2 &= wN^2 + rB^2 + \theta_x^2 \pi_x + \theta_y^2 \pi_y \\ \hline p_x (c_x^1 + c_x^2) + p_y (c_y^1 + c_y^2) &= w(N^1 + N^2) + r(B^1 + B^2) + \underbrace{(\theta_x^1 + \theta_x^2)}_1 \pi_x + \underbrace{(\theta_y^1 + \theta_y^2)}_1 \pi_y \Leftrightarrow \\ p_x (c_x^1 + c_x^2) + p_y (c_y^1 + c_y^2) &= w(N^1 + N^2) + r(B^1 + B^2) + [p_x q_x - wL_x - rK_x] + [p_y q_y - wL_y - rK_y] \\ \Leftrightarrow \\ p_x (c_x^1 + c_x^2 - q_x) + p_y (c_y^1 + c_y^2 - q_y) &+ w(L_x + L_y - N^1 - N^2) + r(K_x + K_y - B^1 - B^2) = 0 \end{aligned}$$

ED mercado bien x ED mercado bien y ED mercado de trabajo ED mercado de capital

Un importante corolario de la Ley de Walras es que si todos los mercados menos uno están en equilibrio, entonces ese último mercado está también en equilibrio. Esto implica que nos “sobra” una de las ecuaciones del sistema de ecuaciones que define el equilibrio Walrasiano. Por tanto, a la hora de resolver el sistema de ecuaciones del equilibrio Walrasiano podemos prescindir de una ecuación de equilibrio de los 4 mercados que existen en la economía (bien x , bien y , capital y trabajo).

Resumiendo, el sistema de ecuaciones del equilibrio Walrasiano en nuestra economía tiene 13 incógnitas, 10 correspondientes a la asignación $(c_x^1, c_y^1, c_x^2, c_y^2, q_x, K_x, L_x, q_y, K_y, L_y)$ y 3 incógnitas correspondientes a los precios relativos $\left(\frac{p_y}{p_x}, \frac{w}{p_x}, \frac{r}{p_x}\right)$, y un sistema de 13 ecuaciones, ya que eliminando la ecuación

de equilibrio de uno de los cuatro mercados, sabemos que si hay tres mercados en equilibrio también lo está el cuarto.

Otra propiedad que siempre se cumple en el equilibrio Walrasiano es que el gasto de los consumidores en los distintos bienes es igual a la renta y es igual al valor de la producción (el PIB):

$$\begin{aligned}
 & p_x c_x^1 + p_y c_y^1 = wN^1 + rB^1 + \theta_x^1 \pi_x + \theta_y^1 \pi_y \\
 & + p_x c_x^2 + p_y c_y^2 = wN^2 + rB^2 + \theta_x^2 \pi_x + \theta_y^2 \pi_y \\
 \hline
 & p_x (c_x^1 + c_x^2) + p_y (c_y^1 + c_y^2) = w(N^1 + N^2) + r(B^1 + B^2) + \underbrace{(\theta_x^1 + \theta_x^2)}_1 \pi_x + \underbrace{(\theta_y^1 + \theta_y^2)}_1 \pi_y \Leftrightarrow \\
 & \underbrace{p_x (c_x^1 + c_x^2) + p_y (c_y^1 + c_y^2)}_{\text{Gasto}} = \underbrace{w(N^1 + N^2) + r(B^1 + B^2) + \pi_x + \pi_y}_{\text{Renta}} \\
 & \underbrace{w(N^1 + N^2) + r(B^1 + B^2) + \pi_x + \pi_y}_{\text{Renta}} = \\
 & w(N^1 + N^2) + r(B^1 + B^2) + [p_x q_x - wL_x - rK_x] + [p_y q_y - wL_y - rK_y] = \\
 & \underbrace{w(N^1 + N^2 - L_x - L_y)}_0 + \underbrace{r(B^1 + B^2 - K_x - K_y)}_0 + \underbrace{p_x q_x + p_y q_y}_{\text{Valor de la producción (PIB)}}
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\underbrace{p_x (c_x^1 + c_x^2) + p_y (c_y^1 + c_y^2)}_{\text{Gasto}} = \underbrace{w(N^1 + N^2) + r(B^1 + B^2) + \pi_x + \pi_y}_{\text{Renta}} = \underbrace{p_x q_x + p_y q_y}_{\text{Valor producción (PIB)}}$$

1.4. Eficiencia productiva y frontera de posibilidades de producción.

1.4.1. Conjunto de posibilidades de producción, eficiencia productiva y frontera de posibilidades de producción.

Asignación factible: es una asignación donde la cantidad que se consume de cada bien es menor o igual que lo que produce la empresa que elabora ese bien, donde la cantidad producida por cada empresa es la que le permite su tecnología (es menor o igual de lo que determina su función de producción), y donde la cantidad de cada factor utilizada por las empresas es menor o igual que la dotación de ese factor en la economía. Es decir, $(c_x^1, c_x^2, c_y^1, c_y^2, q_x, K_x, L_x, q_y, K_y, L_y)$ es factible si y solo si se cumplen las siguientes restricciones (denominadas restricciones de factibilidad):

- Se consume menos o igual que lo que se produce: $c_x^1 + c_x^2 \leq q_x$; $c_y^1 + c_y^2 \leq q_y$.

- Cada empresa produce de acuerdo con su tecnología: $q_x \leq F_x(K_x, L_x)$; $q_y \leq F_y(K_y, L_y)$.
- No se usan más factores que los existentes en la economía: $L_x + L_y \leq N^1 + N^2 \equiv \bar{L}$; $K_x + K_y \leq B^1 + B^2 \equiv \bar{K}$, donde $\bar{L}$ y $\bar{K}$ representan, respectivamente, la cantidad total de trabajo y de capital que existen en la economía.

En definitiva, una asignación factible es una asignación que sea posible dadas las dotaciones de factores de la economía y la tecnología existente (las funciones de producción).

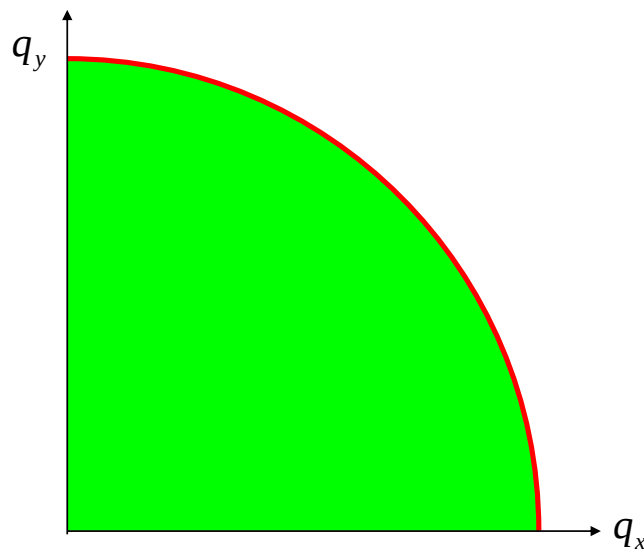
Conjunto de posibilidades de producción (CPP): conjunto de todas las posibles combinaciones de bienes que se pueden producir en una economía dada su tecnología y sus recursos:

$$CPP = \{(q_x, q_y) \in \mathbb{R}_+^2 / q_x \leq F_x(K_x, L_x), q_y \leq F_y(K_y, L_y), L_x + L_y \leq \bar{L}, K_x + K_y \leq \bar{K}\}$$

Eficiencia productiva: se dice que una combinación productiva factible $(q_x, q_y) \in CPP$, es eficiente desde el punto de vista productivo si no existe otra combinación productiva factible que tenga una cantidad igual o mayor de todos los bienes, y una cantidad estrictamente mayor de alguno de ellos. Es decir, una combinación de producción de bienes factible es eficiente desde el punto de vista productivo, si no podemos aumentar la producción de un bien sin reducir la producción de otro.

