1.8. Los fallos de mercado.

Hasta ahora hemos visto que, en el modelo competitivo, el equilibrio es eficiente (Primer Teorema del Bienestar). Sin embargo, hay situaciones de interés económico que nos son recogidas de manera adecuada en el modelo competitivo básico, por lo que es necesario modificarlo para que se adapte al problema económico concreto que queremos tratar. Cuando hacemos estas modificaciones y cambiamos algún supuesto básico, los resultados del modelo cambian y el nuevo equilibrio puede ser ineficiente en sentido de Pareto. Cuando esto ocurre decimos que hay un **fallo de mercado**.

Un ejemplo de fallo de mercado sería la una situación de competencia imperfecta. Si, por ejemplo, en el sector *x* hay competencia imperfecta (hay un monopolio o un oligopolio de empresas que compiten a la Cournot), en dicho sector el precio no se iguala al coste marginal y, por tanto, los precios relativos dejan de ser un indicador del coste de oportunidad social, por lo que el equilibrio resultante deja de ser eficiente. Suponiendo que el sector del bien *y* es competitivo y que hay un solo consumidor:

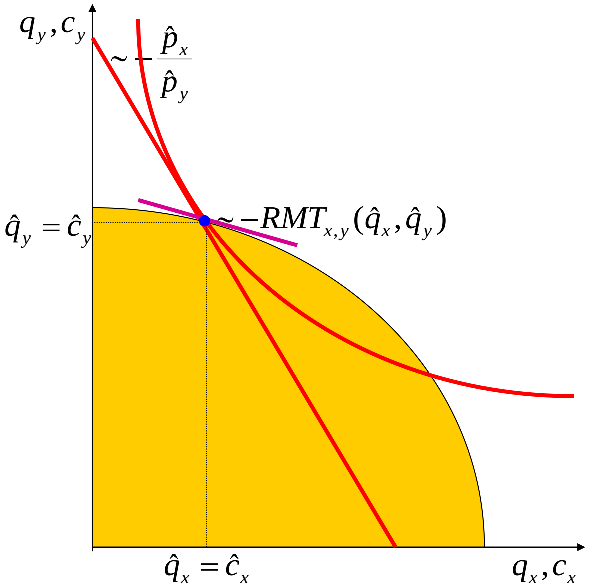
$$\left.\begin{array}{l} p_x > CMg_x(w,r,q_x) \\ p_y = CMg_y(w,r,q_y) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} > \frac{CMg_x(w,r,q_x)}{CMg_y(w,r,q_y)} = RMT_{x,y}(q_x,q_y)$$

$$RMS_{x,y}(c_x,c_y) = \frac{p_x}{p_y} > \frac{CMg_x(w,r,q_x)}{CMg_y(w,r,q_y)} = RMT_{x,y}(q_x,q_y) \Rightarrow$$

$$RMS_{x,y}(c_x,c_y) > RMT_{x,y}(q_x,q_y)$$

Por tanto, se viola la condición de eficiencia de la combinación productiva, lo que implica que el equilibrio no es eficiente en sentido de Pareto, tal y como podemos observar en el siguiente gráfico:

Competencia imperfecta en el bien $x \Rightarrow$ Ineficiencia Paretiana



En esta sección vamos a analizar dos situaciones donde el equilibrio de mercado no es eficiente (hay un "fallo de mercado"): los efectos externos y los bienes públicos.

1.8.1. Los efectos externos o externalidades.

Se dice que hay un efecto externo cuando la acción de un agente afecta directamente a otro agente sin que haya contrapartida monetaria por ese efecto. Por ejemplo, si una empresa genera contaminación que afecta negativamente a la salud y al bienestar de una serie de personas, y esta empresa no compensa monetariamente a esas personas afectadas, entonces hay un efecto externo que, en este ejemplo, es negativo. Se dice que el efecto externo es negativo cuando perjudica al agente afectado (por ejemplo, reduce la producción de una empresa o la utilidad de un consumidor), mientras que se dice que el efecto externo es positivo cuando beneficia al agente afectado (por ejemplo, aumenta la producción de una empresa o la utilidad de un consumidor).

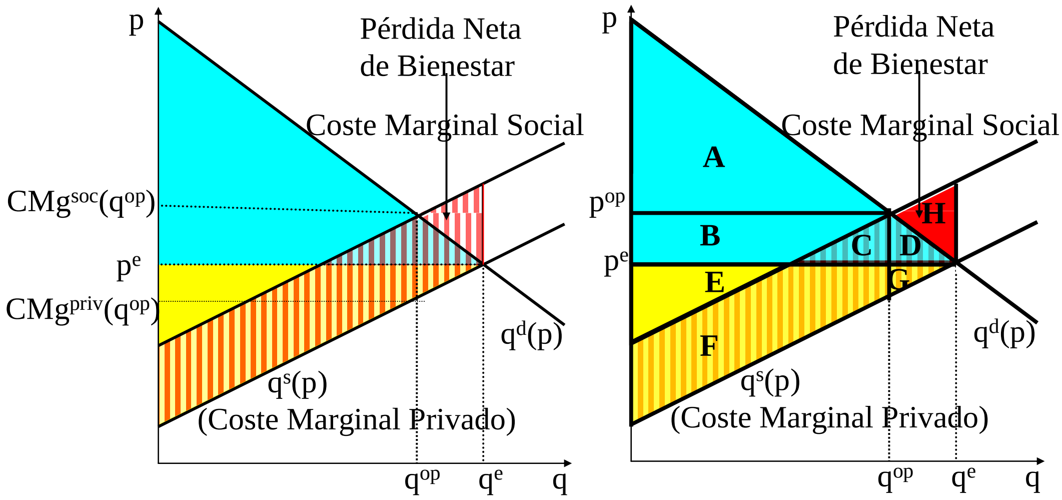
El problema de los efectos externos radica en que los costes o beneficios que genera un agente no le afectan a sí mismo, lo que implica que no los tiene en cuenta a la hora de tomar sus decisiones. En el ejemplo de una empresa contaminante, los perjuicios que genera la empresa no son contabilizados en sus costes, por lo que a la hora de tomar decisiones sobre cuánto producir, estos costes de contaminación no son tomados en cuenta, lo que hace que se produzca una cantidad superior a la que sería eficiente.

Los efectos externos se introducen en un modelo como un efecto directo de la acción de un agente (producción, consumo, etc.) sobre la función de producción de una empresa (distinta de ese agente) o sobre la función de utilidad de un consumidor (distinto de ese agente).

Efectos externos en equilibrio parcial.

En el siguiente gráfico, se representa una situación de equilibrio en un mercado donde las empresas del mismo generan efectos externos negativos:

Externalidad negativa en la producción en equilibrio parcial:
el precio es inferior al coste marginal social.



En el gráfico anterior se representa el equilibrio de mercado de un bien cuyos productores generan efectos externos negativos. El equilibrio se produce cuando la demanda se iguala a la oferta; ahora bien, la oferta no refleja todos los costes que generan los productores, ya que éstos cuando toman sus decisiones solo tienen en cuenta sus costes privados, y no los costes que generan a través de los efectos externos. Esto implica que las empresas elegirán una cantidad de producción tal que el precio sea igual al coste marginal privado (sin tener en cuenta los efectos externos), con lo que la curva de oferta reflejará los costes marginales privados. Ahora bien, si tenemos en cuenta los efectos negativos que generan las empresas, los costes marginales sociales (que incluyen esos efectos externos negativos) serán superiores a los privados, ya que no solo incluyen los costes de los factores productivos que necesitan las empresas para producir (costes privados), sino que también incluyen los costes marginales asociados a los efectos externos. Esto significa, gráficamente, que la curva de costes marginales sociales está por encima de la oferta de mercado (que solo refleja los costes marginales privados).

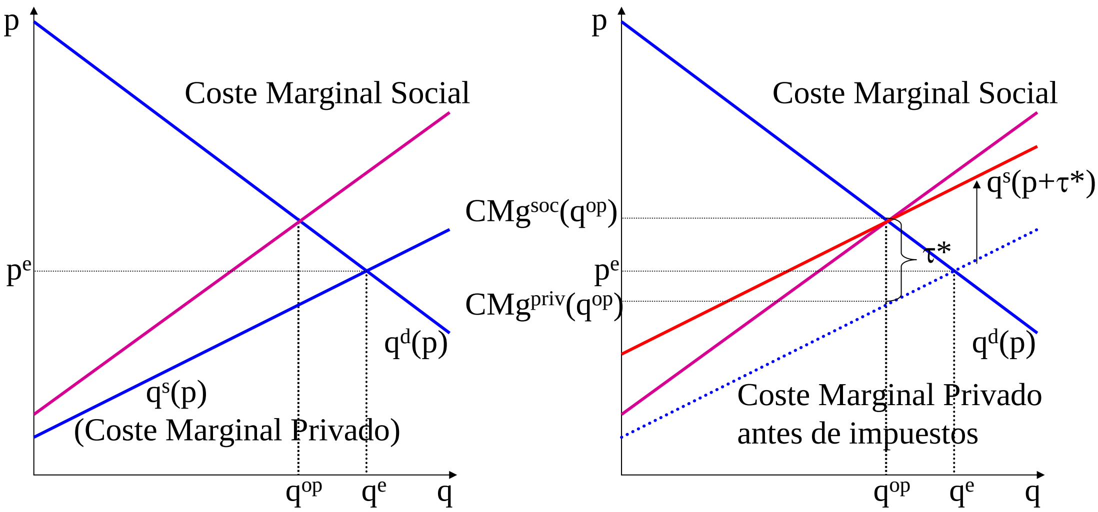
El equilibrio se produce cuando la oferta se iguala a la demanda. En el gráfico, aparece representado el excedente del consumidor en el equilibrio (triángulos azul turquesa), el excedente del productor (triángulo amarillo) y los costes que genera el efecto externo (zona con rayas rojas). Como recordará el lector, el excedente del consumidor es la suma de las diferencias entre el precio de reserva (máximo precio que están dispuestos a pagar los consumidores por cada unidad) y el precio que pagan (precio de equilibrio) de cada unidad que consumen. Por su parte, el excedente del productor es la suma de las diferencias entre y el precio que reciben las empresas por cada unidad vendida (precio de equilibrio) y el mínimo precio al que están dispuestas a vender esa unidad las empresas del mercado (su coste marginal). El bienestar total es igual al excedente del consumidor (triángulo azul turquesa), más el excedente del productor (triángulo amarillo), menos los costes marginales de los efectos externos (paralelogramo con rayas rojas). Lo primero que se observa es que en el equilibrio no se maximiza el bienestar total. Para comprobarlo, vamos a comparar el equilibrio con otra situación (que, evidentemente, no es un equilibrio) donde: a) se produce la cantidad tal que el coste marginal social se iguala a la demanda, cantidad que denotaremos por q^{op}; b) donde el precio es igual al de equilibrio; y c) donde las empresas que producen son aquellas cuyos costes son menores que el coste marginal privado de producir q^{op} ($CMg^{priv}(q^{op})$) y las economías domésticas que consumen son aquella que tienen un precio de reserva mayor que p^{op}. El bienestar total del equilibrio vendría dado por el excedente de consumidor (áreas A+B+C+D), más el excedente del productor (áreas E+F+G), menos los costes marginales de los efectos externos (áreas C+D+F+G+H). Por tanto, el bienestar total es igual al área A+B+E-H. En la situación donde se pone el precio de equilibrio, pero donde las empresas que producen son las que tienen unos costes marginales menores que $CMg^{priv}(q^{op})$ y donde las economías que consumen son aquellas que tienen un precio de reserva mayor que p^{op}, el bienestar total es igual al excedente del consumidor (área A+B+C), más el excedente del productor (área E+F), menos los costes de la externalidad (área F+C). Por tanto, el bienestar total es igual al área A+B+E, lo que significa que hay una diferencia igual al área H con respecto a la situación de equilibrio. A esta diferencia se le denomina pérdida neta de bienestar en el equilibrio.

Además, el hecho de que no se maximice el bienestar total implica que el equilibrio no es eficiente en sentido de Pareto. Para comprobarlo consideremos una situación donde se produce q^{op}, donde el precio es igual al de equilibrio, donde las empresas que producen son las que tienen unos costes marginales menores que $CMg^{priv}(q^{op})$, y donde las economías domésticas que consumen son aquellas que tienen un precio de reserva mayor que p^{op}. Por tanto, estos consumidores y estas empresas están exactamente igual que en el equilibrio. Además, los consumidores que tienen un precio de reserva menor que p^{op} pero mayor que el precio de equilibrio, son compensados por los afectados por las externalidades negativas en una cuantía de dinero igual al área D, lo que implica que estos consumidores también están igual que en el equilibrio. Las empresas cuyos costes marginales están entre $CMg^{priv}(q^{op})$ y el precio de equilibrio también son compensados por los afectados por las externalidades negativas en una cuantía de dinero igual al área G, lo que implica que estas empresas también están igual que en el equilibrio. Resumiendo, tanto los consumidores como las empresas están igual en esta situación que en el equilibrio. Ahora bien, los afectados por los efectos externos están estrictamente mejor, porque aunque tengan que compensar a los consumidores en una cuantía de dinero igual a D y a las empresas en una cuantía de dinero igual a G, los costes derivados de los efectos externos se reducen en el área D+G+H, por los que su ganancia neta con respecto a la asignación de equilibrio es igual a H. Es decir, hemos conseguido una asignación en la que los consumidores y las empresas están igual que en el equilibrio, pero los afectados por los efectos externos están estrictamente mejor, lo que significa que se ha logrado hacer una mejora paretiana con respecto a la asignación de equilibrio. Esto se traduce en que la asignación de equilibrio es ineficiente en sentido de Pareto.

Por tanto, si hay una externalidad negativa el precio del bien solo tiene en cuenta el coste privado, por lo que el precio infravalora el coste y, como resultado, se produce una cantidad ineficientemente grande del bien.

¿Cómo se puede lograr que el mercado sea eficiente en sentido de Pareto? La solución es hacer que los costes privados se igualen a los sociales. Por ejemplo, si se pone un impuesto unitario con un tipo impositivo τ^* igual a la diferencia entre costes marginales sociales y privados de producir la cantidad eficiente q^{op}, la curva de oferta se desplaza verticalmente hacia arriba en la cuantía del impuesto, con lo que se logra producir la cantidad eficiente donde los costes marginales sociales y el precio de reserva de la última unidad producida se igualan. Esta idea queda reflejada en el siguiente gráfico:

Impuesto Pigouviano



Efectos externos en equilibrio general.

En esta sección retomamos el modelo de un solo consumidor, un solo factor, L, una empresa por sector (la empresa *x* es la que produce el bien *x* y la empresa *y* es la que produce el bien *y*) y dos bienes (*x* e *y*). La diferencia es que ahora la empresa *x* genera efectos externos sobre la empresa *y*. De esta manera, la función de producción de *x* viene dada por la expresión $q_x = F_x(L_x)$, que implica que la producción de este bien depende de la cantidad de factor utilizada, L_x. Sin embargo, la producción de *y*, $q_y = F_y(L_y, q_x)$, no solo depende de la cantidad de factor utilizada, L_y, sino que también depende de la cantidad de producción de la empresa *x*, q_x. Se dice que hay **efectos externos negativos** si la producción de *y* decrece con q_x, esto es $\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial q_x} < 0$, y se dice que hay un **efecto externo positivo** si la producción de *y* aumenta con q_x, esto es $\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial q_x} > 0$.

De resto, el modelo es exactamente igual que el de la sección 1.7.2. Así, hay una dotación total del único factor igual a $\overline{L} > 0$, que posee el único consumidor que existe en esta economía. Además, a él le pertenecen los beneficios de las dos empresas. Las preferencias de este único consumidor se recogen en la función de utilidad $u(c_x, c_y)$, siendo c_x y c_y, respectivamente, las cantidades de bien *x* y bien *y* consumidas por él.

