



2ª Colección Tema 2

La elección en condiciones de incertidumbre

1. Un agente dispone de 100 u.m. de riqueza y puede apostar 50 u.m. en el siguiente juego: si escoge una carta y sale picas pierde las 50 u.m. y si sale una carta de otro palo gana 20 u.m.
 - a) Determine la decisión del agente si su función de utilidad es $u(c) = Lnc$.
 - b) Calcule el valor cierto del consumo que le resulta indiferente respecto a la situación con incertidumbre.

2. Un presentador de televisión con una función de utilidad $u(c) = Lnc$, se plantea asegurarse o no ante eventuales problemas en su voz. Si no se asegura y ocurre un percance con su voz, con probabilidad del 10%, obtendrá 5.000 u.m., mientras que si no ocurre el percance ingresará 10.000 u.m. En el caso de que el presentador se asegure obtendrá 9.500 u.m. de forma segura.
 - a) Indique qué decisión tomará el presentador.
 - b) Señale qué propiedades tiene esta función de utilidad e indique el valor de sus índices de aversión al riesgo.
 - c) Represente gráficamente las dos acciones posibles.
 - d) Calcule la probabilidad de percance para que el presentador sea indiferente entre ambas acciones.
 - e) Obtenga el equivalente certeza de la acción de no asegurarse.
 - f) Calcule la prima de riesgo.

3. Suponga que un agente puede elegir una lotería A que proporciona un premio de 700 u.m. con probabilidad $p=0,25$ y otro premio de 100 u.m. Este agente también podría elegir una lotería B que concede un premio de 300 u.m. con probabilidad $q=0,1$, y otro premio que consiste en participar en otra lotería C con dos resultados: 100 u.m. con probabilidad 0,7 ó 600 u.m.
 - a) Señale qué lotería, la A o la B, prefiere el agente si su función de utilidad viene dada por $u(c) = c^{1/2}$.
 - b) Calcule el equivalente certeza correspondiente a las loterías A y B.
 - c) Dado el valor de $p=0,25$, y suponiendo que el agente es neutral al riesgo, calcule el valor de “q” para el que le serían indiferentes las loterías A y B.

4. Un individuo cuya función de utilidad es $u(c) = c^{1/2}$ dispone de 15.000 u.m. que puede invertir o no en un activo con riesgo. La inversión le permite obtener un valor esperado del consumo de 14.100 u.m. si la probabilidad de ganar G u.m. por cada unidad apostada es del 30%, siendo 0,3 u.m. lo que podría perder por cada unidad apostada.
 - a) Calcule la cantidad que ganaría por u.m. apostada (G), así como el valor esperado de invertir una u.m.
 - b) Demuestre que el valor esperado del consumo no es constante.
 - c) Razone qué decisión tomará el individuo. Represente la situación en un gráfico de utilidades.

- d) Si pudiese encargar un estudio a una empresa de analistas financieros que le informaría con certeza del resultado de su inversión, obtenga la expresión matemática que le permitiría calcular la cantidad máxima de dinero que este individuo estaría dispuesto a pagar por el estudio.
5. Un individuo cuya función de utilidad es $u(c) = Lnc$ dispone de 1.500 u.m. que puede invertir o no en un activo con riesgo. La inversión le permite obtener una renta final de 2.500 u.m. con un 30% de probabilidad, o reducir su riqueza a 800 u.m.
- Razone que decisión tomará este individuo.
 - Obtenga la cantidad que puede ganar y que puede perder por cada u.m. invertida. Calcule también el valor esperado de invertir una u.m., el valor esperado de invertir toda su riqueza y el valor esperado del consumo cuando invierte toda su riqueza.
 - Si pudiera encargar un estudio a una empresa de analistas financieros que le informaría con certeza del resultado de su inversión, justifique si estaría dispuesto a pagar 10 u.m. por el estudio.
 - Obtenga la expresión matemática que le permitiría calcular la cantidad máxima de dinero que este individuo estaría dispuesto a pagar por el estudio.
6. Un individuo dispone de 1.000 u.m. para invertir, y se le ofrece la oportunidad de un negocio. Si el resultado es exitoso obtendrá una ganancia de 0,2 u.m. por u.m. invertida y si fracasa perderá 0,1 u.m. por u.m. invertida. La probabilidad de éxito es del 50%.
- Calcule el valor esperado de invertir 1 u.m. y el valor esperado del consumo si invierte 1.000 u.m.
 - Obtenga la restricción presupuestaria y represente gráficamente el punto que representa la inversión de la totalidad de su riqueza inicial. Interprete el valor de la pendiente.
 - Calcule cuánto debe variar la probabilidad de éxito para que el juego esté equilibrado.
 - Calcule la cantidad que invertirá el individuo si su función de utilidad es $u(c) = Lnc$ y el juego está equilibrado.
7. Un individuo con una función de utilidad $u(c) = c^2$ dispone de una riqueza de 500 u.m. El casino de su localidad le ofrece la posibilidad de apostar en el siguiente juego: con una probabilidad de 0,25 gana 0,5 u.m. por unidad monetaria apostada, o pierde lo apostado.
- Obtenga analíticamente la restricción presupuestaria de este individuo y representéla gráficamente.
 - Calcule la apuesta de equilibrio y representéla en el gráfico anterior. Asimismo, represente la situación en el gráfico de utilidades.
 - Determine el valor mínimo de la probabilidad de ganar para el que el individuo decidirá apostar.
8. A un individuo se le ofrece la posibilidad de invertir 1.000 u.m. en un negocio. Si el resultado es exitoso obtendrá una ganancia de 0,2 u.m. por u.m. invertida y si fracasa perderá 0,1 u.m. por u.m. invertida.
- Calcule el valor de la probabilidad de ganar para que el valor esperado del consumo asociado a la acción de invertir sea 1.100 u.m.
 - Calcule la restricción presupuestaria y represente gráficamente el punto que representa la inversión de la totalidad de su riqueza inicial. Interprete el valor de la pendiente.
 - Calcule cuánto invertirá el individuo si $u(c) = c^2$. Represente la situación en un gráfico de curvas de indiferencia.
 - Calcule la variación que debe experimentar la probabilidad de éxito para que el juego esté equilibrado.
9. La renta laboral de un individuo depende de si hay o no crisis económica. En caso de crisis recibe 8.000€ y en caso de que no haya crisis recibe 10.000€. Además, el individuo posee 10.000€ en ahorros que puede invertir en dos activos (puede invertir parte de sus ahorros en un activo y la otra parte en el otro). El primer