Si una combinación de bienes perteneciente al *CPP* no es eficiente desde el punto de vista productivo, se dice que es **ineficiente desde el punto de vista productivo**. Es decir, una combinación de producción de bienes factible es ineficiente desde el punto de vista productivo si podemos aumentar la producción de un bien sin reducir la producción de ningún otro.

Frontera de posibilidades de producción (FPP): conjunto de combinaciones de bienes pertenecientes al conjunto de posibilidades de producción que son eficientes desde el punto de vista productivo.



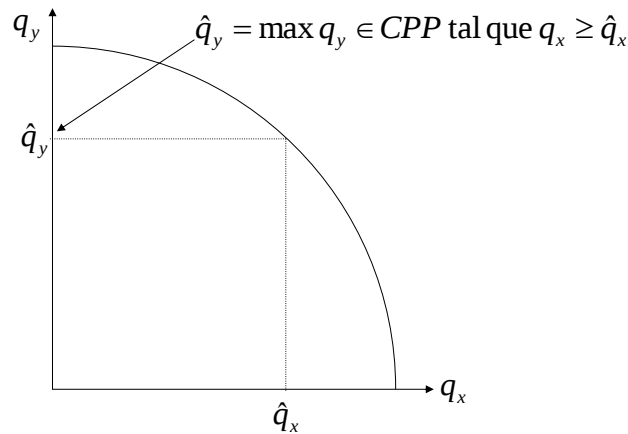
 +  **Conjunto de posibilidades de producción**

 **Combinaciones ineficientes desde el punto de vista productivo:** para aumentar la producción de un bien no es necesario reducir la del otro.

 **Frontera de posibilidades de producción:**
Combinaciones con eficiencia productiva: para aumentar la producción de un bien es necesario reducir la del otro.

1.4.2. La caja de Edgeworth de factores y la curva de asignaciones de factores con eficiencia productiva.

Dada una cantidad de producción de bien x , $\hat{q}_x$, si quisiéramos obtener la combinación productiva eficiente desde un punto de vista productivo en que se obtuviera esa cantidad de bien x , tendríamos que escoger la cantidad de bien y máxima posible dada la cantidad de bien x . Es decir, tendríamos que maximizar la cantidad de bien y dentro del conjunto de posibilidades de producción compatible con el nivel de producción del bien x , $\hat{q}_x$. Esto es lo mismo que decir que tendríamos que maximizar la cantidad producida de bien y , bajo la restricción de que la producción de bien x fuese $\hat{q}_x$ y bajo las restricciones de factibilidad (si no se cumplieran estas restricciones, estaríamos fuera del conjunto de posibilidades de producción).



Por tanto, cualquier punto de la frontera de posibilidades de producción tendría que ser una solución del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \max_{q_x, K_x, L_x, q_y, K_y, L_y} \quad & q_y \\ \text{s.a:} \quad & q_x \geq \hat{q}_x \\ & q_x \leq F_x(K_x, L_x) \\ & q_y \leq F_y(K_y, L_y) \\ & L_x + L_y \leq \bar{L} \\ & K_x + K_y \leq \bar{K} \end{aligned}$$

Este problema de maximización se puede resumir de la siguiente forma (eliminando las producciones):

$$\begin{aligned} \max_{K_x, L_x, K_y, L_y} \quad & F_y(K_y, L_y) \\ \text{s.a:} \quad & F_x(K_x, L_x) \geq \hat{q}_x \\ & L_x + L_y \leq \bar{L} \\ & K_x + K_y \leq \bar{K} \end{aligned}$$

El Lagrangiano asociado a este problema de maximización sería:

$$\ell = F_y(K_y, L_y) + \wp_x (F_x(K_x, L_x) - \hat{q}_x) + \omega (\bar{L} - L_x - L_y) + \rho (\bar{K} - K_x - K_y)$$

donde $\wp_x$, ω y ρ son los multiplicadores de Lagrange de las distintas restricciones. ω y ρ se pueden interpretar como los precios sombra del trabajo y del capital, respectivamente. Suponiendo que la solución de este problema sea interior, las condiciones de primer orden serían:

$$\begin{aligned} \wp_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} &= \omega \\ \wp_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} &= \rho \\ \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y} &= \omega \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y} = \rho$$

Estas condiciones de primer orden implican:

$$\left. \begin{aligned} \rho_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} = \omega \\ \rho_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} = \rho \end{aligned} \right\} \Rightarrow RMST_{L,K}^x(K_x, L_x) = \frac{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x}}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x}} = \frac{\omega}{\rho}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y} = \omega \\ \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y} = \rho \end{aligned} \right\} \Rightarrow RMST_{L,K}^y(K_y, L_y) = \frac{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y}}{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y}} = \frac{\omega}{\rho}$$

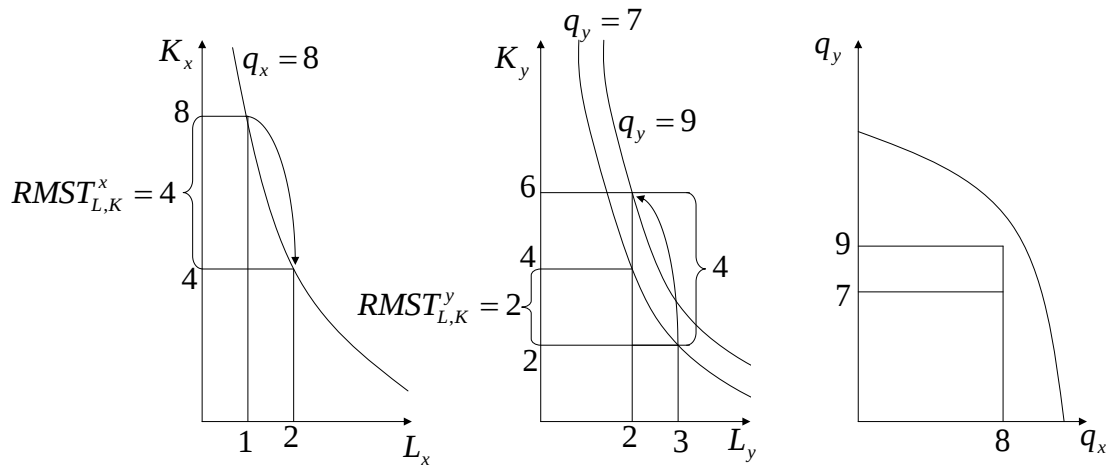
$$RMST_{L,K}^x(K_x, L_x) = RMST_{L,K}^y(K_y, L_y)$$

Es decir, la relación marginal de sustitución técnica entre dos factores se iguala a su precio sombra relativo. Además, la relación marginal de sustitución técnica entre dos factores se iguala entre todas las empresas. Esta condición de igualación de las relaciones marginales de sustitución técnica de todas las empresas de la economía la denominaremos **condición de eficiencia de la combinación factorial entre empresas**.