La definición de equilibrio es como siempre: hay equilibrio cuando las economías domésticas maximizan su utilidad, las empresas maximizan sus beneficios y todos los mercados están en equilibrio, tanto los de bienes como los de factores.

Definición 2: Un **equilibrio Walrasiano** es una asignación $(c_x, c_y, q_x, L_x, q_y, L_y)$, llamada **asignación de equilibrio**, y un vector de precios (p_x, p_y, w), llamado **vector de precios de equilibrio**, tal que:

- La única economía doméstica elige aquella cesta de consumo que maximiza su utilidad (demanda de bienes):

$$RMS_{x,y}(c_x, c_y) = \frac{p_x}{p_y} \tag{EW.1}$$

$$p_x c_x + p_y c_y = w\overline{L} + \pi_x + \pi_y \tag{EW.2}$$

- Las empresas eligen el nivel de producción (oferta de bienes) y la combinación de factores (demanda de factores) que maximizan sus beneficios:

  - Empresa del bien *x*:

$$p_x \frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x} = w \tag{EW.3}$$

$$q_x = F_x(L_x) \tag{EW.4}$$

  - Empresa del bien *y*:

$$p_y \frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial L_y} = w \tag{EW.5}$$

$$q_y = F_y(L_y, q_x) \tag{EW.6}$$

- Los mercados de bienes están en equilibrio (demanda = oferta):

  - Bien *x*:

$$c_x = q_x \tag{EW.7}$$

  - Bien *y*:

$$c_y = q_y \tag{EW.8}$$

- Los mercados de factores están en equilibrio (demanda = oferta):

  - Mercado de trabajo:

$$L_x + L_y = \overline{L} \tag{EW.9}$$

El problema de la ineficiencia de este equilibrio surge porque la empresa del bien *x* genera unos costes (externalidades negativas) o unos beneficios (externalidades positivas) que no paga (no se los pagan, en caso de externalidades positivas) y que, por tanto, no tiene en cuenta a la hora de tomar decisiones. La empresa del bien *x* contrata factores hasta el punto en que el valor del producto marginal del factor se iguala a su precio, independientemente de que genere efectos externos positivos, negativos o no genere efectos externos, como se puede observar en la ecuación (EW.3). O lo que es equivalente, la empresa del bien *x* produce hasta el punto en que el precio del bien *x* sea igual al coste marginal privado de la empresa, que solo depende del precio del factor y del nivel de producción. Por tanto, la cantidad de factor que necesita para aumentar la producción no depende en absoluto de los posibles efectos externos:

$$p_x = \frac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} = CMg_x^{priv}(w, q_x) \qquad \text{(EW.3')}$$

Esto hará, como tendremos ocasión de comprobar más adelante, que el equilibrio sea ineficiente. Para que la empresa del bien *x* tomara las decisiones "correctas" no solo tendría que tener en cuenta sus costes privados, sino también los posibles costes o beneficios que genera los efectos externos. Para que esto fuera así, los costes marginales de la empresa *x* tendrían que ser iguales a los costes sociales, que no solo incluyen los costes asociados a los factores adicionales necesarios para producir una unidad adicional, sino que también incluirían los costes (o beneficios) que genera en la empresa *y* el producir una unidad adicional:

$$CMg_x^{soc}(w, q_x, p_y, L_y) = \underbrace{\frac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}}}_{\substack{\text{Coste marginal} \\ \text{privado (factores)}}} + \underbrace{p_y\left(-\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial q_x}\right)}_{\text{Efecto externo}}$$

El coste marginal social de la empresa *x* se podría, por tanto, descomponer en dos partes:

- Coste marginal privado: incremento del coste al producir una unidad adicional de bien *x* debido a los factores adicionales que tiene que contratar para ello. Para producir una unidad adicional de bien *x* se necesita $1 \Big/ \frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}$ unidades adicionales de trabajo (ya que $dq_x = \frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x} dL_x \Rightarrow dL_x = \frac{dq_x}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}}$), cuyo coste es igual a $w \times \left(1 \Big/ \frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}\right)$.
- Coste (beneficio) asociado al efecto externo: cuando se incrementa en una unidad la producción del bien *x*, se reduce (aumenta) la producción del bien *y* en $-\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial q_x}$ unidades, cuyo coste es igual a $p_y\left(-\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial q_x}\right)$.

Es interesante notar que:

- Cuando hay **efectos externos negativos**, esto es, cuando $\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial q_x} < 0$, los costes asociados a los efectos externos son positivos y, por tanto, el coste marginal social es mayor que el coste marginal privado:

$$CMg_x^{soc}(w, q_x, p_y, L_y) = \frac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} + p_y\left(-\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial q_x}\right) > \frac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} = CMg_x^{priv}(w, q_x)$$

- Cuando hay un **efecto externo positivo**, esto es, cuando $\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial q_x} > 0$, los costes asociados a los efectos externos son negativos (porque en realidad son beneficios), siendo, en este caso, el coste marginal social menor que el privado:

$$CMg_x^{soc}(w, q_x, p_y, L_y) = \frac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} + p_y\left(-\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial q_x}\right) < \frac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} = CMg_x^{priv}(w, q_x)$$

Uno de los problemas que genera la divergencia entre costes privados y costes sociales es que los precios relativos de los bienes no van a ser un buen indicador del coste de oportunidad social, lo que conllevará la ineficiencia de la asignación de equilibrio. Para comprobarlo, a continuación se calcula la relación marginal de transformación de bien *x* por bien *y*. Las ecuaciones que determinan la *FPP* son las siguientes:

$$q_x = F_x(L_x)$$
$$q_y = F_y(L_y, q_x)$$
$$L_x + L_y = \overline{L}$$

Diferenciando cada una de estas tres ecuaciones, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} dq_x = \frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x} dL_x \\ dq_y = \frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial L_y} dL_y + \frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial q_x} dq_x \\ dL_x + dL_y = 0 \Leftrightarrow dL_y = -dL_x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{dq_y}{dq_x} = \frac{\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial L_y} dL_y + \frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial q_x} dq_x}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x} dL_x} = \frac{\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial L_y} dL_y + \frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial q_x} \frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x} dL_x}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x} dL_x} =$$

$$\frac{\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial L_y} dL_y}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x} dL_x} + \frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial q_x} = \frac{\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial L_y}}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} \frac{-dL_x}{dL_x} + \frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial q_x} = -\frac{\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial L_y}}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} + \frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial q_x}$$

Por tanto, la relación marginal de transformación entre el bien *x* y el bien *y* viene dada por la siguiente expresión:

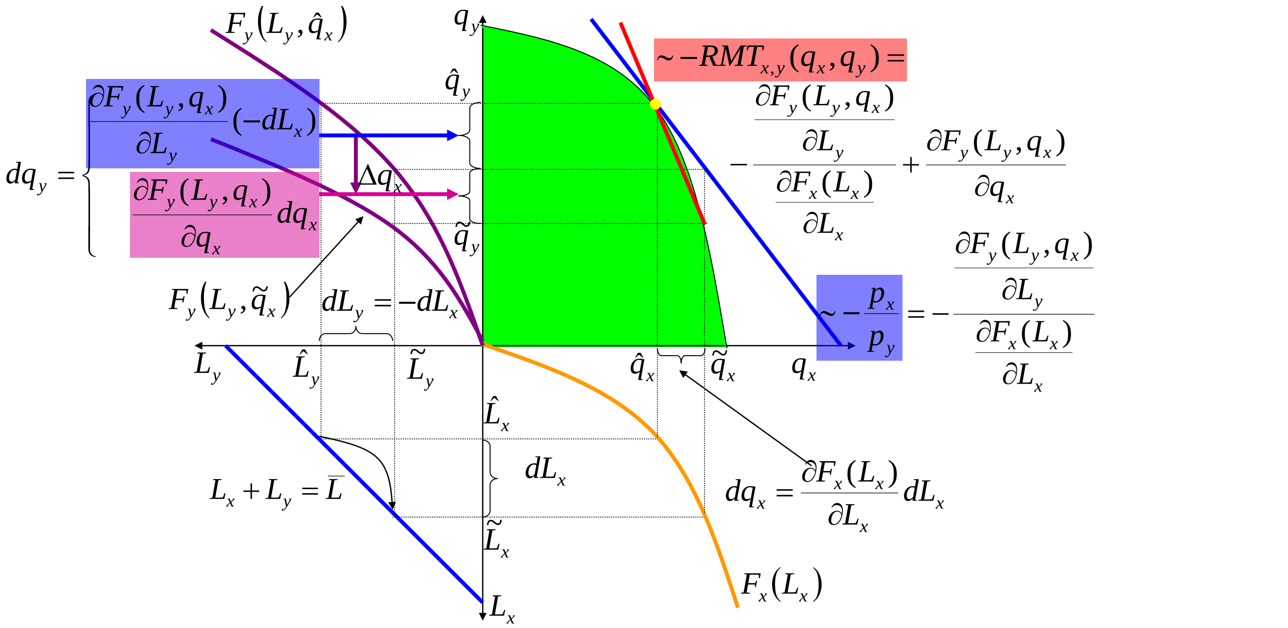
$$RMT_{x,y}(q_x,q_y) = -\frac{dq_y}{dq_x} = \frac{\dfrac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} - \frac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial q_x}$$

Los precios relativos del equilibrio Walrasiano no son iguales a la *RMT* cuando hay efectos externos:

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{CMg_x^{priv}(w,q_x)}{CMg_y(w,q_y)} = \frac{\dfrac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}}}{\dfrac{w}{\frac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial L_y}}} = \frac{\dfrac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} \neq \frac{\dfrac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} - \frac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial q_x} = RMT_{x,y}(q_x,q_y)$$

En el siguiente gráfico se explica la *RMT* en este modelo y por qué diverge de los precios relativos de equilibrio:

***RMT* con externalidad negativa**



En el gráfico anterior se puede observar cómo se detrae trabajo de la producción del bien *y* para aumentar la producción del bien *x*. Esto implica que la producción del bien *x* aumenta en proporción a la productividad marginal del trabajo, $\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}$, y a la cantidad de trabajo adicional dedicado a producir *x*, dL_x. Por tanto, el incremento en la producción de *x* es igual a $dq_x = \frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x} dL_x$ (cuadrante inferior derecho). En cuanto a la producción del bien *y* (cuadrante superior izquierdo), ésta disminuye como consecuencia de dos mecanismos:

1. El primer mecanismo está relacionado con la reasignación de factores necesaria para aumentar la producción del bien *x*. Al aumentar la cantidad de trabajo dedicada a la producción del bien *x*, disminuye en la misma cuantía el trabajo destinado a la producción del bien y, $dL_y = -dL_x$, por lo que la producción del bien *y* disminuye en proporción a la productividad marginal del trabajo, $\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial L_y}$, y a la cantidad de trabajo que se deja de utilizar en la producción del bien *y*, $-dL_x$, con lo que tenemos el efecto habitual de que la producción del bien *y* se reduce, debido a la menor utilización de trabajo, en la cuantía $-\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial L_y} dL_x$.

2. El segundo mecanismo tiene que ver con los efectos externos. Si la empresa *x* genera efectos externos negativos (positivos), al aumentar la producción del bien *x* disminuye (aumenta) la producción de bien *y*, con lo que habría otra reducción adicional de la producción del bien *y* de cuantía $\frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial q_x} dq_x$. Esto se refleja gráficamente en el cuadrante superior izquierdo, con el desplazamiento hacia abajo de la función de producción del bien *y*. Debido a la externalidad negativa de la producción del bien *x*, con la misma cantidad de trabajo se produce menos bien *y* que antes del incremento de la producción del bien *x*.

En el cuadrante superior derecho se observa que los precios relativos (que reflejan los costes marginales privados), solo recogen el primer mecanismo (el relacionado con la reasignación de factores), ya que la empresa *x* solo tiene en cuenta los costes de los factores, no los que genera a la empresa *y* a través de los efectos externos. Sin embargo, el coste de oportunidad en la economía (*RMT*) reflejaría la reducción total de la producción del bien *y*, tanto la relacionada con la reasignación de factores (mecanismo 1), como la motivada por los efectos externos negativos (mecanismo 2). Esto implica que, en caso de que haya efectos externos negativos, el coste de oportunidad en la economía (*RMT*) es mayor que los precios relativos de equilibrio.

Para que la ratio de los costes marginales de las empresas reflejara el coste de oportunidad de la economía (*RMT*), los costes marginales de la empresa del bien *x* tendrían que ser los costes sociales, no los privados:

$$\frac{CMg_x^{soc}(w,q_x,p_y,L_y)}{CMg_y(w,q_y)} = \frac{\dfrac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} + p_y\left(-\dfrac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial q_x}\right)}{\dfrac{w}{\frac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial L_y}}} = \frac{\dfrac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}}}{\dfrac{w}{\frac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial L_y}}} + \frac{p_y\left(-\dfrac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial q_x}\right)}{p_y} =$$

$$\frac{CMg_x^{soc}(w,q_x,p_y,L_y)}{CMg_y(w,q_y)} = \frac{\dfrac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} - \frac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial q_x} = RMT_{x,y}(q_x,q_y)$$

El hecho de que los precios relativos no se igualen a la *RMT* implica que la economía no es eficiente en sentido de Pareto, ya que se viola la condición de eficiencia de la combinación productiva:

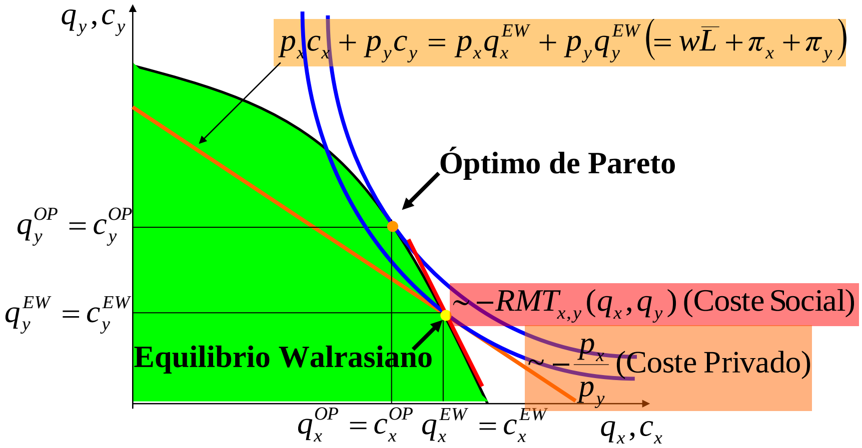
$$RMS_{x,y}(c_x,c_y) = \frac{p_x}{p_y} = \frac{CMg_x^{priv}(w,q_x)}{CMg_y(w,q_y)} \neq \frac{CMg_x^{soc}(w,q_x,p_y,L_y)}{CMg_y(w,q_y)} = RMT_{x,y}(q_x,q_y)$$

En el caso de las externalidades negativas, los costes marginales privados del bien *x* no cuantifican los costes que el efecto externo provoca sobre el bien *y*. Por tanto, el precio relativo del bien *x* infravaloraría los costes sociales:

$$RMS_{x,y}(c_x,c_y) = \frac{p_x}{p_y} = \frac{CMg_x^{priv}(w,q_x)}{CMg_y(w,q_y)} < \frac{CMg_x^{soc}(w,q_x,p_y,L_y)}{CMg_y(w,q_y)} = RMT_{x,y}(q_x,q_y)$$

Esto hace que en el equilibrio Walrasiano se produzca una cantidad de *x* ineficientemente grande, tal y como muestra el siguiente gráfico:

Externalidad negativa: el coste privado del bien *x* ($p_x \backslash p_y$) infravalora el coste de oportunidad social (*RMT*): $\frac{p_x}{p_y} < RMT_{x,y}(q_x,q_y)$



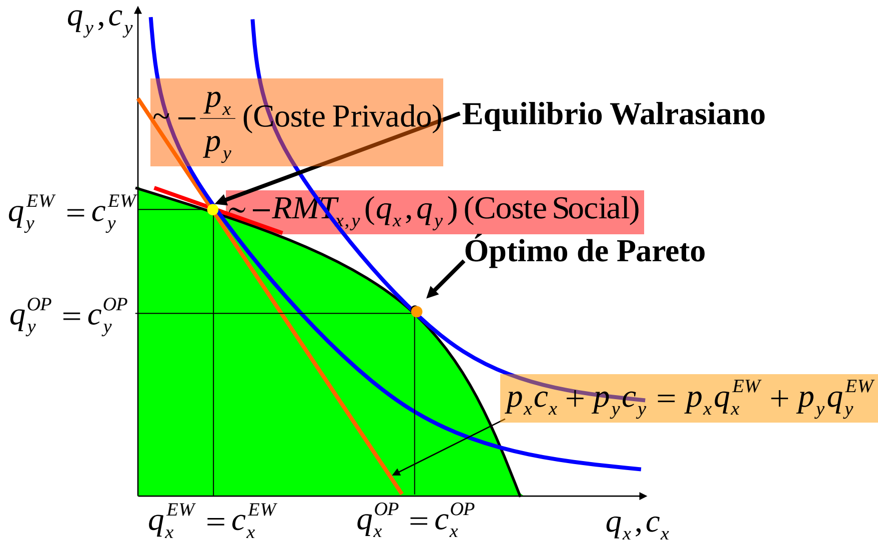
El gráfico anterior muestra que en la combinación productiva del equilibrio Walrasiano, los precios relativos del bien *x* con respecto al bien *y*, p_x / p_y, (que solo tienen en cuenta los costes privados), infravaloran el coste de oportunidad del bien *x* en términos del bien *y*, esto es, la $RMT_{x,y}(q_x, q_y)$. Por ello, la pendiente de la recta de balance del consumidor (que es igual a los precios relativos en negativo, $-p_x / p_y$), tiene una pendiente inferior, en términos absolutos, a la pendiente de la frontera de posibilidades de producción (la relación marginal de transformación en negativo, esto es, $-RMT_{x,y}(q_x, q_y)$), por lo que en el equilibrio Walrasiano no se iguala la *RMS* del consumidor a la *RMT*. En otras palabras, no se da la condición de eficiencia de la combinación productiva, lo que implica que el equilibrio Walrasiano es ineficiente en sentido de Pareto. Esta idea queda clara al comparar el equilibrio Walrasiano con el óptimo de Pareto, donde la *RMS* del consumidor sí es igual a la *RMT*. En el óptimo de Pareto, el consumidor está mejor que en el equilibrio Walrasiano, lo que implica que la asignación del óptimo de Pareto es superior en sentido de Pareto a la asignación de equilibrio. Como puede observarse, en el óptimo de Pareto se produce menos del bien que genera externalidades negativas (bien *x*), y más del otro bien (bien *y*). Por tanto, en el equilibrio Walrasiano se produce una cantidad ineficientemente grande del bien que genera la externalidad negativa.

En el caso de las externalidades positivas, los costes marginales privados del bien *x* no cuantifican los beneficios que el efecto externo provoca sobre el bien *y*. Por consiguiente, el precio relativo del bien *x* sobrevalora los costes sociales:

$$RMS_{x,y}(c_x, c_y) = \frac{p_x}{p_y} = \frac{CMg_x^{priv}(w, q_x)}{CMg_y(w, q_y)} > \frac{CMg_x^{soc}(w, q_x, p_y, L_y)}{CMg_y(w, q_y)} = RMT_{x,y}(q_x, q_y)$$

Esto hace que en el equilibrio Walrasiano se produzca una cantidad de *x* ineficientemente pequeña, tal y como se muestra en el siguiente gráfico:

Externalidad positiva: el coste privado del bien x ($p_x \backslash p_y$) sobrevalora el coste de oportunidad social (RMT): $\frac{p_x}{p_y} > RMT_{x,y}(q_x, q_y)$



En el gráfico anterior se puede observar que en la combinación productiva del equilibrio Walrasiano, los precios relativos del bien x con respecto al bien y, p_x / p_y, solo tienen en cuenta los costes privados, sin contabilizar los beneficios que la producción del bien x produce en el bien y a través de los efectos externos. Por tanto, los costes privados del bien x sobrevaloran el coste de oportunidad del bien x en términos del bien y, esto es, la $RMT_{x,y}(q_x, q_y)$. Esto hace que la pendiente de la recta de balance del consumidor (que es igual a los precios relativos en negativo, $-p_x / p_y$), tenga una pendiente superior, en términos absolutos, a la pendiente de la frontera de posibilidades de producción (la relación marginal de transformación en negativo, $-RMT_{x,y}(q_x, q_y)$), por lo que en el equilibrio Walrasiano no se iguala la *RMS* del consumidor a la *RMT*. En otras palabras, no se da la condición de eficiencia de la combinación productiva, lo que implica que el equilibrio es ineficiente en sentido de Pareto. Esta idea queda clara al comparar el equilibrio Walrasiano con el óptimo de Pareto, donde la *RMS* del consumidor sí es igual a la *RMT*. En el óptimo de Pareto el consumidor está mejor que en el equilibrio Walrasiano, lo que implica que la asignación del óptimo de Pareto es superior en sentido de Pareto a la asignación de equilibrio. Tal y como se desprende del gráfico, en el óptimo de Pareto se produce más del bien que genera externalidades positivas, (bien x), y menos del otro bien (bien y). Por tanto, en el equilibrio Walrasiano se produce una cantidad ineficientemente pequeña del bien que genera la externalidad positiva.

Soluciones al problema de ineficiencia de los efectos externos.

Impuestos Pigouvianos.

Las soluciones al problema de ineficiencia del equilibrio de mercado en presencia de efectos externos suelen consistir en mecanismos que igualan los costes privados a los sociales. Por ejemplo, si la producción del bien x genera externalidades negativas, se puede poner un impuesto por unidad producida al bien x, de manera que su coste privado (que está infravalorado antes del impuesto), aumente y se acerque al coste social. En este caso, el problema de maximización de beneficios sería de la siguiente manera:

$$\max_{q_x, L_x} . \, p_x q_x - \tau q_x - wL_x$$
$$s.a \;\; F_x(L_x) \geq q_x$$

La función Lagrangiana correspondiente al problema de maximización de beneficios es la siguiente:

$$\ell = p_x q_x - \tau q_x - wL_x + \psi\left[F_x(L_x) - q_x\right]$$

Las condiciones de primer orden para solución interior son:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial q_x} &= p_x - \tau - \psi = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial L_x} &= -w + \psi \frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (p_x - \tau)\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x} = w \Leftrightarrow$$

$$p_x = \underbrace{\underbrace{\frac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}}}_{\substack{\text{Coste Marginal} \\ \text{privado antes} \\ \text{de impuestos}}} + \tau}_{\substack{\text{Coste Marginal privado} \\ \text{después de impuestos}}} = CMg_x^{priv,a.i.}(w, q_x) + \tau = CMg_x^{priv,d.i.}(w, q_x, \tau)$$

El precio del bien *x* se iguala al coste marginal después de impuestos $CMg_x^{priv,d.i.}(w, q_x, \tau)$. Éste consiste en el coste marginal de producir una unidad adicional en términos de factores productivos (coste marginal antes de impuestos, $CMg_x^{priv,a.i.}(w, q_x)$), más los impuestos que hay que pagar por una unidad adicional de producción (que es igual al tipo impositivo por unidad producida, τ).

Para ver cómo funciona este impuesto en equilibrio general, vamos a redefinir el equilibrio Walrasiano cuando incluimos este impuesto. Un aspecto a tener en cuenta es que si se recaudan impuestos, dado que estamos en equilibrio general, estos impuestos se tienen que destinar a alguna transferencia o algún gasto, para que se cumpla la restricción presupuestaria del Estado. En este ejemplo, el Estado destina la recaudación de impuestos a una transferencia a la única economía doméstica. En el sistema de ecuaciones que define el equilibrio Walrasiano aparece una ecuación adicional: la restricción presupuestaria del Estado. El gasto de éste, consistente en las transferencias a la economía doméstica, tr, se tiene que igualar a sus ingresos, consistentes en la recaudación del impuesto por unidad producida del bien *x*. Esta recaudación es igual al tipo impositivo por unidad, τ, multiplicado por el número de unidades producidas del bien *x* (la producción del bien *x*, q_x). Por consiguiente, la recaudación de impuestos será igual a $\tau \, q_x$, de manera que la restricción presupuestaria del Estado será de la siguiente forma:

$$\underbrace{tr}_{\substack{\text{Gastos del Estado}\\ \text{(transferencias)}}} = \underbrace{\tau\, q_x}_{\substack{\text{Ingresos del Estado}\\ \text{(recaudación impuestos)}}}$$

Aparte de esta ecuación adicional, en la definición de equilibrio Walrasiano también aparece una variable endógena adicional, que formaría parte de la asignación de equilibrio: la transferencia a la economía doméstica.

Definición 2: Un **equilibrio Walrasiano** es una asignación $(c_x, c_y, q_x, L_x, q_y, L_y, tr)$, llamada **asignación de equilibrio**, y un vector de precios (p_x, p_y, w), llamado **vector de precios de equilibrio**, tal que:

- La única economía doméstica elige aquella cesta de consumo que maximiza su utilidad (demanda de bienes):

$$RMS_{x,y}(c_x, c_y) = \frac{p_x}{p_y} \qquad \text{(EW.1)}$$

$$p_x c_x + p_y c_y = w\bar{L} + \pi_x + \pi_y + tr \qquad \text{(EW.2)}$$

- Las empresas eligen el nivel de producción (oferta de bienes) y la combinación de factores (demanda de factores) que maximizan sus beneficios:

- Empresa del bien *x*:

$$(p_x - \tau)\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x} = w \qquad \text{(EW.3)}$$

$$q_x = F_x(L_x) \qquad \text{(EW.4)}$$

- Empresa del bien *y*:

$$p_y \frac{\partial F_y(L_y, q_x)}{\partial L_y} = w \qquad \text{(EW.5)}$$

$$q_y = F_y(L_y, q_x) \qquad \text{(EW.6)}$$

- Se cumple la restricción presupuestaria del Estado:

$$tr = \tau\, q_x \qquad \text{(EW.7)}$$

- Los mercados de bienes están en equilibrio (demanda = oferta):

- Bien *x*:

$$c_x = q_x \qquad \text{(EW.8)}$$

- Bien *y*:

$$c_y = q_y \qquad \text{(EW.9)}$$

- Los mercados de factores están en equilibrio (demanda = oferta):

- Mercado de trabajo:

$$L_x + L_y = \bar{L} \qquad \text{(EW.10)}$$

Es interesante notar que se sigue cumpliendo la identidad básica de renta igual al valor de la producción:

$$m = w\overline{L} + \pi_x + \pi_y + tr = wL_x + wL_y + \underbrace{p_x q_x - \tau q_x - wL_x}_{\pi_x} + \underbrace{p_y q_y - wL_y}_{\pi_y} + \underbrace{\tau q_x}_{tr} = p_x q_x + p_y q_y$$

Tipo impositivo óptimo: Para que el equilibrio Walrasiano sea eficiente es necesario que los costes privados después de impuestos de la empresa *x* sean iguales a los costes sociales, lo que se consigue para un determinado tipo impositivo al que llamaremos tipo impositivo óptimo, $\tau *$:

$$CMg_x^{priv,d.i.}(w,q_x,\tau^*) = \frac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} + \tau^* = \frac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} + p_y\left(-\frac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial q_x}\right) = CMg_x^{soc}(w,q_x,p_y,L_y)$$

$$\Rightarrow \tau^* = p_y\left(-\frac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial q_x}\right)$$

El tipo impositivo óptimo será igual al valor de la reducción marginal que la empresa *x* genera en la producción de la empresa *y*. Note que si los efectos externos fueran positivos, el tipo impositivo saldría negativo, los que implica que en lugar de un impuesto tendríamos una subvención.

Es fácil comprobar que cuando se pone el tipo impositivo óptimo, los precios relativos se igualan a la *RMT*, de manera que se da la condición de eficiencia de la combinación productiva y, consecuentemente, el equilibrio Walrasiano es eficiente:

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{CMg_x^{priv,d.i}(w,q_x,\tau^*)}{CMg_y(w,q_y)} = \frac{\frac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} + \tau^*}{\frac{w}{\frac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial L_y}}} = \frac{\frac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} + p_y\left(-\frac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial q_x}\right)}{\frac{w}{\frac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial L_y}}} =$$

$$\frac{\frac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}}}{\frac{w}{\frac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial L_y}}} + \frac{p_y\left(-\frac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial q_x}\right)}{p_y} = \frac{\frac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial L_y}}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} - \frac{\partial F_y(L_y,q_x)}{\partial q_x} = RMT_{x,y}(q_x,q_y)$$

Finalmente, hay que destacar que el impuesto óptimo se evalúa para el nivel de producción y de trabajo de *y*, producción de *x* y precio de *y* que corresponde al óptimo de Pareto. Por ejemplo, si ponemos el impuesto en términos de bien *x* entonces:

$$\tau^* = p_y\left(-\frac{\partial F_y\left(\hat{L}_y,\hat{q}_x\right)}{\partial q_x}\right) \Rightarrow \frac{\tau^*}{p_x} = \frac{p_y}{p_x}\left(-\frac{\partial F_y\left(\hat{L}_y,\hat{q}_x\right)}{\partial q_x}\right) = \frac{1}{RMT_{x,y}(\hat{q}_x,\hat{q}_y)}\left(-\frac{\partial F_y\left(\hat{L}_y,\hat{q}_x\right)}{\partial q_x}\right) =$$

$$\frac{\tau^*}{p_x} = -\frac{\dfrac{\partial F_y\left(\hat{L}_y,\hat{q}_x\right)}{\partial q_x}}{\dfrac{\dfrac{\partial F_y(\hat{L}_y,\hat{q}_x)}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial F_x(\hat{L}_x)}{\partial L_x}} - \dfrac{\partial F_y(\hat{L}_y,\hat{q}_x)}{\partial q_x}}$$

donde $\left(\hat{L}_x,\hat{q}_x,\hat{L}_y,\hat{q}_y\right)$ son las asignaciones de trabajo y las producciones de las dos empresas en el óptimo de Pareto.

Otras soluciones a los efectos externos.

Hay otras soluciones propuestas por la literatura para el problema de la ineficiencia que generan los efectos externos. Casi todas las soluciones implican que los costes marginales privados de las empresas generadoras de efectos externos se igualen a los costes marginales sociales:

- **Mercados de efectos externos:** realmente el problema de los efectos externos es un problema de derechos de propiedad. Una empresa incluye dentro de sus costes los pagos a los factores porque los propietarios de los mismos tienen un derecho de propiedad sobre ellos y pueden exigir que la empresa pague por su uso. Sin embargo, si por ejemplo una empresa genera efectos externos negativos, los agentes que sufren esos efectos externos negativos no pueden exigirle a la empresa que pague los costes que generan, de ahí que la empresa no tenga en cuenta estos costes y produzca cantidades ineficientemente altas.

Una solución a este problema sería que existiera un mercado de efectos externos, donde los agentes que los sufren tuvieran derechos de propiedad sobre los mismos, de manera que pudieran exigirle a la empresa el pago de los costes que generan estos efectos. De esta forma, la empresa generadora de externalidades tendría en cuenta los costes de los efectos externos que produce, ya que los tiene que pagar.