En el ejemplo del gráfico siguiente tenemos que la $RMST$ entre trabajo y capital de la empresa que produce el bien x es 4 mientras que la $RMST$ entre trabajo y capital de la empresa que produce el bien y es 2 (por tanto, esta última es menor). Esto ofrece la posibilidad de reasignar los recursos, de tal manera que se pueda aumentar la producción de una empresa sin reducir la de la otra. Por ejemplo, si a la empresa que produce el bien x le quitamos 4 unidades de capital y le damos una unidad de trabajo, por definición de $RMST$, la producción del bien x no cambia, sigue siendo 8. Si le quitamos una unidad de trabajo a la empresa que produce el bien y y le damos 4 unidades de capital, dado que la $RMST$ del bien y es 2, la producción del bien 2 aumentará (en este ejemplo pasa de 7 a 9), sin que haya disminuido la producción del bien x . Por tanto, la asignación original de factores (donde $RMST_{L,K}^x(K_x, L_x) > RMST_{L,K}^y(K_y, L_y)$) no era eficiente desde un punto de vista productivo; es decir, no estábamos en la FPP , sino en el interior del conjunto de posibilidades de producción.

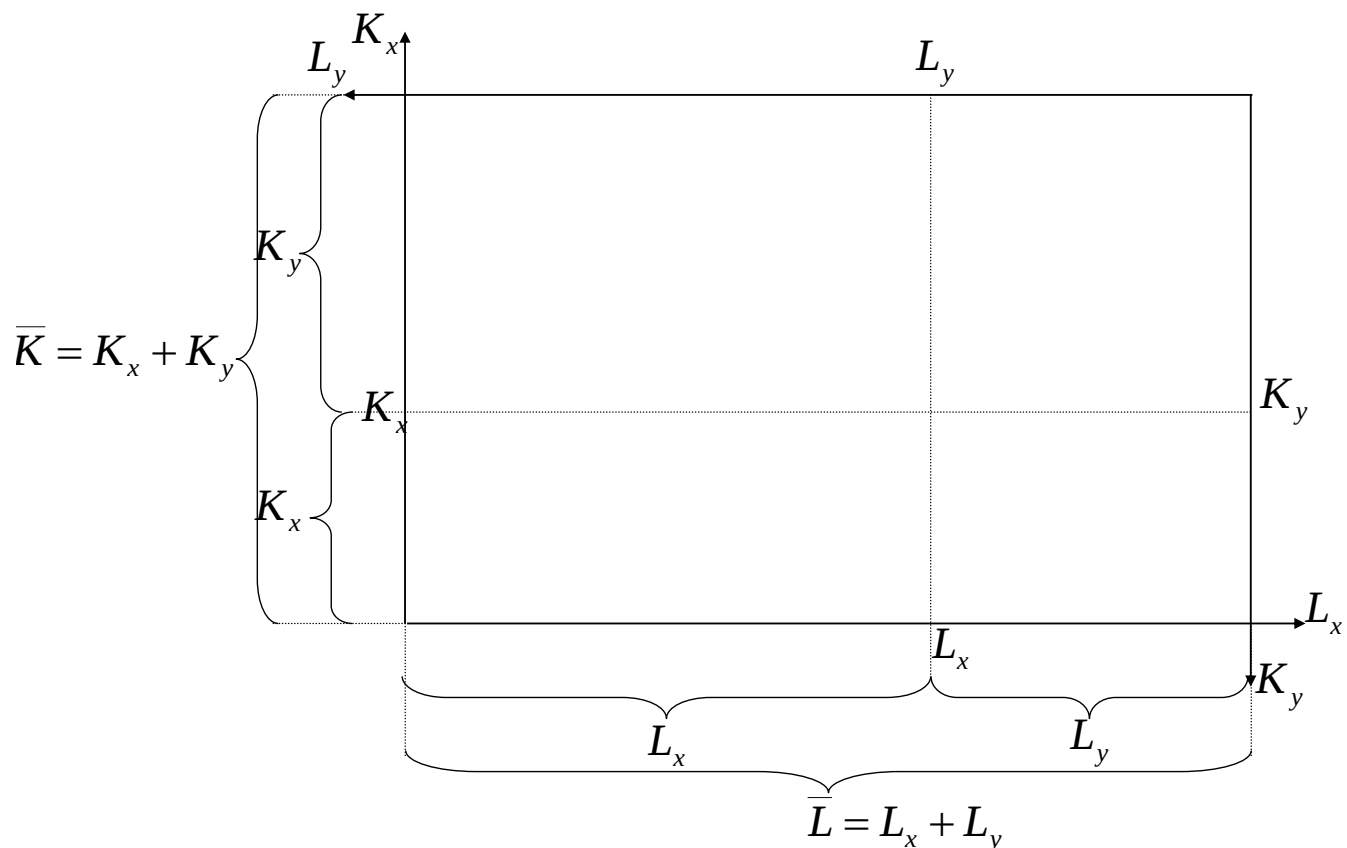
Reasignación de factores para el caso en que

$$RMST_{L,K}^x(K_x, L_x) > RMST_{L,K}^y(K_y, L_y)$$



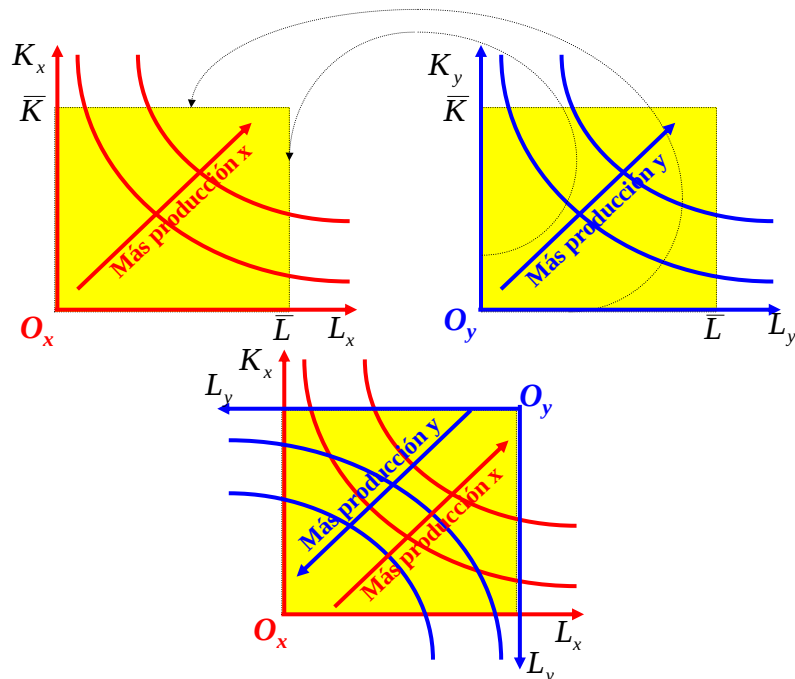
Cuando tenemos dos factores, dos bienes y una empresa por cada bien, la asignación entre factores se puede representar en la **caja de Edgeworth de factores productivos**.