Otra solución sería que, en el mercado de efectos externos los derechos de propiedad de los mismos fueran de la empresa que los genera, de manera que quienes los sufren pagaran a la empresa para que ésta los reduzca. Dado que lo relevante en la toma de decisiones de la empresa es el coste de oportunidad, el efecto sobre las decisiones de la empresa, en este caso, sería el mismo que si ella tuviera que pagar los costes. Si, por ejemplo, la empresa aumenta la producción no solo tendría que pagar los factores necesarios para este incremento, sino que, además, dejaría de percibir los pagos por reducir los efectos externos. Esto implica que el coste marginal incluiría el privado (asociado a la contratación de factores) y, además, el coste de oportunidad debido a la disminución del pago por reducir los efectos externos. Como la empresa tendría en cuenta los costes asociados a los efectos externos, no se producirían ineficiencias. Por tanto, si existiera un mercado de efectos externos, daría lo mismo que los derechos de propiedad sobre los mismos los tuvieran los afectados por éste (en cuyo caso la empresa generadora pagaría los costes del efecto externo), que si los derechos de propiedad los tuviera la empresa generadora y los afectados pagaran por reducir los efectos externos. Este resultado se conoce como **Teorema de Coase.**

- **Fusión de empresas:** en el caso de que la producción de una empresa reduzca (aumente) la producción de otra a través de un efecto externo, si esas empresas se fusionan, el efecto de reducción (o incremento) de la producción de una de las empresas sobre la producción de la otra afectaría al beneficio conjunto de ambas, por lo que los costes asociados a los efectos externos se tendrían en cuenta en los costes conjuntos y el efecto externo desaparecería (internalización de los efectos externos).

- **Licencias de Emisión**: se limita la cantidad de efectos externos que se pueden generar a través de licencias. Si la cantidad de licencias para producir efectos externos es igual al nivel óptimo de éstos, se conseguiría la eficiencia paretiana.

- **Regulaciones técnicas**: algunas regulaciones, como la de emisión de humos de los coches (I.T.V.) u ordenanzas municipales sobre ruidos, están destinadas a reducir efectos externos negativos.

- **Civismo y educación**: si la gente se concienciara de hacer cosas como no tirar basura en la calle o en el campo, no poner música excesivamente alta ni producir ruidos innecesarios, no ocupar dos plazas de aparcamiento cuando puede ocupar solo una, etc., se evitarían muchos efectos externos negativos muy molestos.

1.8.2. Los bienes públicos.

Los bienes considerados en el equilibrio Walrasiano son los llamados **bienes privados**, es decir, bienes **excluibles** y **rivales**. Se dice que un bien es excluible si se puede excluir a los individuos del consumo del mismo. Se dice que un bien es rival si el consumo del bien por parte de un individuo impide el consumo de ese mismo bien por parte de otro. Por ejemplo, un cortado en la cafetería de la Facultad es un bien privado porque es excluible: si un individuo no lo paga no se lo sirven; y, además, es un bien rival: si un individuo se toma el cortado no se lo puede tomar otra persona. Sin embargo hay otros bienes que ni son rivales ni son excluibles, a esos bienes se les denomina **bienes públicos**. Por ejemplo, el alumbrado público. Sería muy difícil hacer que las luces de las calles se apagaran cuando pasara una persona que no haya pagado la contribución urbana, esto quiere decir que el alumbrado público es un bien no excluible. Además, el que una persona disfrute del alumbrado público, no impide que otras personas lo disfruten también; por tanto, el alumbrado público es un bien no rival. Una consecuencia de la no rivalidad es que el coste marginal de que una persona adicional disfrute del bien público es cero.

En la siguiente matriz se muestra una clasificación de los bienes según sean rivales y excluibles o no:

	Excluible	**No Excluible**
Rival	Bien privado	Recursos comunes
No Rival		Bien público[9]

Todos los bienes que no son privados, esto es, que o bien no son excluibles o no son rivales, conllevan problemas de ineficiencia paretiana. Los bienes rivales y no excluibles, los llamados recursos comunes, implican externalidades negativas que, como ya hemos visto, traen consigo la ineficiencia del mecanismo de mercado. Si, por ejemplo, hay un banco de peces en un lago y varios pescadores, cuanto más capture uno de ellos, menos capturas harán el resto; es decir, la producción de pescado por una empresa tiene efectos externos negativos sobre la producción de pescado por parte de las otras.

En cuanto a los bienes excluibles y no rivales también implican ineficiencias ya que, además de que tienden a provocar situaciones monopolistas, se puede excluir a una serie de consumidores a los que no costaría nada hacer que disfrutaran de ese bien. Para dar claridad a esta idea, supongamos que una cierta película no se puede descargar de Internet si no se paga su precio, entonces la película solo la pagarían aquellas personas que tuvieran una disposición a pagar superior al precio de la película, y todas las demás personas no podrían verla. Sin embargo, es fácil hacer una mejora de Pareto a este equilibrio: las personas que han pagado el precio lo siguen pagando, pero todas las personas cuya disposición a pagar fuera inferior al precio, descargan gratis la película. De esta forma, la productora de la película seguiría teniendo los mismo ingresos, los consumidores que en el equilibrio pagan la película siguen pagando lo mismo, y las

[9] Algunos autores denominan bien público puro a los bienes que no son ni excluibles ni rivales, y consideran bienes públicos (no puros o mixtos) a los bienes que no son rivales pero si excluibles, o son rivales pero no excluibles.

personas con una disposición a pagar menor que el precio se podrían descargar la película gratis, con lo que estas últimas estarían estrictamente mejor que en el equilibrio, es decir, ha habido una mejora en sentido de Pareto, lo que se traduce en que el equilibrio no es eficiente. El problema es que el coste marginal de que una persona se descargue una película es cero, y para que el equilibrio fuera eficiente se tendría que poner un precio igual al coste marginal; es decir, se tendría que dejar descargar la película gratis, pero esto supondría que nadie querría producir películas. Por tanto, cualquier equilibrio de mercado será ineficiente.

Al igual que se hizo en el análisis de los efectos externos, a continuación se estudia primeramente el problema de los bienes públicos en equilibrio parcial y después el modelo se extiende al equilibrio general.

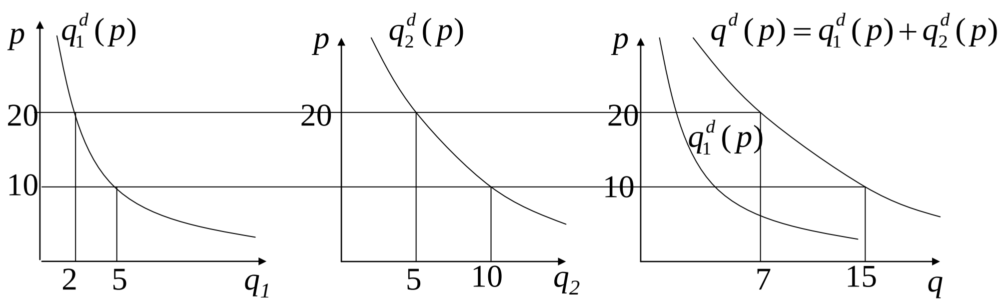
Bienes públicos en equilibrio parcial.

Cuando hay bienes privados, normalmente todos los consumidores pagan el mismo precio, pero la cantidad comprada por cada uno puede ser distinta. Así, la demanda de mercado se calcularía sumando las cantidades demandadas por cada consumidor (que pueden ser distintas entre consumidores) para un determinado precio:

$$q^d(p) = q_1^d(p) + q_2^d(p) + ... + q_n^d(p)$$

Esto quiere decir gráficamente que la demanda de mercado sería la suma horizontal de las demandas individuales:

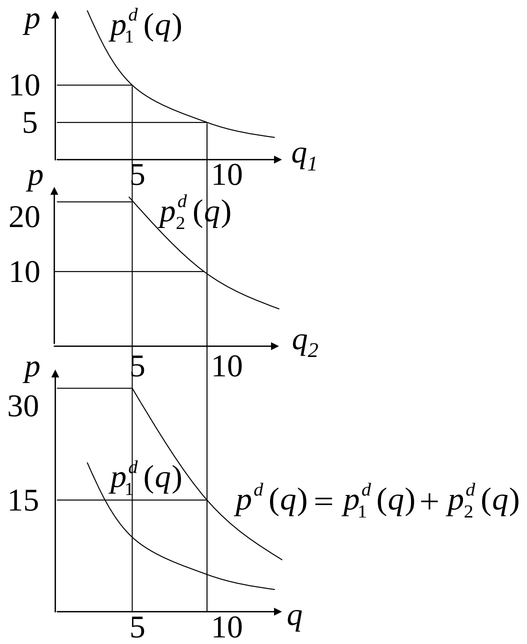
Curva de demanda de mercado de un bien privado =
Suma horizontal de las curvas de demanda individuales.



Sin embargo, cuando hay bienes públicos, dado que dichos bienes son no excluibles, la cantidad de consumo de todos esos bienes es idéntica entre individuos, lo que puede ser distinto es el precio de reserva de cada consumidor. Por esta razón, en este caso, la demanda de mercado se calcularía sumando el precio de reserva de cada individuo (que puede ser distinto entre consumidores) para una determinada cantidad:

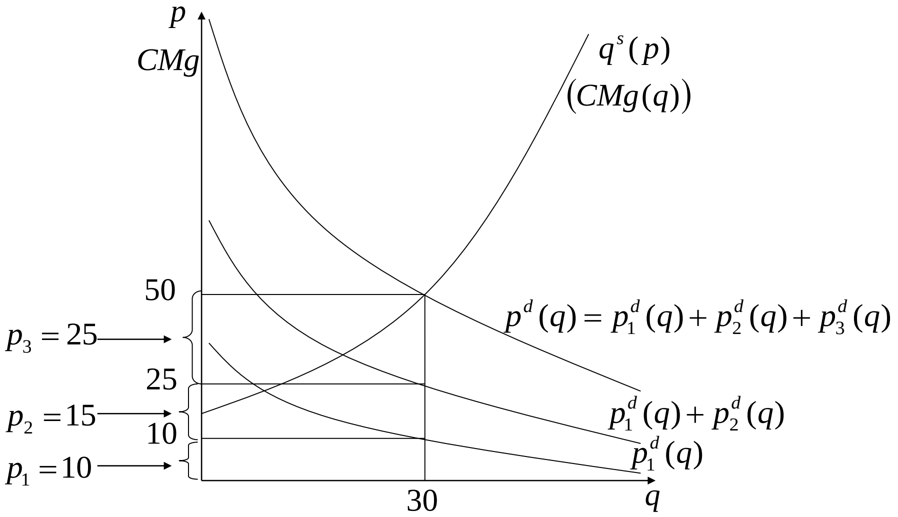
$$p^d(q) = p_1^d(q) + p_2^d(q) + \ldots + p_n^d(q)$$

Curva de demanda de mercado de un bien público = Suma vertical de las curvas de demanda individuales.



La asignación eficiente de un bien público se produce cuando la suma de los precios de reserva de cada consumidor se iguala al coste marginal, es decir, cuando la oferta es igual a la demanda:

Equilibrio de Lindahl: cada consumidor paga su precio de reserva y la oferta se iguala a la demanda.



Para llegar al punto eficiente, cada consumidor tendría que pagar (por unidad) el precio de reserva de la cantidad de bien público producido. Esto es lo que se denomina equilibrio de Lindahl. En el ejemplo del gráfico superior, el consumidor 1 pagaría un precio por unidad de 10 u.m. (lo que implica un pago total en el bien público de 10×30

=300 u.m.), el consumidor 2, pagaría por unidad 15 u.m. (en total, 15×30 =450 u.m.), y el consumidor 3, pagaría 25 u.m por unidad (25×30 =750 u.m. en total).

Ahora bien, en la práctica este equilibrio es muy difícil de implementar, porque no se conocen los precios de reserva de los distintos consumidores. Si se le preguntara a cada uno de ellos, los individuos tendrían incentivos a declarar un precio de reserva menor que el verdadero, ya que cuanto menor es el precio de reserva que se declara, menor sería la cantidad a pagar.

Dadas las dificultades evidentes que tiene el equilibrio de Lindahl para implementarse en la práctica, lo que suele suceder es que el Estado se hace cargo de proveer el bien público y éste se financia con impuestos.

Bienes públicos en equilibrio general.

En esta sección retomamos el modelo de un solo factor, L, una empresa por sector (la empresa *x* es la que produce el bien *x* y la empresa *y* es la que produce el bien *y*) y dos bienes (*x* e *y*), pero en este caso existen dos consumidores. Además, el bien *x* va a ser un bien público, lo que significa que su consumo por parte de los dos consumidores es idéntico, mientras que el bien *y* es un bien privado. Así, la utilidad de cada uno de ellos viene dada por $u^1\left(c_x, c_y^1\right)$ para el consumidor 1 y $u^2\left(c_x, c_y^2\right)$ para el consumidor 2, siendo c_y^1 la cantidad de bien *y* (bien privado) consumida por la economía doméstica 1, c_y^2 la cantidad de bien *y* consumida por la economía doméstica 2 y c_x la cantidad de bien público *x* consumida por las dos economía domésticas. Note que dada la no exclusión del bien público *x*, el consumo de dicho bien es idéntico para los dos consumidores y, por eso, no se le ha puesto ningún superíndice que indique si el consumo de este bien se refiere al consumidor 1 o al 2. Sin embargo, el consumo del bien privado *y* sí requiere de superíndice, ya que el consumo de dicho bien puede ser diferente según el consumidor.

Las restricciones de factibilidad de esta economía serían las siguientes:

- Se consume menos o igual que lo que se produce: $c_x \leq q_x$; $c_y^1 + c_y^2 \leq q_y$.
- Cada empresa produce de acuerdo con su tecnología: $q_x \leq F_x\left(L_x\right)$; $q_y \leq F_y\left(L_y\right)$.
- No se usan más factores que los existentes en la economía: $L_x + L_y \leq \overline{L}$.

Es interesante observar que en la primera restricción (se consume menos o igual que lo que se produce), para el bien público no se ha puesto la suma de consumos de los dos consumidores, ya que siendo *x* un bien público, este consumo es el mismo para los dos consumidores. Además, dada la no rivalidad de los bienes públicos, el número de consumidores que disfrutan del bien público no afecta para nada a su coste.