Caja de Edgeworth de factores productivos



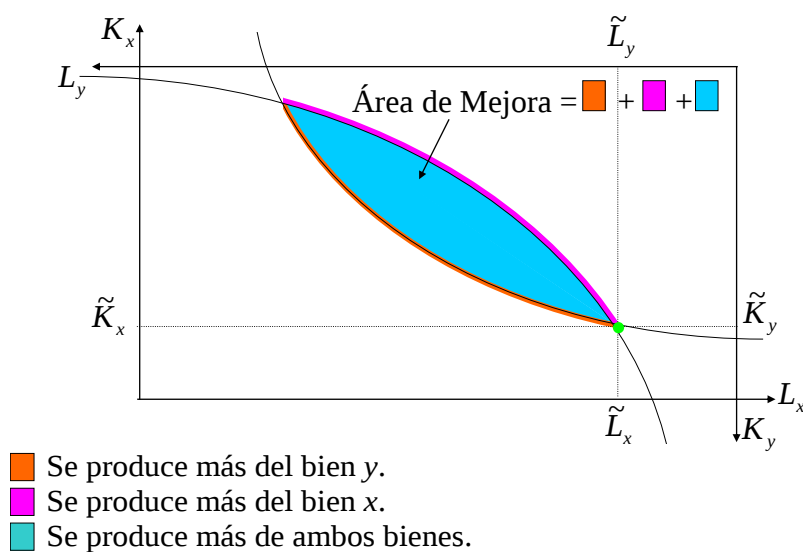
La caja de Edgeworth de factores es un rectángulo cuyo ancho es igual a la cantidad total de trabajo, $\bar{L}$, y cuyo alto es la cantidad total de capital, $\bar{K}$. Cualquier punto de la caja de Edgeworth representa una asignación de factores a las empresas de la economía (K_x, L_x, K_y, L_y) donde se utilizan todos los factores existentes. Si cogemos un punto de la caja de Edgeworth, la distancia horizontal entre el lado vertical de la izquierda y el punto representa la cantidad de trabajo asignada a la empresa x , L_x . Como el ancho de la caja es igual a la cantidad total de trabajo, $\bar{L}$, la distancia horizontal entre el lado vertical de la derecha del rectángulo y el punto es igual a $\bar{L} - L_x$. Suponiendo que todo el trabajo de la economía se reparte entre las dos empresas, $L_x + L_y = \bar{L}$, entonces la distancia horizontal entre el lado vertical de la derecha y el punto es igual a la cantidad de trabajo asignado a la producción del bien y , $L_y = \bar{L} - L_x$. Lo mismo ocurre con el capital, la distancia vertical entre el lado horizontal de la base del rectángulo y el punto representa la cantidad de capital asignado a la empresa del bien x , mientras que la distancia vertical entre el punto y el lado superior del rectángulo representa la cantidad de capital asignada a la empresa del bien y . La manera más natural de interpretar la caja de Edgeworth es que la esquina inferior izquierda es el origen del espacio de factores utilizado en la empresa x (el mapa de isocuantas del bien x), mientras que la esquina superior derecha es el origen del espacio de factores utilizado en la empresa y (el mapa de isocuantas de la empresa y). Es como si cogiéramos el mapa de isocuantas de la

empresa y y lo hiciéramos girar 180 grados en dirección contraria a las agujas del reloj, superponiéndolo al mapa de curvas isocuantas de la empresa x.



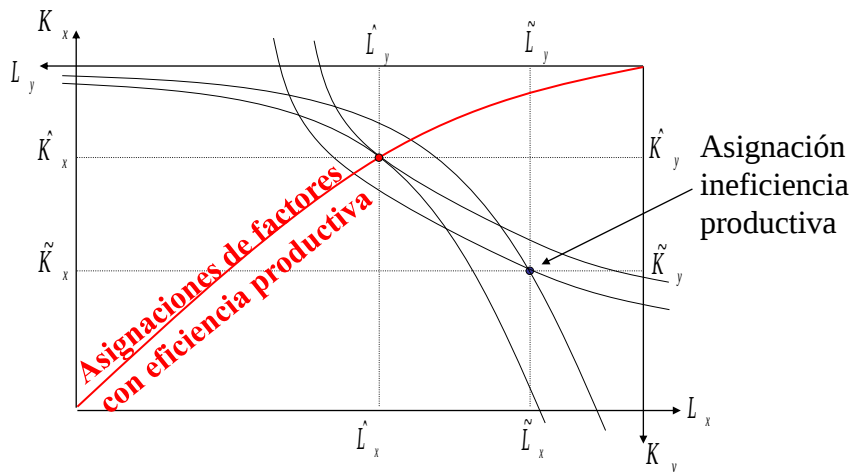
En el siguiente gráfico se representa una asignación ineficiente donde la *RMST* entre trabajo y capital de la empresa x es menor que la de la empresa y. Esto implica que hay intercepción entre los conjuntos superiores formados por las isocuantas del punto inicial, lo que significa que se puede producir más del bien x o del bien y o de ambos bienes. Dado que la *RMST* entre trabajo y capital de la empresa x es menor que la de la empresa y, si quitamos trabajo de la producción del bien x y lo dedicamos a la producción del bien y, y dedicamos más capital a la producción del bien x y menos capital a la producción del bien y, se puede producir más de ambos bienes.

Asignaciones de factores con ineficiencia productiva



En el siguiente gráfico se representan asignaciones de recursos eficientes donde las RMSTs de ambas empresas se igualan.

Asignaciones de factores con eficiencia productiva



1.4.3. La relación marginal de transformación o coste de oportunidad entre dos bienes.

La **relación marginal de transformación del bien x por el bien y** , o **coste de oportunidad del bien x en términos del bien y** , en un punto de la frontera de posibilidades de producción ($RMT_{x,y}(q_x, q_y)$): es la cantidad que tiene que reducirse de bien y para aumentar en una unidad la producción del bien x a lo largo de la *FPP*, manteniendo la producción de todos los demás bienes (sin ser x e y) constante.

En términos diferenciales, la relación marginal de transformación del bien x por bien y es simplemente igual a menos la derivada de la producción del bien y con respecto al bien x a lo largo de la *FPP*. Es decir, lo que disminuye el bien y a medida que aumenta la producción del bien x ⁴:

$$RMT_{x,y}(q_x, q_y) = - \left. \frac{\partial q_y}{\partial q_x} \right|_{FPP}$$

Para calcular esta diferencial, hagamos lo siguiente:

Una manera de escribir la condición de eficiencia de la combinación factorial es:

⁴ En el apéndice 2 se calcula esta diferencial utilizando el método más general del Teorema de la Envoltente.

$$RMST_{L,K}^x(K_x, L_x) = \frac{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x}}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x}} = \frac{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y}}{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y}} = RMST_{L,K}^y(K_y, L_y) \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y}}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x}}}_{\text{Coste de oportunidad del capital en el bien x en términos del bien y}} = \underbrace{\frac{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y}}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x}}}_{\text{Coste de oportunidad del trabajo en el bien x en términos del bien y}}$$

La parte izquierda de la expresión anterior sería la cantidad de bien y que se produciría si se utilizara una unidad más de capital, partido por la cantidad de bien x que se produce con la última unidad de capital utilizada en el bien x. A esta expresión la denominaremos coste de oportunidad del capital en el bien x en términos del bien y. Análogamente, denominamos coste de oportunidad del trabajo en el bien x en términos del bien y a la cantidad de bien y que se produciría si se utilizara una unidad más de trabajo, partido por la cantidad de bien x que se produce con la última unidad de trabajo utilizada en el bien x. La ecuación anterior nos dice que el coste de oportunidad de utilizar capital y trabajo en el bien x en términos de bien y se tienen que igualar en una asignación eficiente desde el punto de vista productivo. Si, por ejemplo, el coste de oportunidad del capital en el bien x en términos del bien y fuera mayor que el del trabajo, entonces reduciendo la cantidad de capital y aumentando la cantidad de trabajo utilizada en el bien x, se podría aumentar la producción del bien y sin reducir la del bien x.

La *RMT* del bien x por el bien y o el coste de oportunidad del bien x en términos del bien y, nos indica la cantidad de bien y que se ha dejado de producir para elaborar la última unidad del bien x. Para producir la última unidad de bien x se ha tenido que utilizar capital y trabajo que se ha dejado de utilizar en la producción del bien y, de ahí el coste de oportunidad. Por tanto, para obtener la *RMT* diferenciamos las restricciones de factibilidad con respecto a la cantidad de factores utilizados en cada bien y con respecto a las producciones de ambos bienes:

$$\begin{aligned}
 q_x &= F_x(K_x, L_x) \Rightarrow dq_x = \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x + \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x \\
 q_y &= F_y(K_y, L_y) \Rightarrow dq_y = \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y} dK_y + \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y} dL_y \\
 L_x + L_y &= \bar{L} \Rightarrow dL_x + dL_y = 0 \Leftrightarrow dL_y = -dL_x \\
 K_x + K_y &= \bar{K} \Rightarrow dK_x + dK_y = 0 \Leftrightarrow dK_y = -dK_x
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} q_x &= F_x(K_x, L_x) \\ q_y &= F_y(K_y, L_y) \\ L_x + L_y &= \bar{L} \\ K_x + K_y &= \bar{K} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow$$

$$RMT_{x,y}(q_x, q_y) = -\frac{dq_y}{dq_x} = -\frac{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y}(-dK_x) + \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y}(-dL_x)}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x + \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x} =$$

$$\frac{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x + \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x} + \frac{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y} dK_y}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x + \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x} + \frac{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x + \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x} + \frac{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y} dL_y}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x + \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x}$$

$$\underbrace{\frac{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x + \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x}}_{\alpha =} + \underbrace{\frac{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y} dK_y}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x + \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x}}_{\text{Coste de oportunidad del capital en el bien x en términos del bien y}} + \underbrace{\frac{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x + \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x}}_{1 - \alpha =} + \underbrace{\frac{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y} dL_y}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x + \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x}}_{\text{Coste de oportunidad del trabajo en el bien x en términos del bien y}}$$

Porcentaje del incremento de la producción del bien x debida al incremento del capital

Coste de oportunidad del capital en el bien x en términos del bien y

Porcentaje del incremento de la producción del bien x debida al incremento del trabajo

Coste de oportunidad del trabajo en el bien x en términos del bien y

La expresión anterior nos dice que el coste de oportunidad del bien x en términos del bien y (RMT) es igual a una media ponderada del coste de oportunidad del capital y el trabajo en el bien x en términos del bien y, lo cual es lógico, dado que el bien x tiene un coste de oportunidad de bien y porque se utilizan recursos en la producción del bien x (trabajo y capital) que se podrían utilizar para producir bien y. Dado que a lo largo de la FPP (combinaciones eficientes desde el punto de vista productivo) el coste de oportunidad de utilizar capital y trabajo en el bien x en términos de bien y se tienen que igualar, llegamos a la conclusión de que el coste de oportunidad del bien x en términos del bien y (RMT) es igual al coste de oportunidad de utilizar capital y trabajo en el bien x en términos de bien y:

$$RMT_{x,y}(q_x, q_y) = \alpha \frac{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y} dK_y}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x} + (1 - \alpha) \frac{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y} dL_y}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x} = \frac{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y} dK_y}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} dK_x} = \frac{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y} dL_y}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} dL_x}$$

1.4.4. La convexidad del conjunto de posibilidades de producción.

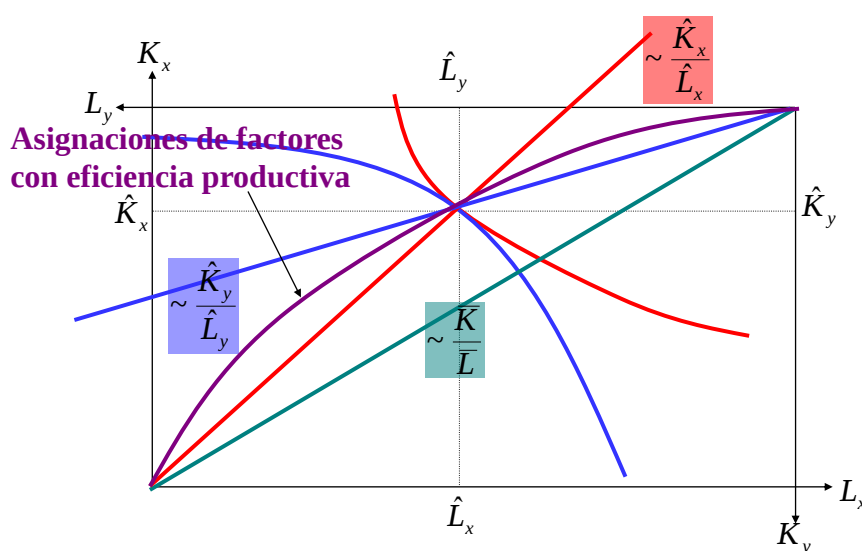
Hay dos situaciones en las que el conjunto de posibilidades de producción es estrictamente convexo, es decir, en las que el coste de oportunidad de un bien es creciente en la cantidad producida por ese bien:

- Cuando hay rendimientos decrecientes a escala: si hay rendimientos decrecientes a escala, cuanto más se produce de un bien más recursos se necesitan para producir una unidad adicional de ese bien. Esto significa que si el bien x presenta rendimientos

decrecientes a escala, a medida que aumenta la producción del bien x , más recursos dedicados al bien y tendremos que dedicar a producir una unidad adicional de bien x , por lo que la caída en la producción del bien y , debida al incremento de la producción del bien x , será cada vez mayor. Es decir, el coste de oportunidad de x en términos del bien y será creciente.