Óptimo de Pareto: El problema del óptimo de Pareto sería el siguiente:

$$\begin{array}{lcll}
\max\limits_{c_x,c_y^1,c_y^2,q_x,L_x,q_y,L_y} u^1(c_x,c_y^1) & & \max\limits_{c_x,c_y^1,c_y^2,L_x,L_y} u^1(c_x,c_y^1) & \\
\text{s.a}: u^2(c_x,c_y^2)\geq \hat{u}^2 & & \text{s.a}: u^2(c_x,c_y^2)\geq \hat{u}^2 & \\
c_x \leq q_x & & c_x \leq F_x(L_x) & \\
c_y^1 + c_y^2 \leq q_y & \Leftrightarrow & c_y^1 + c_y^2 \leq F_y(L_y) & \text{(OP)} \\
q_x \leq F_x(L_x) & & L_x + L_y \leq \overline{L} & \\
q_y \leq F_y(L_y) & & & \\
L_x + L_y \leq \overline{L} & & &
\end{array}$$

teniendo en cuenta que en el segundo problema de maximización se ha hecho el cambio de variable $q_x = F_x(L_x)$ y $q_y = F_y(L_y)$. El Lagrangiano correspondiente sería:

$$\ell = u^1(c_x,c_y^1) + \lambda^2\left[u^2(c_x,c_y^2) - \hat{u}^2\right] + \wp_x\left[F_x(L_x) - c_x\right] + \wp_y\left[F_y(L_y) - c_y^1 - c_y^2\right]$$
$$+\omega\left[\overline{L} - L_x - L_y\right]$$

donde $\lambda^2, \wp_x, \wp_y, \omega$ son los multiplicadores de Lagrange. Las condiciones de primer orden para solución interior son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \ell}{\partial c_x} = \dfrac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_x} + \lambda^2 \dfrac{\partial u^2(c_x,c_y^2)}{\partial c_x} - \wp_x = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial \ell}{\partial c_y^1} = \dfrac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_y^1} - \wp_y = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial \ell}{\partial c_y^2} = \lambda^2 \dfrac{\partial u^2(c_x,c_y^2)}{\partial c_y^2} - \wp_y = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = \dfrac{\wp_y}{\dfrac{\partial u^2(c_x,c_y^2)}{\partial c_y^2}}
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_x} = -\wp_y \dfrac{\dfrac{\partial u^2(c_x,c_y^2)}{\partial c_x}}{\dfrac{\partial u^2(c_x,c_y^2)}{\partial c_y^2}} + \wp_x \\[4ex]
\dfrac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_y^1} = \wp_y
\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\dfrac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_x}}{\dfrac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_y^1}} = -\dfrac{\dfrac{\partial u^2(c_x,c_y^2)}{\partial c_x}}{\dfrac{\partial u^2(c_x,c_y^2)}{\partial c_y^2}} + \dfrac{\wp_x}{\wp_y} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\dfrac{\dfrac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_x}}{\dfrac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_y^1}}}_{RMS^1_{x,y}(c_x,c_y^1)} + \underbrace{\dfrac{\dfrac{\partial u^2(c_x,c_y^2)}{\partial c_x}}{\dfrac{\partial u^2(c_x,c_y^2)}{\partial c_y^2}}}_{RMS^2_{x,y}(c_x,c_y^2)} = \dfrac{\wp_x}{\wp_y} \Leftrightarrow$$

$$RMS^1_{x,y}(c_x,c^1_y)+RMS^2_{x,y}(c_x,c^2_y)=\frac{\wp_x}{\wp_y} \tag{OP.1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial \ell}{\partial L_x}=\wp_x\dfrac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}-\omega=0\Rightarrow \wp_x\dfrac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}=\omega\Leftrightarrow \wp_x=\dfrac{\omega}{\dfrac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}}\\ \dfrac{\partial \ell}{\partial L_y}=\wp_y\dfrac{\partial F_y(L_y)}{\partial L_y}-\omega=0\Rightarrow \wp_y\dfrac{\partial F_y(L_y)}{\partial L_y}=\omega\Leftrightarrow \wp_y=\dfrac{\omega}{\dfrac{\partial F_y(L_y)}{\partial L_y}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{\wp_x}{\wp_y}=\frac{\dfrac{\omega}{\dfrac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}}}{\dfrac{\omega}{\dfrac{\partial F_y(L_y)}{\partial L_y}}}=\frac{\dfrac{\partial F_y(L_y)}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}}=RMT_{x,y}(q_x,q_y)\Rightarrow$$

$$RMT_{x,y}(q_x,q_y)=\frac{\wp_x}{\wp_y} \tag{OP.2}$$

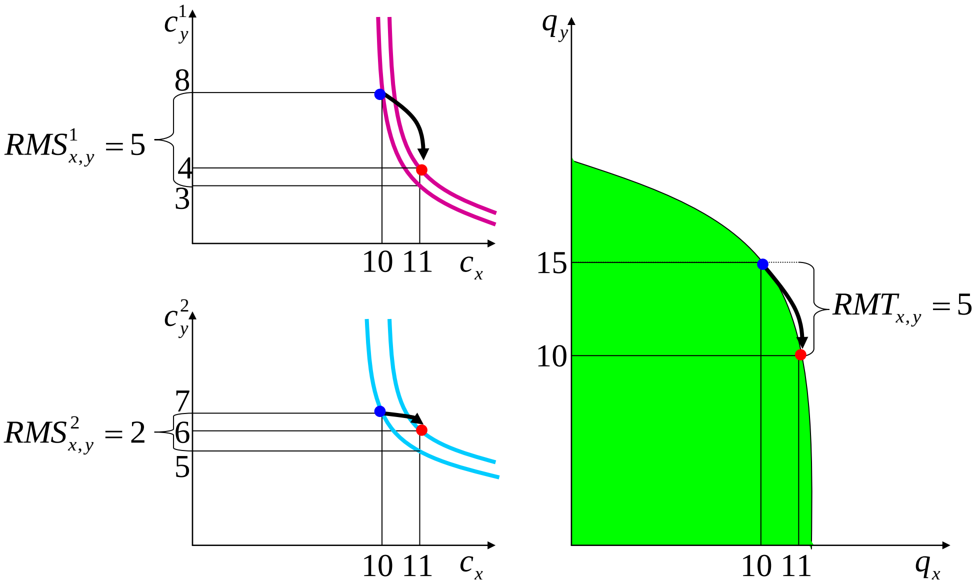
Usando las condiciones (OP.1) y (OP.2) obtenemos:

$$RMS^1_{x,y}(c_x,c^1_y)+RMS^2_{x,y}(c_x,c^2_y)=RMT_{x,y}(q_x,q_y)$$

Cuando el bien x es un bien público, la condición de eficiencia de la combinación productiva no es que la *RMS* de cada consumidor se iguale a la *RMT*, sino que la suma de las *RMSs* de los consumidores se iguale a la *RMT*.

Para entender esta condición, a continuación aparece un ejemplo numérico (ver gráfico):

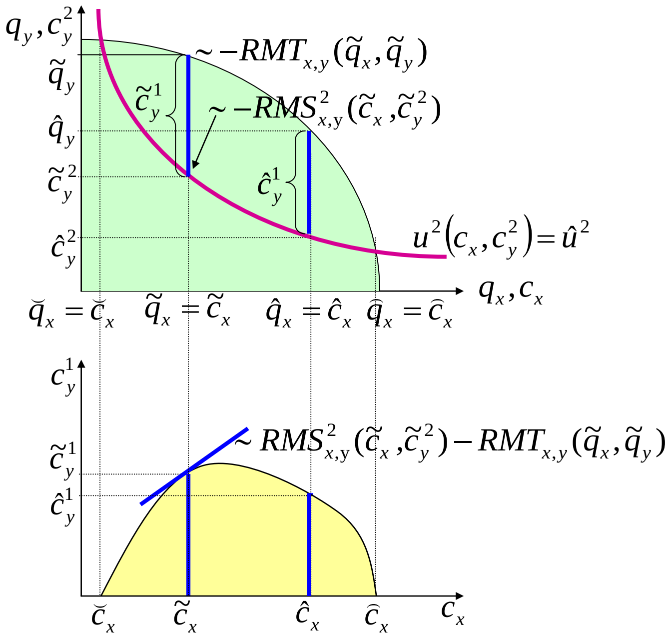
Mejora Paretiana cuando $RMS^1_{x,y}(c_x, c^1_y) + RMS^2_{x,y}(c_x, c^2_y) > RMT_{x,y}(q_x, q_y)$



En el gráfico anterior puede observarse que en el punto inicial la cesta de consumo de la economía doméstica 1 es (10,8), la del consumidor 2 es (10,7) y la combinación productiva de esta economía es (10,15). Tal y como muestra el gráfico, el consumo del bien público, *x*, es igual para los dos consumidores y, además, es igual a la producción de este bien. Sin embargo, el consumo del bien privado, *y*, puede ser distinto entre economías domésticas (en este ejemplo es 8 para el consumidor 1 y 7 para el consumidor 2), y la producción es la suma de los consumos de las dos economías domésticas (en el ejemplo, 8+7=15). La *RMS* del consumidor 1 (igual a 5) más la *RMS* del consumidor 2 (igual a 2), es 7. Esta suma de *RMSs* de los dos consumidores es mayor que la *RMT* de la economía, que es 5. Entonces, siempre se puede hacer una mejora en sentido de Pareto aumentando la producción del bien público *x* en una unidad y reduciendo la producción del bien privado en la *RMT*, y quitándole a cada consumidor una cantidad de bien privado menor o igual que su *RMS*, tal que la suma sea igual a la *RMT*, siendo la reducción de al menos un individuo estrictamente menor que su *RMS*. De esta manera, al menos un individuo saldría ganando (aquel que ve reducido su consumo de bien privado en una cantidad menor que su *RMS*), y el otro individuo estaría igual (aquel que ve reducido su consumo de bien privado exactamente en la cuantía de su *RMS*), consiguiéndose, así, una mejora en sentido de Pareto. En nuestro ejemplo, para aumentar la producción del bien público en una unidad se tiene que reducir la producción del bien privado en 5 unidades (la *RMT*). Esta pérdida de 5 unidades de bien privado se puede repartir de manera que se le quite a cada economía doméstica una cantidad de bien privado menor que su *RMS*: al individuo 1 se le quitan 4 unidades (cantidad menor que su *RMS*, que es igual a 5), y al individuo 2 se le quita 1 unidad (cantidad menor que su *RMS*, que es igual a 2). Dado que el bien *x* es un bien público, el incremento en una unidad de la producción del bien *x* implica que cada consumidor disfruta de una unidad adicional de dicho bien. Además, a cada consumidor se le está quitando una cantidad de bien privado, *y*, menor de la que estaría dispuesto a sacrificar por una unidad adicional de bien *x* (su *RMS*), por lo que ambos consumidores salen ganando. Al consumidor 1 se le está quitando 4 unidades del bien *y*, en vez de 5 (su *RMS*), que es la cantidad que le dejaría indiferente, y al consumidor 2 se le está quitando una unidad de bien *y* en vez de 2 (su *RMS*), que es la cantidad que le dejaría indiferente. Por tanto, los dos consumidores están estrictamente mejor, es decir, hay una mejora en sentido de Pareto. De esta manera, llegamos a la conclusión de que el punto inicial, donde la suma de las *RMSs* de los consumidores era mayor que la *RMT*, era ineficiente en sentido de Pareto.

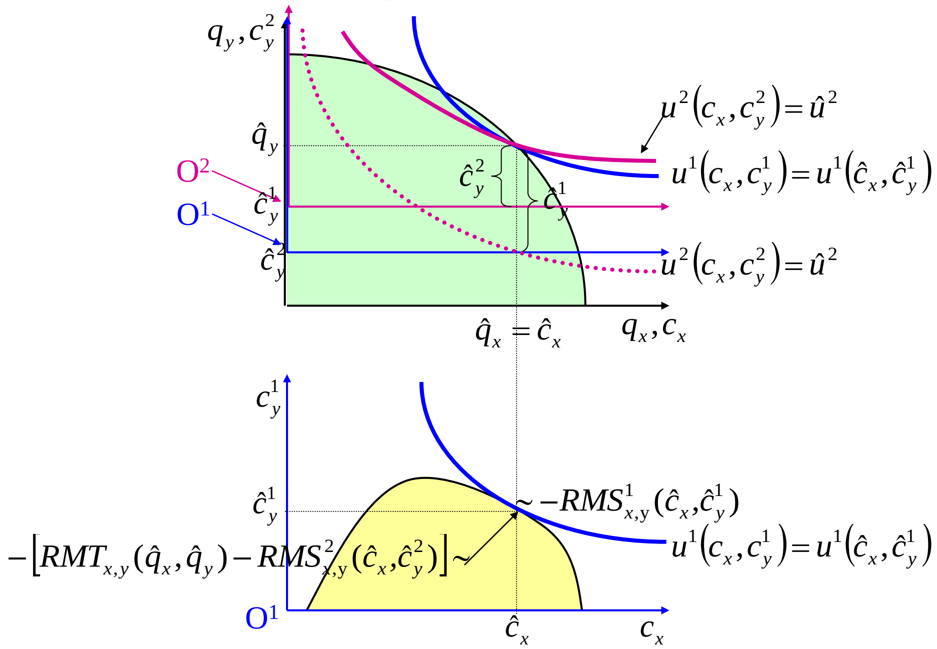
Hay que destacar que en este ejemplo no se podría hacer una mejora en sentido de Pareto si se pretendiera que los dos consumidores redujeran su consumo de bien privado en la misma cuantía, es decir, si los dos consumidores pagaran el mismo precio por la unidad adicional del bien público. Si se intenta conseguir una mejora en sentido de Pareto, lo máximo que se le puede pedir al consumidor 2 por la unidad adicional de bien público es su *RMS*, 2, ya que si se le pidiera una cantidad mayor, estaría peor que en la situación inicial y no sería una mejora paretiana. Pero si se le pidiera el mismo "precio" al consumidor 1, una reducción de su consumo privado en 2 unidades, sería insuficiente, ya que 2+2 es inferior a la *RMT*, que es igual a 5, por lo que no sería factible que los dos consumidores redujeran su consumo de bien privado en 2 unidades cada uno para que se incrementara en una unidad la producción de bien público. Como veremos, este es uno de los problemas de los bienes públicos: para alcanzar una solución eficiente suele ser necesario que los consumidores paguen distintos precios dependiendo de su disposición a pagar (sus *RMSs*).

Conjunto de posibilidades de consumo de 1 dada la utilidad de 2



Otra manera de interpretar gráficamente la condición de eficiencia de que la suma de las *RMSs* de los consumidores tiene que ser igual a la *RMT* es centrándonos en el conjunto de posibilidades de elección del problema de maximización del óptimo de Pareto (OP). En el problema de optimización OP se maximiza la utilidad del consumidor 1, sujeto a las restricciones de factibilidad y a que la utilidad del consumidor 2 sea mayor que un cierto nivel $\hat{u}^2$. Gráficamente, una asignación de consumo es factible si la cantidad de bien público x que consumen las dos economías domésticas está en el conjunto de posibilidades de producción, y la suma de los consumos de bien privado de cada consumidor es menor o igual que la producción de bien privado de la *FPP* correspondiente a ese nivel de bien público. Las cestas de consumo donde el consumidor 2 tiene una utilidad mayor que el nivel fijado $\hat{u}^2$ son aquellas que están por encima de la curva de indiferencia del consumidor 2 para ese nivel de utilidad. Por tanto, si en el gráfico del conjunto de posibilidades de producción se representa la curva de indiferencia del consumidor 2 para el nivel de utilidad del problema OP, dada la producción de bien público x, la cantidad máxima de consumo que puede realizar el consumidor 1 del bien privado y es la diferencia entre la producción de bien privado y en la *FPP* y el consumo del bien y de la curva de indiferencia del agente 2 para ese nivel de bien público. Esto significa, gráficamente, que la distancia vertical entre la curva de indiferencia del consumidor 2 para el nivel de utilidad $\hat{u}^2$ y la *FPP* es la máxima cantidad de bien privado de la que puede disfrutar el agente 1 para que se cumplan las restricciones del problema OP. Si las distancias verticales entre la curva de indiferencia del consumidor 2 y la *FPP* se trasladan al espacio de consumo del consumidor 1, como se ve en el gráfico anterior, se obtiene la frontera y el conjunto de posibilidades de consumo de la economía doméstica 1 para el nivel de utilidad de la economía doméstica 2 igual a $\hat{u}^2$ (que es el conjunto donde se maximiza la utilidad del agente 1 en el problema OP). Dado que la frontera del conjunto de posibilidades de consumo del agente 1 es la diferencia entre la frontera de posibilidades de producción y la curva de indiferencia del consumidor 2, la pendiente de la frontera del conjunto de posibilidades de consumo del agente 1 es igual a la diferencia entre la pendiente de la frontera de posibilidades de producción (es decir, la *RMT* en negativo), y la pendiente de la curva de indiferencia del agente 2 (la *RMS* de dicho agente en negativo).