- Cuando hay rendimientos constantes a escala y los bienes tienen distintas intensidades factoriales: se dice que el bien x es más intensivo en capital que el bien y cuando para cualquier precio relativo del trabajo con respecto al capital, w/r , y para cualquier nivel de producción de x e y , la ratio capital/trabajo que minimiza los costes del bien x es mayor que la ratio capital/trabajo que minimiza los costes del bien y . Si el bien x es más intensivo en capital que el bien y , entonces la curva de asignaciones eficientes de la caja de Edgeworth de factores estaría por encima de la diagonal:

El bien x es intensivo en capital (el bien y es intensivo en trabajo)

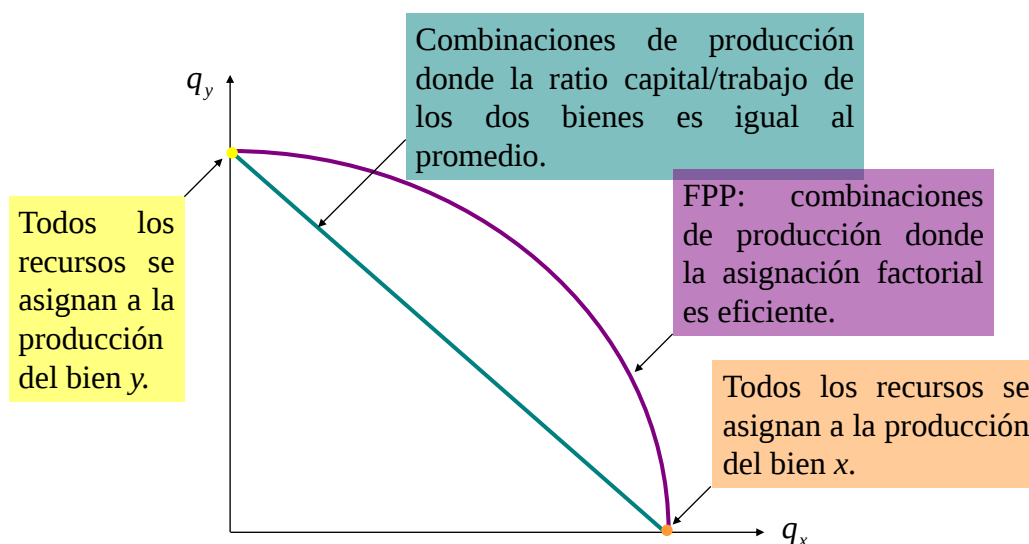


Como sabemos, el ancho de la caja de Edgeworth de factores es igual a la cantidad de trabajo existente en la economía, $\bar{L}$, mientras que el alto de la caja es igual a la cantidad de capital existente, $\bar{K}$. Por tanto, la pendiente de la diagonal de la caja de Edgeworth será igual a $\bar{K}/\bar{L}$, es decir, a la ratio capital/trabajo media de la economía. En la caja de Edgeworth de la gráfica anterior, la curva de asignaciones factoriales eficientes está por encima de la diagonal. Por ello, si trazamos una línea recta entre el origen del bien x y cualquier punto de la curva de asignaciones eficientes, la pendiente de dicha recta, que es igual a la ratio capital/trabajo, está siempre por encima de la diagonal. Esto significa que la ratio capital/trabajo utilizada por la empresa del bien x es siempre superior a la ratio promedio de la economía (que es igual a la pendiente de la diagonal), mientras que la ratio capital/trabajo utilizada por la empresa del bien y (la pendiente de la recta que une el origen del bien y con el punto de la curva de asignaciones eficientes) siempre es menor que la ratio capital/trabajo media. Por tanto, cuando la asignación factorial es eficiente desde un punto de vista productivo, la empresa del bien x siempre usa una ratio capital/trabajo superior a la ratio capital/trabajo utilizada por la empresa y , lo que se

traduce en que el bien x es intensivo en capital, o lo que es lo mismo, el bien y es intensivo en trabajo.

Si se asignaran a las empresas x e y asignaciones factoriales donde la ratio capital/trabajo utilizada en la producción los dos bienes fuera igual a la ratio promedio de la economía y lo representáramos en el espacio de bienes, dado que hay rendimientos constantes a escala, obtendríamos una línea recta. No obstante, esta línea recta no sería la *FPP*, ya que estas asignaciones factoriales son ineficientes, por lo que la *FPP* estaría a la derecha de esta línea. Los únicos puntos en los que coincidirían serían los puntos de corte con los ejes, ya que el punto de corte de la *FPP* con el eje del bien x representa una situación donde no se destina ningún recurso a la producción del bien y , es decir, donde la producción del bien y es cero, y se destinan todos los recursos a producir el bien x , lo que, evidentemente, implica que la ratio capital/trabajo utilizada en la producción del bien x es igual al promedio. Por tanto, el conjunto de posibilidades de producción tiene que ser convexo.

Cuando los bienes tienen distintas intensidades factoriales y presentan rendimientos constantes a escala, el CPP es convexo



1.4.5. El cálculo de la frontera de posibilidades de producción y su representación a través de un gráfico de cuatro cuadrantes.

Para calcular un punto de la *FPP* hay que resolver un sistema de ecuaciones con las restricciones de factibilidad y las condiciones de eficiencia productiva, que en este modelo sería la igualación de las *RMSTs* entre empresas (eficiencia de la combinación factorial entre empresas):

$$q_x = F_x(K_x, L_x) \quad (\text{FPP.1})$$

$$q_y = F_y(K_y, L_y) \quad (\text{FPP.2})$$

$$L_x + L_y = \bar{L} \quad (\text{FPP.3})$$

$$K_x + K_y = \bar{K} \quad (\text{FPP.4})$$

$$RMST_{L,K}^x(K_x, L_x) = RMST_{L,K}^y(K_y, L_y) \quad (FPP.5)$$

En este sistema de ecuaciones tenemos 5 ecuaciones con 5 incógnitas que son K_x, L_x, q_y, K_y, L_y . No tratamos la producción del bien x , q_x , como una incógnita, ya que al final vamos a obtener la producción del bien y en función de la producción del bien x y de la dotación de factores: $q_y(\hat{q}_x, \bar{L}, \bar{K})$.

Otra manera de expresar la *FPP* es de forma implícita: resolviendo el anterior sistema de ecuaciones obtendríamos la **Función de Transformación**, $FTR(q_x, q_y)$, que define las combinaciones de bienes x e y factibles de la siguiente manera:

$$(q_x, q_y) \in CPP \Leftrightarrow FTR(q_x, q_y) \leq 0$$

$$(q_x, q_y) \in FPP \Leftrightarrow FTR(q_x, q_y) = 0$$

Siendo la función de transformación creciente en la producción de ambos bienes. Esto es:

$$\frac{\partial FTR(q_x, q_y)}{\partial q_x} > 0; \quad \frac{\partial FTR(q_x, q_y)}{\partial q_y} > 0$$

A través de la función de transformación se puede obtener la relación marginal de transformación:

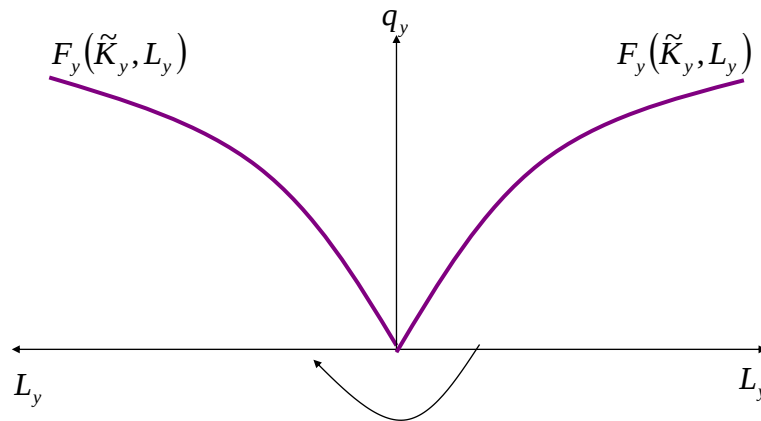
$$FTR(q_x, q_y) = 0$$

$$\frac{\partial FTR(q_x, q_y)}{\partial q_x} dq_x + \frac{\partial FTR(q_x, q_y)}{\partial q_y} dq_y = 0$$

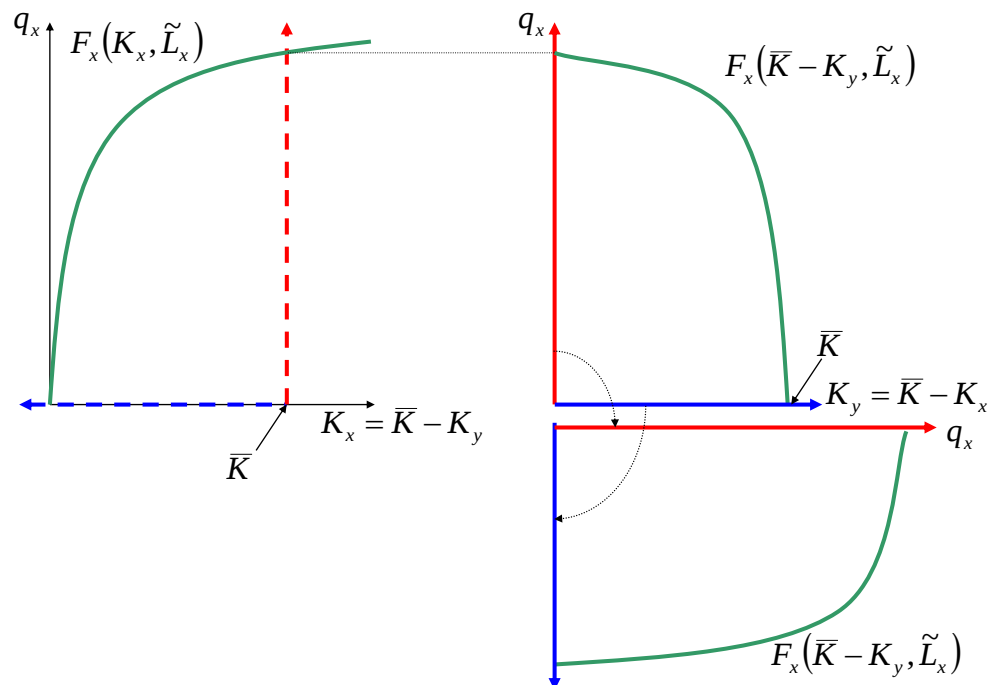
$$\frac{\partial FTR(q_x, q_y)}{\partial q_x} dq_x = - \frac{\partial FTR(q_x, q_y)}{\partial q_y} dq_y$$

$$RMT_{x,y}(q_x, q_y) = - \frac{dq_y}{dq_x} = \frac{\frac{\partial FTR(q_x, q_y)}{\partial q_x}}{\frac{\partial FTR(q_x, q_y)}{\partial q_y}}$$

Para representar gráficamente el sistema de ecuaciones con el que se calcula la *FPP*, vamos a utilizar primero la función de producción del bien y (FPP.2) en función de la cantidad de trabajo, considerando el nivel de capital como fijo. Seguidamente, vamos a rotar el eje del trabajo como si cerráramos un libro, de tal manera que la función de producción del bien y se representa en el cuadrante de la izquierda:



Ahora utilizamos la función de producción del bien x en función de la cantidad de capital, considerando el nivel de trabajo fijo, $F_x(K_x, \tilde{L}_x)$ (FPP.1). También incorporamos la restricción de factibilidad que nos dice que no se puede utilizar más capital que el existente en la economía (FPP.4): $K_x + K_y = \bar{K} \Leftrightarrow K_x = \bar{K} - K_y$. Incorporando esta última restricción dentro de la función de producción de x para una cantidad de producción fija, obtenemos la producción del bien x como una función decreciente del capital utilizado en el bien y : $q_x = F_x(\bar{K} - K_y, \tilde{L}_x)$. Hacemos un giro de 90 grados en dirección a las manecillas del reloj con los ejes de la representación gráfica de la función que relaciona la producción del bien x con la cantidad de capital utilizada en el bien y , tal y como puede apreciarse en el siguiente gráfico:



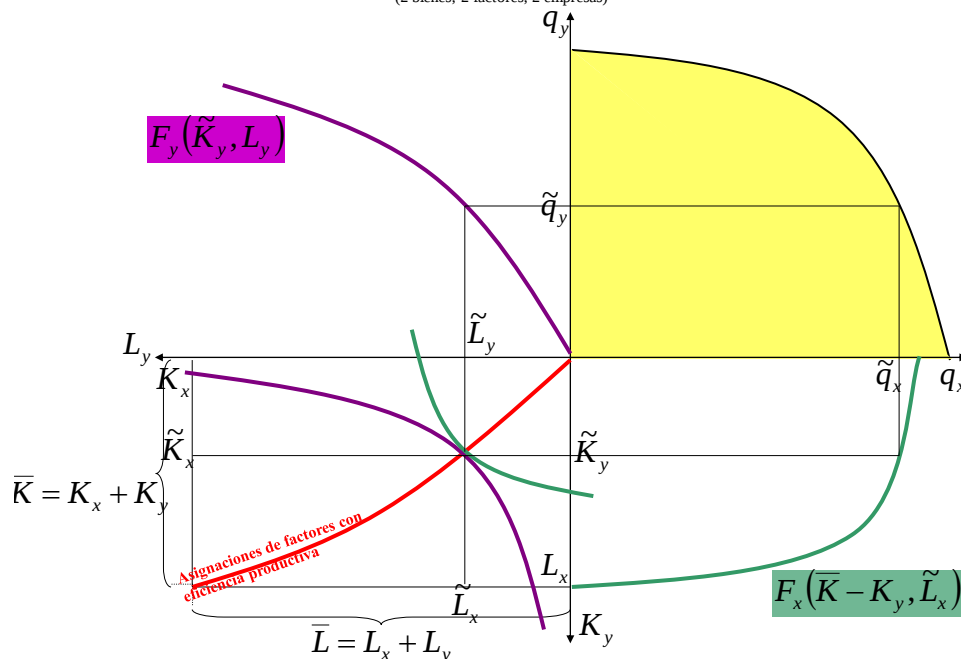
En el siguiente gráfico se ofrece una representación del sistema de ecuaciones que determina la FPP. En el cuadrante inferior izquierdo se representa la caja de Edgeworth de factores, donde se están utilizando los factores existentes en la economía

(restricciones FPP.3 y FPP.4) y, además, se está en la curva de asignaciones factoriales eficientes, por lo que se cumple la condición de eficiencia de la combinación factorial entre empresas (ecuación FPP.5). En el cuadrante superior izquierdo se representa la función de producción del bien y (ecuación FPP.2). En el cuadrante inferior derecho se representa la producción del bien x como función de la cantidad de capital utilizado en la producción del bien y , donde se ha incorporado la función de producción del bien x (FPP.1) y la restricción que nos dice que la cantidad de capital utilizada en la producción del bien x y el bien y tiene que ser igual a la cantidad total de capital existente en la economía (FPP.4). Por tanto, el gráfico incorpora todas las ecuaciones del sistema que determina la FPP.