Óptimo de Pareto



El óptimo de Pareto se obtiene cuando se maximiza la utilidad del consumidor 1 en el conjunto de posibilidades de consumo de este agente, y esto se consigue, como vemos en la parte inferior del gráfico anterior, cuando la curva de indiferencia del consumidor 1 es tangente a su frontera de posibilidades de consumo, es decir, cuando la pendiente de la frontera de posibilidades de consumo, $-\left[RMT_{x,y}(\hat{q}_x,\hat{q}_y) - RMS^2_{x,y}(\hat{c}_x,\hat{c}^2_y)\right]$, y la pendiente de la curva de indiferencia del consumidor 1, $-RMS^1_{x,y}(\hat{c}_x,\hat{c}^1_y)$, se igualan. De esta manera, se obtiene la condición de eficiencia de la combinación productiva para los bienes públicos:

$$RMT_{x,y}(\hat{q}_x,\hat{q}_y) - RMS^2_{x,y}(\hat{c}_x,\hat{c}^2_y) = RMS^1_{x,y}(\hat{c}_x,\hat{c}^1_y) \Leftrightarrow$$

$$RMT_{x,y}(\hat{q}_x,\hat{q}_y) = RMS^1_{x,y}(\hat{c}_x,\hat{c}^1_y) + RMS^2_{x,y}(\hat{c}_x,\hat{c}^2_y)$$

En la parte superior del gráfico anterior se representa el conjunto de posibilidades de producción. Si en el punto $(0,\hat{c}^2_y)$ ponemos el origen del espacio de consumo del agente 1, la distancia horizontal entre ese origen y la producción de bien *x*, es igual a dicha producción, $\hat{q}_x$, que a su vez es igual al consumo de bien público por parte de los dos agentes, $\hat{c}_x$; mientras que la distancia vertical entre el origen y la producción del bien *y* es igual a la producción del bien *y* menos el consumo de bien *y* por parte del consumidor 2, $\hat{q}_y - \hat{c}^2_y$, que es igual al consumo del bien *y* por parte del consumidor 1. Resumiendo, si ponemos el origen del espacio de consumo de la economía doméstica 1 en el punto $(0,\hat{c}^2_y)$, la cesta de consumo de dicho agente coincidiría con la combinación productiva en la *FPP*, por lo que podemos trazar la curva de indiferencia de este consumidor en el óptimo de Pareto en dicho punto. Si ponemos el origen del espacio de consumo del consumidor 2 en el punto $(0,\hat{c}^1_y)$ ocurre lo mismo: la cesta de consumo del consumidor 2 en el óptimo de Pareto coincidiría con la combinación productiva en la *FPP*. Vemos que, a diferencia de lo que ocurre con los bienes privados, cuando *x* es un bien público, las *RMSs* de los consumidores no se tienen que igualar entre sí, ni tampoco con la *RMT*. De hecho, la *RMS* de cada consumidor es inferior a la *RMT*, ya que esa es la única forma de que la suma de las *RMSs* de todos los consumidores pueda ser igual a la *RMT*.

Equilibrio pseudo-Walrasiano.

¿Cómo sería el equilibrio Walrasiano en el caso de los bienes públicos? Para definir el equilibrio hay que tener en cuenta que si un consumidor compra una determinada cantidad de bien público, no va a consumir esa cantidad que compra, sino la suma de lo que compran todos los individuos del mercado. Por ejemplo, si dos vecinos de una calle deciden comprar farolas para el alumbrado público de su calle, de manera que uno compra 2 farolas y el otro 3, lo que va a consumir el primer consumidor no va a ser las 2 farolas que compra, sino 5 farolas (2+3). De la misma manera, el otro consumidor tampoco va a consumir las 3 farolas que compra, sino las 5 farolas que habrá en la calle. Esto implica que el consumidor no decide lo que compra simplemente sabiendo su renta y los precios de mercado, sino que debe tener en cuenta lo que compran los demás consumidores del bien público. Debido a esto, el consumidor ya no es un agente competitivo, sino que se comporta de manera estratégica: tiene en cuenta las estrategias de los demás consumidores (la cantidad de bien público que compra cada uno de ellos) para tomar su decisión maximizando su función objetivo (la utilidad). Por esta razón, el equilibrio se va a parecer más a un equilibrio de Nash que a un equilibrio Walrasiano. Para definir el equilibrio, vamos a denominar "*z*" a la cantidad que compra cada consumidor del bien público. Así, z_x^1 sería la cantidad de bien público *x* que compra el consumidor 1 y z_x^2 sería la cantidad de bien público *x* que compra el consumidor 2.

Definición 1: Un **equilibrio pseudo-Walrasiano** es una asignación $(c_x, z_x^1, c_y^1, z_x^2, c_y^2, q_x, L_x, q_y, L_y)$, llamada **asignación de equilibrio**, y un vector de precios (p_x, p_y, w), llamado **vector de precios de equilibrio**, tal que:

- Las economías domésticas eligen la cantidad de bien privado y bien público que compran para que se maximice su utilidad (demanda de bienes):

- Consumidor 1:

$$(c_x, z_x^1, c_y^1) \in \arg\max_{c_x, z_x^1, c_y^1} \quad u^1(c_x, c_y^1)$$

$$s.a \qquad p_x z_x^1 + p_y c_y^1 \leq wN^1 + \theta_x^1 \pi_x + \theta_y^1 \pi_y$$

$$c_x \leq z_x^1 + z_x^2$$

- Consumidor 2:

$$(c_x, z_x^2, c_y^2) \in \arg\max_{c_x, z_x^2, c_y^2} \quad u^2(c_x, c_y^2)$$

$$s.a \qquad p_x z_x^2 + p_y c_y^2 \leq wN^2 + \theta_x^2 \pi_x + \theta_y^2 \pi_y$$

$$c_x \leq z_x^1 + z_x^2$$

- Las empresas eligen el nivel de producción (oferta de bienes) y la combinación de factores (demanda de factores) que maximizan sus beneficios:

- Empresa del bien *x*:

$$(q_x, L_x) \in \arg\max_{q_x, L_x} p_x q_x - wL_x$$

$$s.a \ F_x(L_x) \geq q_x$$

- Empresa del bien *y*:

$$(q_y, L_y) \in \arg\max_{q_y, L_y} p_y q_y - wL_y$$

$$s.a \ F_y(L_y) \geq q_y$$

- Los mercados de bienes están en equilibrio (demanda = oferta):

- Bien *x*:

$$z_x^1 + z_x^2 = q_x$$

- Bien *y*:

$$c_y^1 + c_y^2 = q_y$$

- Los mercados de factores están en equilibrio (demanda = oferta):

- Mercado de trabajo:

$$L_x + L_y = \overline{L}$$

Este equilibrio se puede interpretar de dos maneras: cada agente compra la cantidad de bien público que quiere, z_x^1 por parte del consumidor 1 (z_x^2 por parte del consumidor

2); o que cada agente paga una cierta cantidad $p_x z_x^1$ por parte del consumidor 1 ($p_x z_x^2$ por parte del consumidor 2) para financiar el bien público. En el ejemplo de los vecinos que quieren poner alumbrado público en su calle, el equilibrio se pude interpretar como que cada uno de los vecinos compra un cierto número de farolas, o que cada vecino paga una "suscripción voluntaria" y con las suscripciones voluntarias de todos los vecinos se financia el alumbrado público. Por esta razón, algunos autores denominan a este tipo de equilibrio "equilibrio de suscripción voluntaria".

Para entender mejor el equilibrio se puede analizar el problema de maximización de la utilidad del consumidor considerando la renta como exógena:

$$(c_x, z_x^1, c_y^1) \in \arg\max_{c_x, z_x^1, c_y^1} \quad u^1(c_x, c_y^1)$$

$$\begin{aligned} s.a \qquad & p_x z_x^1 + p_y c_y^1 \leq m^1 \\ & c_x = z_x^1 + z_x^2 \\ & z_x^1 \geq 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo la restricción $c_x = z_x^1 + z_x^2 \Leftrightarrow z_x^1 = c_x - z_x^2$ en el problema de optimización anterior, se tiene que:

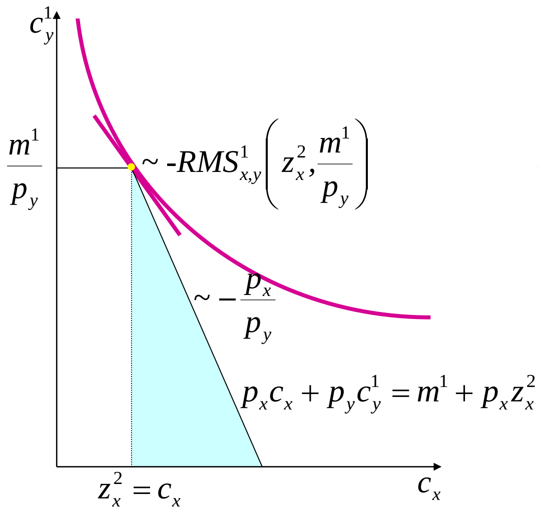
$$(c_x, c_y^1) \in \arg\max_{c_x, c_y^1} \quad u^1(c_x, c_y^1)$$

$$\begin{aligned} s.a \qquad & p_x\left(c_x - z_x^2\right) + p_y c_y^1 \leq m^1 \\ & c_x - z_x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

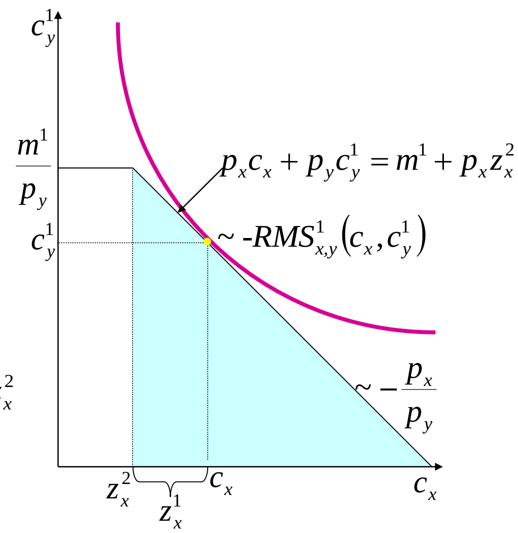
La restricción presupuestaria correspondiente a este problema de optimización se puede ver en un gráfico más abajo. El consumidor tiene dos opciones:

- No comprar bien público, es decir, ser un ***free rider***: disfrutar del bien público sin contribuir a su financiación. En este caso, la compra de bien público por parte de este consumidor es cero, $z_x^1 = 0$, con lo que éste disfrutaría de la cesta de consumo $\left(z_x^2, \dfrac{m^1}{p_y}\right)$.
- Comprar bien público y contribuir a su financiación. En este caso, la compra de bien público es positiva, lo que implica que la cantidad de bien público disfrutada por el agente es mayor que la comprada por el otro agente, z_x^2. Por tanto se situará en un punto de la recta balance a la derecha de $\left(z_x^2, \dfrac{m^1}{p_y}\right)$.

Solución esquina: el consumidor 1 no compra bien público, es un "***free rider***".



Solución interior: el consumidor 1 compra bien público: contribuye a la financiación del mismo.



El Lagrangiano correspondiente al problema del consumidor sería el siguiente:

$$\ell = u^1(c_x,c_y^1) + \lambda\left[m^1 - p_x\left(c_x - z_x^2\right) - p_y c_y^1\right] + \mu\left[c_x - z_x^2\right]$$

Este problema podría tener dos tipos de soluciones:

- Solución interior: cuando el individuo compra una cantidad de bien público positiva, $c_x - z_x^2 > 0$, en cuyo caso el multiplicador de Lagrange asociado a la segunda restricción es cero, $\mu = 0$. En este caso, las condiciones de primer orden serían:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial c_x} &= \frac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_x} - \lambda p_x = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial c_y^1} &= \frac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_y^1} - \lambda p_y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow RMS^1_{x,y}(c_x,c_y^1) = \frac{\dfrac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_x}}{\dfrac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_y^1}} = \frac{p_x}{p_y}$$

Es decir, la *RMS* se iguala a los precios relativos, tal y como aparece representado en la parte derecha del gráfico anterior.

- Solución esquina: cuando el individuo no compra ninguna cantidad de bien público (es un *free rider*), $c_x - z_x^2 = 0$. En este caso el multiplicador de Lagrange asociado a la segunda restricción sería positiva, $\mu \geq 0$, y las condiciones de primer orden serían las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \ell}{\partial c_x} = \dfrac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_x} - \lambda p_x + \mu = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_x} = \lambda p_x - \mu \leq \lambda p_x \\ \dfrac{\partial \ell}{\partial c_y^1} = \dfrac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_y^1} - \lambda p_y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$RMS_{x,y}^1(c_x,c_y^1) = \frac{\dfrac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_x}}{\dfrac{\partial u^1(c_x,c_y^1)}{\partial c_y^1}} \leq \frac{p_x}{p_y}$$

Sustituyendo la ecuación $c_x - z_x^2 = 0$ en la restricción presupuestaria y, a su vez, ésta en la anterior condición de primer orden, se tiene que:

$$RMS_{x,y}^1\left(z_x^2, \frac{m^1}{p_y}\right) \leq \frac{p_x}{p_y}$$

Por tanto, si el precio relativo del bien público en términos del bien privado es suficientemente alto (mayor que $RMS_{x,y}^1\left(z_x^2, \frac{m^1}{p_y}\right)$), el individuo decidirá ser un *free rider*, es decir, disfrutar del bien público sin contribuir a su financiación (ya que su compra del bien público será igual a cero). Esta situación está representada en la parte izquierda del gráfico anterior.

La existencia de *free riders* no es el único problema de este equilibrio. Incluso, si no los hubiera, es decir, si todos los consumidores tuvieran una solución interior, el equilibrio no sería eficiente. Para verlo, definamos las ecuaciones del equilibrio suponiendo que no existen *free riders*.

Definición 2: En el caso de que todos los consumidores tengan soluciones interiores (no haya *free riders*) un **equilibrio pseudo-Walrasiano** es una asignación $(c_x, z_x^1, c_y^1, z_x^2, c_y^2, q_x, L_x, q_y, L_y)$, llamada **asignación de equilibrio**, y un vector de precios (p_x, p_y, w), llamado **vector de precios de equilibrio**, tal que:

- Las economías doméstica eligen la cantidad de bien privado y bien público que compran para que se maximice su utilidad (demanda de bienes):

  - Consumidor 1:

$$RMS_{x,y}^1(c_x,c_y^1) = \frac{p_x}{p_y} \qquad \text{(EW.1)}$$

$$p_x z_x^1 + p_y c_y^1 = wN^1 + \theta_x^1 \pi_x + \theta_y^1 \pi_y \qquad \text{(EW.2)}$$

  - Consumidor 2:

$$RMS_{x,y}^2(c_x,c_y^2) = \frac{p_x}{p_y} \qquad \text{(EW.3)}$$

$$p_x z_x^2 + p_y c_y^2 = wN^2 + \theta_x^2 \pi_x + \theta_y^2 \pi_y \qquad \text{(EW.4)}$$

- La cantidad de bien público consumida por los dos consumidores es igual a la suma de la cantidades comprada por cada uno:

$$c_x = z_x^1 + z_x^2 \qquad \text{(EW.5)}$$

- Las empresas eligen el nivel de producción (oferta de bienes) y la combinación de factores (demanda de factores) que maximizan sus beneficios:

- Empresa del bien *x*:

$$p_x \frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x} = w \qquad \text{(EW.6)}$$

$$q_x = F_x(L_x) \qquad \text{(EW.7)}$$

- Empresa del bien *y*:

$$p_y \frac{\partial F_y(L_y)}{\partial L_y} = w \qquad \text{(EW.8)}$$

$$q_y = F_y(L_y) \qquad \text{(EW.9)}$$

- Los mercados de bienes están en equilibrio (demanda = oferta):

- Bien *x*:

$$z_x^1 + z_x^2 = q_x \qquad \text{(EW.10)}$$

- Bien *y*:

$$c_y^1 + c_y^2 = q_y \qquad \text{(EW.11)}$$

- Los mercados de factores están en equilibrio (demanda = oferta):