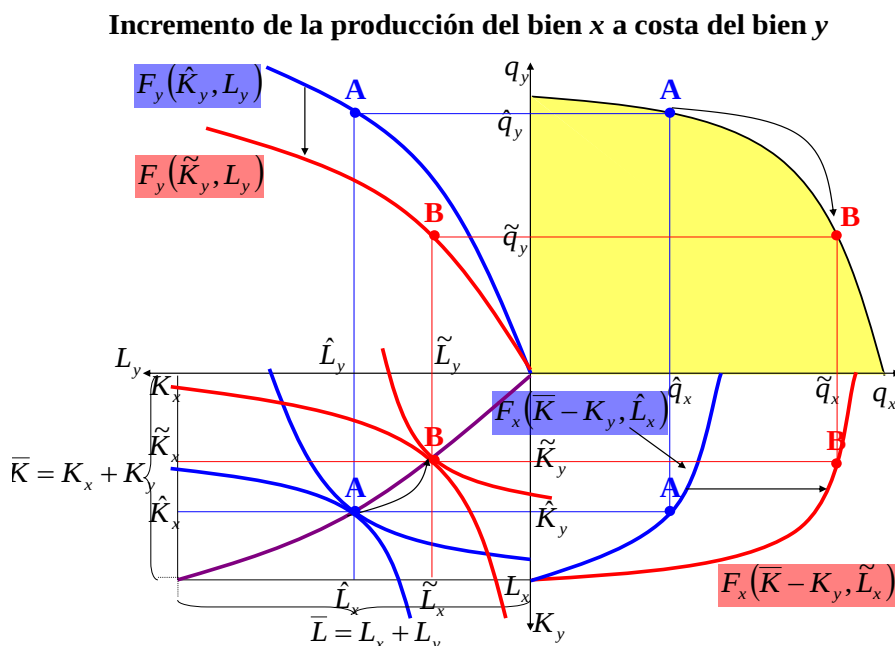
En el cuadrante inferior izquierdo se representa la asignación de factores entre el bien x y el bien y . Utilizando las funciones de producción de ambos bienes (función de producción de y del cuadrante superior izquierdo y función de producción de x del cuadrante inferior derecho), podemos ver los niveles de producción correspondiente a esta asignación factorial, que será un punto de la FPP en el cuadrante superior derecho.

Frontera de Posibilidades de Producción $2 \times 2 \times 2$

(2 bienes, 2 factores, 2 empresas)



En el siguiente gráfico vemos qué ocurre cuando pasamos de un punto a otro de la FPP.



En el punto inicial A se produce más del bien y y menos del bien x . Cuando pasamos al punto B se incrementa la producción de x y se reduce la de y , por lo que se reasignan factores de la producción del bien y a la producción del bien x , hecho que se ve reflejado en la caja de Edgeworth (cuadrante inferior izquierdo) al desplazarnos del punto A de la curva de asignaciones eficientes de factores a otro punto B , donde se dedican menos recursos (trabajo y capital) a la producción del bien y y más recursos a la producción del bien x . Por otra parte, en el cuadrante superior izquierdo se observa que al detraerse capital de la producción del bien y , para el mismo nivel de trabajo se produce menos. Este hecho se refleja en el desplazamiento hacia abajo de la función que relaciona la producción del bien y con la cantidad de trabajo dedicada a la producción de dicho bien. Por el contrario, se dedica más trabajo a la producción del bien x , lo que se observa en el cuadrante inferior derecho con el desplazamiento hacia la derecha de la curva que relaciona la cantidad de capital utilizada en el bien y con la producción del bien x .

1.4.6. El equilibrio Walrasiano y la eficiencia productiva.

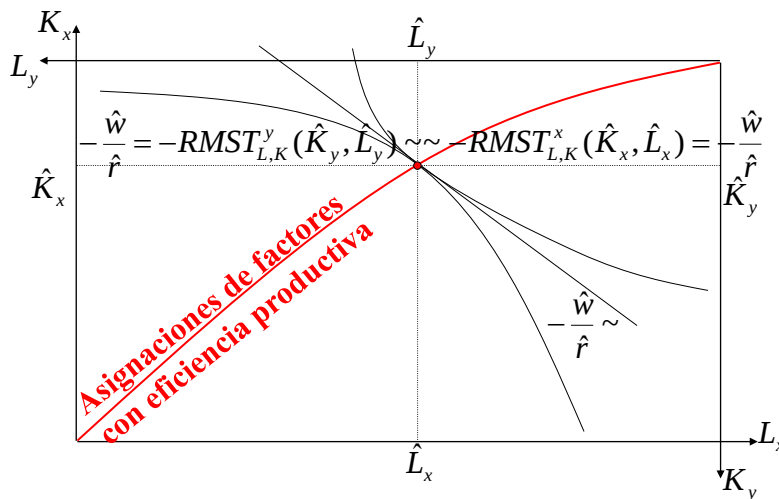
Dado que en el equilibrio Walrasiano las empresas maximizan beneficios y, por tanto, minimizan costes, las $RMSTs$ entre trabajo y capital se igualan a los precios relativos del trabajo con respecto al capital y, por tanto, las $RMSTs$ se igualan entre las empresas. Esto implica que el equilibrio Walrasiano es eficiente desde el punto de vista productivo y, por tanto, la producción del equilibrio Walrasiano está siempre en la frontera de posibilidades de producción:

$$\left. \begin{aligned} p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} &= w \\ p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} &= r \end{aligned} \right\} \Rightarrow RMST_{L,K}^x(K_x, L_x) = \frac{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x}}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x}} = \frac{w}{r}$$

$$\left. \begin{aligned} p_y \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y} &= w \\ p_y \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y} &= r \end{aligned} \right\} \Rightarrow RMST_{L,K}^y(K_y, L_y) = \frac{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y}}{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y}} = \frac{w}{r}$$

$$RMST_{L,K}^x(K_x, L_x) = \frac{w}{r} = RMST_{L,K}^y(K_y, L_y)$$

Asignaciones de factores en el Equilibrio Walrasiano



Relación Marginal de Transformación y Precios del Equilibrio Walrasiano:

Usando las condiciones de primer orden del problema de maximización de beneficios, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x} &= w \\ p_x \frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x} &= r \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_x = \frac{r}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x}} = \frac{w}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x}} = CMg_x(w, r, q_x)$$

$$\left. \begin{aligned} p_y \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y} &= w \\ p_y \frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y} &= r \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_y = \frac{r}{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y}} = \frac{w}{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y}} = CMg_y(w, r, q_y)$$

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{CMg_x(w, r, q_x)}{CMg_y(w, r, q_y)} = \frac{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial K_y}}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial K_x}} = \frac{\frac{\partial F_y(K_y, L_y)}{\partial L_y}}{\frac{\partial F_x(K_x, L_x)}{\partial L_x}} = RMT_{x,y}(q_x, q_y)$$

Por tanto, los precios relativos de los bienes en el equilibrio Walrasiano no solo reflejan los costes marginales privados, sino también el coste de oportunidad social (la RMT). Esta propiedad de los precios del equilibrio Walrasiano implica que los precios relativos de los bienes son tangentes a la FPP y, por tanto, la combinación productiva del equilibrio Walrasiano, no solo está en la FPP , como ya hemos demostrado, sino que, además, es el punto de la FPP donde se maximiza el valor de la producción (PIB), tal y como se muestra en el siguiente gráfico:

En el Equilibrio Walrasiano se maximiza el valor de la producción (PIB)