- Mercado de trabajo:

$$L_x + L_y = \overline{L} \qquad \text{(EW.12)}$$

Usando las condiciones de primer orden de las empresas (EW.6) y (EW.8) llegamos a la conclusión, ya conocida, de que los precios relativos del equilibrio Walrasiano son iguales a la *RMT*:

$$\left.\begin{aligned} p_x \frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x} = w \Leftrightarrow p_x = \frac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} = CMg_x(w, q_x) \\ p_y \frac{\partial F_y(L_y)}{\partial L_y} = w \Leftrightarrow p_y = \frac{w}{\frac{\partial F_y(L_y)}{\partial L_y}} = CMg_y(w, q_y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{CMg_x(w, q_x)}{CMg_y(w, q_y)} = \frac{\dfrac{w}{\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}}}{\dfrac{w}{\frac{\partial F_y(L_y)}{\partial L_y}}} = \frac{\dfrac{\partial F_y(L_y)}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x}} = RMT_{x,y}(q_x, q_y)$$

Como los precios relativos son iguales a las *RMSs* de los consumidores (ver ecuaciones EW.1 y EW.3), éstas se igualan a la *RMT*:

$$RMS^1_{x,y}\left(c_x,c^1_y\right)=RMS^2_{x,y}\left(c_x,c^2_y\right)=\frac{p_x}{p_y}=RMT_{x,y}\left(q_x,q_y\right)$$

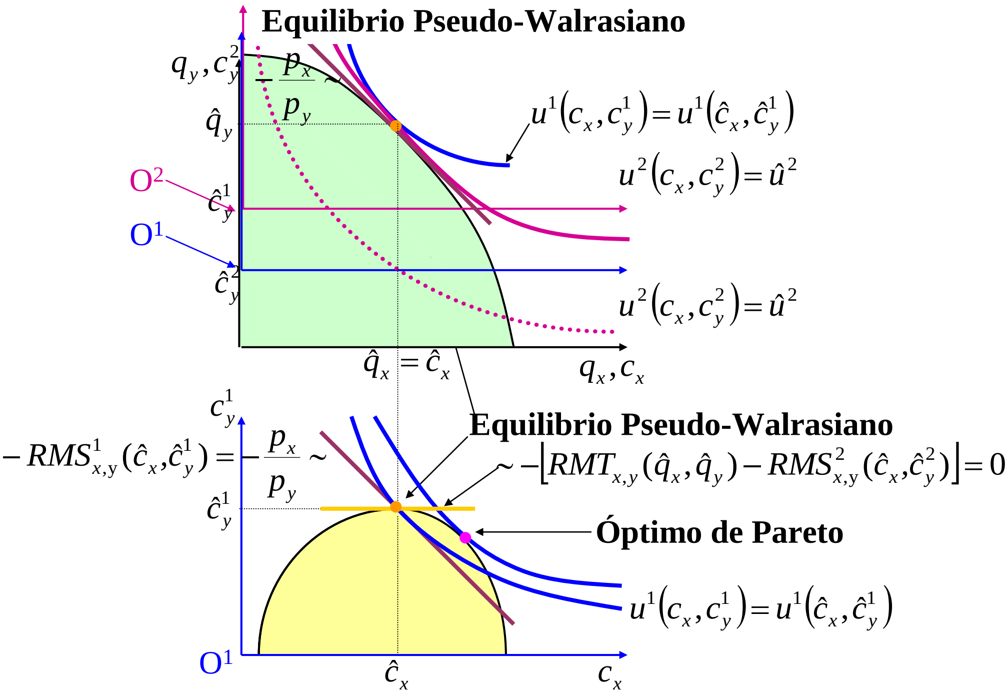
Pero cuando hay bienes públicos, esta ecuación implica que la asignación de equilibrio no es eficiente, ya que la suma de las *RMSs* de los consumidores no se igualaría a la *RMT*:

$$RMS^1_{x,y}\left(c_x,c^1_y\right)+RMS^2_{x,y}\left(c_x,c^2_y\right)=\frac{p_x}{p_y}+\frac{p_x}{p_y}=2\frac{p_x}{p_y}=2RMT_{x,y}\left(q_x,q_y\right)>RMT_{x,y}\left(q_x,q_y\right)$$

Comprobar que la asignación de equilibrio es ineficiente es fácil: si se incrementa en una unidad la producción del bien público y se reduce el consumo del bien privado de cada economía doméstica en la mitad de su *RMS*, se consigue que las dos economías domésticas estén mejor, ya que estarían igual si se les hubiera quitado una cantidad de bien privado igual a su *RMS*, y solo se les ha quitado la mitad. Además, esta nueva asignación es factible, ya que la *RMT* es igual a la *RMS* de cada consumidor, y con la suma de la mitad de cada una de ellas se obtiene la *RMT* (que es lo que se ha reducido la producción de bien privado para incrementar en una unidad la producción del bien público). Por tanto, incrementando la producción del bien público se puede lograr una mejora en sentido de Pareto, lo que se traduce en que se está produciendo una cantidad ineficientemente pequeña del bien público.

En el siguiente gráfico se representa la asignación de equilibrio. En la parte superior se representa las *FPP* y las curvas de indiferencia de los consumidores, tomando como origen los puntos $(0,\hat{c}^2_y)$ para el consumidor 1 y $(0,\hat{c}^1_y)$ para el consumidor 2, lo que hace que la cesta de consumo de cada uno de ellos coincida con la combinación productiva de la *FPP*. Vemos que, en el equilibrio, las curvas de indiferencia de los dos consumidores son tangentes entre sí y con respecto a la *FPP*, ya que las *RMSs* de los consumidores se igualan a los precios relativos que, a su vez, son iguales a la *RMT*. También aparece representada, con una línea discontinua, la curva de indiferencia del consumidor 2 tomando como origen de su espacio de consumo el punto (0,0). La distancia vertical entre la *FPP* y esta curva de indiferencia es la cantidad máxima de consumo que puede realizar el consumidor 1 manteniendo el consumidor 2 su nivel de utilidad. Estas distancia se traslada al espacio de consumo del consumidor 1 (parte inferior del gráfico) y se construye el conjunto de posibilidades de consumo del consumidor 1 para un nivel de utilidad del consumidor 2 dado (en este caso el nivel de utilidad que disfruta el consumidor 2 en el equilibrio). Como la frontera de posibilidades de consumo del consumidor 1 para el nivel de utilidad del consumidor 2 en el equilibrio es la "resta" de la *FPP* y la curva de indiferencia del agente 2, la pendiente de la frontera de posibilidades de consumo del consumidor 1, para el nivel de utilidad del consumidor 2, será igual a la diferencia entre la pendiente de la *FPP* (la *RMT* en negativo), y la pendiente de la curva de indiferencia del consumidor 2 (su *RMS*). Como la *RMS* del consumidor 2 en el equilibrio se iguala a la *RMT*, la pendiente de la frontera de posibilidades de consumo del consumidor 1 para el nivel de utilidad del consumidor 2 en el punto de equilibrio es igual a cero, es decir, es el punto donde dicha curva alcanza su máximo. Ahora bien, como la curva de indiferencia del consumidor 1 tiene pendiente negativa, ese punto no es eficiente, ya que la curva de indiferencia del agente 1 no es tangente a su conjunto de posibilidades de producción.

Esto implica que se puede conseguir una mejora en sentido de Pareto, aumentando la producción del bien público x hasta el nivel donde la curva de indiferencia del consumidor 1 es tangente a la frontera de posibilidades de consumo de este agente. Si el agente 1 consumiera la cesta de consumo correspondiente a este punto, el consumidor 2 estaría igual que en el equilibrio inicial (ya que estamos en la frontera de posibilidades de consumo del agente 1), pero el agente 1 estaría estrictamente mejor. Por tanto, en el equilibrio se produce una cantidad ineficientemente pequeña de bien público.



El pseudo-equilibrio de Lindahl.

Finalmente, hay otro tipo de equilibrio que ha propuesto la literatura y que consiste en que cada consumidor pague por unidad de bien público lo que estaría dispuesto a pagar por la última unidad, es decir, su *RMS*. La definición sería la siguiente:

Definición 2: Un **pseudo-equilibrio de Lindahl** es una asignación $(c_x, c_y^1, c_y^2, q_x, L_x, q_y, L_y)$, llamada **asignación de equilibrio**, y un vector de precios (p_x^1, p_x^2, p_y, w), llamado **vector de precios de equilibrio**, tal que:

- Las economías domésticas eligen aquella cesta de consumo de bienes privados que maximiza su utilidad (en el caso de que hubiera más de un bien privado) y paga por el bien público un precio igual a su disposición marginal a pagar la última unidad de bien público (su *RMS*):

  - Consumidor 1:

$$\frac{p_x^1}{p_y} = RMS_{x,y}^1(c_x, c_y^1) \qquad \text{(EW.1)}$$

$$p_x^1 c_x + p_y c_y^1 = wN^1 + \theta_x^1 \pi_x + \theta_y^1 \pi_y \tag{EW.2}$$

- Consumidor 2:

$$\frac{p_x^2}{p_y} = RMS_{x,y}^2(c_x, c_y^2) \tag{EW.3}$$

$$p_x^2 c_x + p_y c_y^2 = wN^2 + \theta_x^2 \pi_x + \theta_y^2 \pi_y \tag{EW.4}$$

- Las empresas eligen el nivel de producción (oferta de bienes) y la combinación de factores (demanda de factores) que maximizan sus beneficios:

- Empresa del bien *x*:

$$\left(p_x^1 + p_x^2\right)\frac{\partial F_x(L_x)}{\partial L_x} = w \tag{EW.5}$$

$$q_x = F_x(L_x) \tag{EW.6}$$

- Empresa del bien *y*:

$$p_y \frac{\partial F_y(L_y)}{\partial L_y} = w \tag{EW.7}$$

$$q_y = F_y(L_y) \tag{EW.8}$$

- Los mercados de bienes están en equilibrio (demanda = oferta):

- Bien *x*:

$$c_x = q_x \tag{EW.9}$$

- Bien *y*:

$$c_y^1 + c_y^2 = q_y \tag{EW.10}$$

- Los mercados de factores están en equilibrio (demanda = oferta):

- Mercado de trabajo:

$$L_x + L_y = \bar{L} \tag{EW.11}$$

En el equilibrio de Lindahl los precios son personalizados, esto es, cada consumidor paga su disposición a pagar la última unidad de bien público (que en términos del bien privado sería igual a su *RMS*). Esto implica que el bien público no tiene un precio único, sino que hay un precio de bien público por consumidor. A estos precios individualizados se les denomina precios de Lindahl. Dado que cada consumidor paga un precio distinto por unidad, lo que recibe la empresa de bien público por unidad vendida es la suma de los precios personalizados de los consumidores, tal y como muestra la ecuación (EW.5).

El **equilibrio de Lindahl sí es eficiente en sentido de Pareto**. Para comprobarlo, vamos a usar las condiciones de primer orden de maximización de beneficios de las empresas, (EW.5) y (EW.7):

$$\left.\begin{array}{l} \left(p_x^1+p_x^2\right)\dfrac{\partial F_x\left(L_x\right)}{\partial L_x}=w \Leftrightarrow p_x^1+p_x^2=\dfrac{w}{\dfrac{\partial F_x\left(L_x\right)}{\partial L_x}}=CMg_x\left(w,q_x\right) \\ p_y\dfrac{\partial F_y\left(L_y\right)}{\partial L_y}=w \Leftrightarrow p_y=\dfrac{w}{\dfrac{\partial F_y\left(L_y\right)}{\partial L_y}}=CMg_y\left(w,q_y\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{p_x^1}{p_y}+\frac{p_x^2}{p_y}=\frac{CMg_x\left(w,q_x\right)}{CMg_y\left(w,q_y\right)}=\frac{\dfrac{w}{\dfrac{\partial F_x\left(L_x\right)}{\partial L_x}}}{\dfrac{w}{\dfrac{\partial F_y\left(L_y\right)}{\partial L_y}}}=\frac{\dfrac{\partial F_y\left(L_y\right)}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial F_x\left(L_x\right)}{\partial L_x}}=RMT_{x,y}(q_x,q_y)$$

Usando las definiciones de los precios de Lindahl que paga cada consumidor (ecuaciones EW.1 y EW.3), se llega a la condición de eficiencia de la combinación productiva para el caso de los bienes públicos:

$$RMS_{x,y}^1(c_x^1,c_y^1)+RMS_{x,y}^2(c_x^2,c_y^2)=\frac{p_x}{p_y}=RMT_{x,y}(q_x,q_y)$$

Aunque el equilibrio de Lindahl es eficiente en sentido de Pareto, es muy difícil implementarlo en la práctica, ya que se tendría que conocer la disposición a pagar la última unidad de bien público de todos los individuos. Si se preguntara a los contribuyentes a la financiación de un bien público cuál es su disposición a pagar, si éstos saben que pagarán de acuerdo con su declaración, evidentemente tendrían incentivos a no revelar sus preferencias y a declarar una disposición a pagar menor de la real.

Dadas las dificultades que existen para que la iniciativa privada realice la provisión de una cantidad eficiente de bien público, dificultades que aumentan con el número de individuos afectados, la gran mayoría de los bienes públicos son provistos por el Estado, financiándolos con impuestos: calles, autopistas, alumbrado público, establecimiento de la Ley, etc. Algunos bienes públicos son provistos privadamente, pero muchas veces es necesario poner regulaciones que obliguen a los individuos que disfrutan de esos bienes a pagarlos. Por ejemplo, la limpieza de las zonas comunes de los edificios se financia con pagos obligatorios por ley a la comunidad de vecinos.

Apéndices

Apéndice 1.

A través del Teorema de la Envolvente también se puede explicar que:

$$CMg_x(w,r,q_x)=\frac{w}{\dfrac{\partial F_x(K_x,L_x)}{\partial L_x}}=\frac{r}{\dfrac{\partial F_x(K_x,L_x)}{\partial K_x}}$$

Así, la función de costes es el mínimo coste asociado a un nivel de producción. Utilizando la función Lagrangiana:

$$c_x(w,r,q_x)=wL_x+rK_x-\mu[F_x(K_x,L_x)-q_x]$$

Utilizando el Teorema de la Envolvente y las condiciones de primer orden del problema de minimización de costes:

$$\left.\begin{aligned}
&CMg_x(w,r,q_x)=\frac{\partial c_x(w,r,q_x)}{\partial q_x}=\frac{\partial[wL_x+rK_x-\lambda[F_x(K_x,L_x)-q_x]]}{\partial q_x}=\mu\\
&\left.\begin{aligned}
w&=\mu\frac{\partial F_x(K_x,L_x)}{\partial L_x}\\
r&=\mu\frac{\partial F_x(K_x,L_x)}{\partial K_x}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow \mu=\frac{w}{\dfrac{\partial F_x(K_x,L_x)}{\partial L_x}}=\frac{r}{\dfrac{\partial F_x(K_x,L_x)}{\partial K_x}}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$CMg_x(w,r,q_x)=\frac{w}{\dfrac{\partial F_x(K_x,L_x)}{\partial L_x}}=\frac{r}{\dfrac{\partial F_x(K_x,L_x)}{\partial K_x}}$$

Apéndice 2.

A través del Teorema de la Envolvente también se puede demostrar el valor de la *RMT*:

$$RMT_{x,y}(q_x,q_y)=-\left.\frac{\partial q_y}{\partial q_x}\right|_{FPP}$$

Para poder calcular esta derivada vamos a considerar, de nuevo, el problema de maximización con el que se puede generar la *FPP*:

$$\begin{aligned}
&\max_{q_x,K_x,L_x,q_y,K_y,L_y} q_y\\
&\quad s.a:\ q_x\geq \hat{q}_x\\
&\qquad\quad q_x\leq F_x(K_x,L_x)\\
&\qquad\quad q_y\leq F_y(K_y,L_y)\\
&\qquad\quad L_x+L_y\leq \overline{L}\\
&\qquad\quad K_x+K_y\leq \overline{K}
\end{aligned}$$

Este problema de maximización se puede resumir de la siguiente forma (eliminando las producciones):

$$\max_{K_x,L_x,K_y,L_y} F_y\left(K_y,L_y\right)$$
$$s.a: \quad F_x\left(K_x,L_x\right)\geq \hat{q}_x$$
$$L_x+L_y\leq \overline{L}$$
$$K_x+K_y\leq \overline{K}$$

El Lagrangiano asociado a este problema de maximización sería:

$$\ell = F_y\left(K_y,L_y\right)+\wp_x(F_x\left(K_x,L_x\right)-\hat{q}_x)+\omega(\overline{L}-L_x-L_y)+\rho(\overline{K}-K_x-K_y)$$

Recordemos que las condiciones de primer orden de este problema serían:

$$\wp_x\frac{\partial F_x\left(K_x,L_x\right)}{\partial L_x}=\omega$$
$$\wp_x\frac{\partial F_x\left(K_x,L_x\right)}{\partial K_x}=\rho$$
$$\frac{\partial F_y\left(K_y,L_y\right)}{\partial L_y}=\omega$$
$$\frac{\partial F_y\left(K_y,L_y\right)}{\partial K_y}=\rho$$

Dado que las restricciones del problema de optimización en caso de solución interior siempre son iguales a cero, la máxima producción del bien *y* a lo largo de la *FPP*, dada la producción de *x* y la cantidad de recursos existentes, se puede escribir de la siguiente manera:

$$q_y(\hat{q}_x,\overline{L},\overline{K})=$$
$$\max_{K_x,L_x,K_y,L_y} F_y\left(K_y,L_y\right)+\wp_x(F_x\left(K_x,L_x\right)-\hat{q}_x)+\omega(\overline{L}-L_x-L_y)+\rho(\overline{K}-K_x-K_y)$$

Utilizando el Teorema de la Envolvente:

$$\left.\frac{\partial q_y}{\partial q_x}\right|_{FPP}=\frac{\partial q_y(\hat{q}_x,\overline{L},\overline{K})}{\partial q_x}=-\wp_x$$

Utilizando las condiciones de primer orden:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\wp_x=\dfrac{\omega}{\dfrac{\partial F_x\left(K_x,L_x\right)}{\partial L_x}}\\ \dfrac{\partial F_y\left(K_y,L_y\right)}{\partial L_y}=\omega\end{array}\right\}\Rightarrow \wp_x=\dfrac{\dfrac{\partial F_y\left(K_y,L_y\right)}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial F_x\left(K_x,L_x\right)}{\partial L_x}}\\ \left.\begin{array}{l}\wp_x=\dfrac{\rho}{\dfrac{\partial F_x\left(K_x,L_x\right)}{\partial K_x}}\\ \dfrac{\partial F_y\left(K_y,L_y\right)}{\partial K_y}=\rho\end{array}\right\}\Rightarrow \wp_x=\dfrac{\dfrac{\partial F_y\left(K_y,L_y\right)}{\partial K_y}}{\dfrac{\partial F_x\left(K_x,L_x\right)}{\partial K_x}}\end{array}\right\}\Rightarrow \wp_x=\dfrac{\dfrac{\partial F_y\left(K_y,L_y\right)}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial F_x\left(K_x,L_x\right)}{\partial L_x}}=\dfrac{\dfrac{\partial F_y\left(K_y,L_y\right)}{\partial K_y}}{\dfrac{\partial F_x\left(K_x,L_x\right)}{\partial K_x}}$$

Por tanto, la relación marginal de transformación entre el bien *x* y el bien *y* (o coste de oportunidad del bien *x* en términos del bien *y*) sería igual al cociente del producto marginal de cada factor en la producción del bien *y* y la producción del bien *x*:

$$RMT_{x,y}(q_x,q_y) = -\left.\frac{\partial q_y}{\partial q_x}\right|_{FPP} = \wp_x = \frac{\dfrac{\partial F_y(K_y,L_y)}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial F_x(K_x,L_x)}{\partial L_x}} = \frac{\dfrac{\partial F_y(K_y,L_y)}{\partial K_y}}{\dfrac{\partial F_x(K_x,L_x)}{\partial K_x}}$$

Apéndice 3.

Para entender cómo funciona el Segundo Teorema del Bienestar, consideremos una asignación eficiente en sentido de Pareto $(\hat{c}_x^1,\hat{c}_y^1,\hat{c}_x^2,\hat{c}_y^2,\hat{q}_x,\hat{K}_x,\hat{L}_x,\hat{q}_y,\hat{K}_y,\hat{L}_y)$. Si ésta fuera un equilibrio Walrasiano, obtener los precios relativos de equilibrio sería sencillo: simplemente tendríamos que usar las condiciones de tangencia de los consumidores y/o las empresas. Esto es:

$$\frac{\hat{p}_x}{\hat{p}_y} = \frac{\dfrac{\partial F_y(\hat{K}_y,\hat{L}_y)}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial F_x(\hat{K}_x,\hat{L}_x)}{\partial L_x}} \Leftrightarrow \frac{\hat{p}_y}{\hat{p}_x} = \frac{\dfrac{\partial F_x(\hat{K}_x,L_x)}{\partial L_x}}{\dfrac{\partial F_y(\hat{K}_y,\hat{L}_y)}{\partial L_y}}$$

$$\frac{\hat{w}}{\hat{p}_x} = \frac{\partial F_x(\hat{K}_x,\hat{L}_x)}{\partial L_x}$$

$$\frac{\hat{r}}{\hat{p}_x} = \frac{\partial F_x(\hat{K}_x,\hat{L}_x)}{\partial K_x}$$

Si, por ejemplo, normalizáramos el precio del bien *x* a la unidad, el potencial vector de precios de equilibrio sería:

$$(\hat{p}_x,\hat{p}_y,\hat{w},\hat{r}) = \left(1, \frac{\dfrac{\partial F_x(\hat{K}_x,L_x)}{\partial L_x}}{\dfrac{\partial F_y(\hat{K}_y,\hat{L}_y)}{\partial L_y}}, \frac{\partial F_x(\hat{K}_x,\hat{L}_x)}{\partial L_x}, \frac{\partial F_x(\hat{K}_x,\hat{L}_x)}{\partial K_x}\right)$$

Ahora, solo tendríamos que redistribuir los derechos de propiedad de los factores y las empresas de manera que el valor de la asignación de consumo de cada consumidor fuera igual a su renta. Habría muchas maneras de hacer esta distribución: una podría ser darle a cada consumidor una proporción de los factores y unas participaciones en los beneficios de las empresas proporcionales a su porcentaje de gasto en la asignación eficiente en sentido de Pareto:

$$N^1 = \lambda^1\overline{L}\ ,\ B^1 = \lambda^1\overline{K}\ ,\ \theta_x^1 = \theta_y^1 = \lambda^1,\ N^2 = (1-\lambda^1)\overline{L}\ ,\ B^2 = (1-\lambda^1)\overline{K}\ ,\ \theta_x^2 = \theta_y^2 = 1-\lambda^1$$

donde $\lambda^1 = \dfrac{\hat{p}_x\hat{c}_x^1 + \hat{p}_y\hat{c}_y^1}{\hat{p}_x\hat{c}_x^1 + \hat{p}_y\hat{c}_y^1 + \hat{p}_x\hat{c}_x^2 + \hat{p}_y\hat{c}_y^2}$ es la proporción del gasto del consumidor 1 en la asignación eficiente en sentido de Pareto y $1-\lambda^1 = \dfrac{\hat{p}_x\hat{c}_x^2 + \hat{p}_y\hat{c}_y^2}{\hat{p}_x\hat{c}_x^1 + \hat{p}_y\hat{c}_y^1 + \hat{p}_x\hat{c}_x^2 + \hat{p}_y\hat{c}_y^2}$ es la proporción del gasto del consumidor 2 en la asignación eficiente en sentido de Pareto.

Una vez distribuidos los recursos de esta manera, y dada la identidad renta igual a gasto, se puede comprobar que la renta de cada consumidor es la necesaria para comprar la cesta de consumo que le corresponde en la asignación eficiente en sentido de Pareto:

$$m^1 = \hat{w}\lambda^1\overline{L} + \hat{r}\lambda^1\overline{K} + \lambda^1\pi_x + \lambda^1\pi_y = \lambda^1\left[\hat{w}\overline{L} + \hat{r}\overline{K} + \pi_x + \pi_y\right] =$$

$$\lambda^1\left[\hat{p}_x\hat{c}_x^1 + \hat{p}_y\hat{c}_y^1 + \hat{p}_x\hat{c}_x^2 + \hat{p}_y\hat{c}_y^2\right] = \frac{\hat{p}_x\hat{c}_x^1 + \hat{p}_y\hat{c}_y^1}{\hat{p}_x\hat{c}_x^1 + \hat{p}_y\hat{c}_y^1 + \hat{p}_x\hat{c}_x^2 + \hat{p}_y\hat{c}_y^2}\left[\hat{p}_x\hat{c}_x^1 + \hat{p}_y\hat{c}_y^1 + \hat{p}_x\hat{c}_x^2 + \hat{p}_y\hat{c}_y^2\right] =$$

$$\hat{p}_x\hat{c}_x^1 + \hat{p}_y\hat{c}_y^1$$

$$m^2 = (1-\lambda^1)\left[\hat{w}\overline{L} + \hat{r}\overline{K} + \pi_x + \pi_y\right] = (1-\lambda^1)\left[\hat{p}_x\hat{c}_x^1 + \hat{p}_y\hat{c}_y^1 + \hat{p}_x\hat{c}_x^2 + \hat{p}_y\hat{c}_y^2\right] =$$

$$\frac{\hat{p}_x\hat{c}_x^2 + \hat{p}_y\hat{c}_y^2}{\hat{p}_x\hat{c}_x^1 + \hat{p}_y\hat{c}_y^1 + \hat{p}_x\hat{c}_x^2 + \hat{p}_y\hat{c}_y^2}\left[\hat{p}_x\hat{c}_x^1 + \hat{p}_y\hat{c}_y^1 + \hat{p}_x\hat{c}_x^2 + \hat{p}_y\hat{c}_y^2\right] = \hat{p}_x\hat{c}_x^2 + \hat{p}_y\hat{c}_y^2$$

Con esta distribución de los recursos, la asignación eficiente en sentido de Pareto $(\hat{c}_x^1, \hat{c}_y^1, \hat{c}_x^2, \hat{c}_y^2, \hat{q}_x, \hat{K}_x, \hat{L}_x, \hat{q}_y, \hat{K}_y, \hat{L}_y)$ y el vector de precios $\left(\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{w}, \hat{r}\right)$, tal como se definió anteriormente, sería un equilibrio Walrasiano, ya que es fácil de comprobar (a través de las condiciones de eficiencia) que se cumplen todas las ecuaciones de equilibrio. Usando la condición de eficiencia de la combinación productiva se obtienen las ecuaciones (EW.1) y (EW.3):

$$RMS_{x,y}^1(\hat{c}_x^1, \hat{c}_y^1) = RMT_{x,y}\left(\hat{q}_x, \hat{q}_y\right) = \frac{\dfrac{\partial F_y\left(\hat{K}_y, \hat{L}_y\right)}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial F_x\left(\hat{K}_x, \hat{L}_x\right)}{\partial L_x}} = \frac{\hat{p}_x}{\hat{p}_y}$$

$$RMS_{x,y}^2(\hat{c}_x^2, \hat{c}_y^2) = RMT_{x,y}\left(\hat{q}_x, \hat{q}_y\right) = \frac{\dfrac{\partial F_y\left(\hat{K}_y, \hat{L}_y\right)}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial F_x\left(\hat{K}_x, \hat{L}_x\right)}{\partial L_x}} = \frac{\hat{p}_x}{\hat{p}_y}$$

Las ecuaciones (EW.2) y (EW.4) ya hemos visto que se cumplen. Las ecuaciones (EW.5) y (EW.6) se cumplen por definición de $\hat{w}$ y $\hat{r}$. Las ecuaciones (EW.7) y (EW.10) se cumplen porque en cualquier asignación eficiente en sentido de Pareto (y en cualquier asignación eficiente desde un punto de vista productivo) se usa la mejor tecnología disponible. La ecuación (EW.8) se obtiene por la definición de los precios:

$$\frac{\hat{w}}{\hat{p}_y}=\frac{\dfrac{\partial F_x\left(\hat{K}_x,\hat{L}_x\right)}{\partial L_x}}{\left(\dfrac{\partial F_x\left(\hat{K}_x,L_x\right)}{\partial L_x}\Big/\dfrac{\partial F_y\left(\hat{K}_y,\hat{L}_y\right)}{\partial L_y}\right)}=\frac{\partial F_y\left(\hat{K}_y,\hat{L}_y\right)}{\partial L_y}$$

La ecuación (EW.9) se obtiene usando la condición de eficiencia de la combinación factorial entre empresas:

$$\frac{\dfrac{\partial F_x\left(\hat{K}_x,L_x\right)}{\partial L_x}}{\dfrac{\partial F_x\left(\hat{K}_x,\hat{L}_x\right)}{\partial K_x}}=\frac{\dfrac{\partial F_y\left(\hat{K}_y,\hat{L}_y\right)}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial F_y\left(\hat{K}_y,\hat{L}_y\right)}{\partial K_y}}\Leftrightarrow\frac{\dfrac{\partial F_x\left(\hat{K}_x,L_x\right)}{\partial L_x}}{\dfrac{\partial F_y\left(\hat{K}_y,\hat{L}_y\right)}{\partial L_y}}=\frac{\dfrac{\partial F_x\left(\hat{K}_x,\hat{L}_x\right)}{\partial K_x}}{\dfrac{\partial F_y\left(\hat{K}_y,\hat{L}_y\right)}{\partial K_y}}$$

$$\frac{\hat{r}}{\hat{p}_y}=\frac{\dfrac{\partial F_x\left(\hat{K}_x,\hat{L}_x\right)}{\partial K_x}}{\left(\dfrac{\partial F_x\left(\hat{K}_x,L_x\right)}{\partial L_x}\Big/\dfrac{\partial F_y\left(\hat{K}_y,\hat{L}_y\right)}{\partial L_y}\right)}=\frac{\dfrac{\partial F_x\left(\hat{K}_x,\hat{L}_x\right)}{\partial K_x}}{\left(\dfrac{\partial F_x\left(\hat{K}_x,L_x\right)}{\partial K_x}\Big/\dfrac{\partial F_y\left(\hat{K}_y,\hat{L}_y\right)}{\partial K_y}\right)}=\frac{\partial F_y\left(\hat{K}_y,\hat{L}_y\right)}{\partial K_y}$$

Finalmente, las condiciones de equilibrio del mercado de bienes y factores (ecuaciones EW.11 a EW.14) se obtienen de la condiciones de eficiencia de que se consume todo lo que se produce y se utilizan todos los factores de la economía. Por tanto, podemos concluir lo siguiente:

2º Teorema del Bienestar: dada una asignación eficiente en sentido de Pareto $(\hat{c}_x^1,\hat{c}_y^1,\hat{c}_x^2,\hat{c}_y^2,\hat{q}_x,\hat{K}_x,\hat{L}_x,\hat{q}_y,\hat{K}_y,\hat{L}_y)$ siempre existe un vector de precios $\left(\hat{p}_x,\hat{p}_y,\hat{w},\hat{r}\right)$ y una distribución de derechos de propiedad $\left(\hat{N}^1,\hat{B}^1,\hat{\theta}_x^1,\hat{\theta}_y^1,\hat{N}^2,\hat{B}^2,\hat{\theta}_x^2,\hat{\theta}_y^2\right)$ tal que dicha asignación y dicho vector de precios son un equilibrio Walrasiano.

Es decir, toda asignación eficiente en el sentido de Pareto se puede implementar como un equilibrio Walrasiano si se redistribuyen los derechos de propiedad entre los consumidores.