activo consiste en acciones de un bufete de abogados especializados en quiebras y desahucios. Estas acciones tienen un rendimiento del 20% en caso de crisis y de un 0% en caso de que no haya crisis. El segundo tipo de activo consiste en acciones de una constructora, que tienen un rendimiento del 0% en caso de crisis y del 20% en caso de que no haya crisis. La probabilidad de que haya crisis es del 50%.

- Calcule y represente gráficamente la restricción presupuestaria.
- Si el individuo es averso al riesgo, obtenga la cantidad de sus ahorros que invertiría en cada activo.
- Si el individuo es neutral al riesgo, obtenga la cantidad de sus ahorros que invertiría en cada activo.
- Si el individuo es amante del riesgo, obtenga la cantidad de sus ahorros que invertiría en cada activo.
- Suponga que la función de utilidad del individuo es $u(c) = Lnc$. Considere ahora que las acciones de la empresa constructora tienen un rendimiento del 40% (y no del 20%) en caso de que no haya crisis (y de 0% en caso de crisis). Calcule la cantidad de sus ahorros que invertiría en cada tipo de activo, y represente la situación en un gráfico con curvas de indiferencia.

10. Considere un individuo con una renta de 12.500€ anuales de los cuales tiene que pagar un 20% a Hacienda. No obstante, este individuo puede decidir defraudar al Fisco. En caso de que un inspector de Hacienda descubra que el individuo está defraudando, éste, además de devolver los impuestos defraudados, tiene que pagar una multa igual a tres veces la cuantía de los impuestos defraudados.

- Obtenga analíticamente la restricción presupuestaria y represéntela gráficamente.
- Calcule la mínima probabilidad de descubrir el fraude por la que un individuo averso al riesgo decidirá no defraudar.
- Suponga que la probabilidad de ser descubierto es del 10% y que la función de utilidad del individuo viene dada por la expresión: $u(c) = Lnc$. Calcule la cantidad de renta ocultada así como la cuantía de los impuestos defraudados a Hacienda por este individuo.

11. El sistema tributario de un país es tal que aplica un tipo impositivo del 20% a la renta de los contribuyentes. Además, se fiscaliza un porcentaje de las declaraciones y en el 100% de los casos inspeccionados en que el contribuyente declara una menor renta de la real se detecta la evasión, procediéndose a cobrar los impuestos defraudados, además de una multa consistente en el 10% de la renta ocultada. La renta de un contribuyente es de 50.000 u.m. y, en caso de que no lo inspeccionen, este individuo le daría una compensación a un amigo que le hace la Declaración de la Renta por un importe del 10% de la renta ocultada.

- Calcule la restricción presupuestaria del contribuyente y represéntela gráficamente.
- Si la función de utilidad del contribuyente viene dada por la expresión $u(c) = c^2$, calcule la probabilidad de ser inspeccionado para que decida no defraudar.
- Calcule el porcentaje mínimo de inspecciones que debería existir para que el contribuyente decida no defraudar si fuera averso al riesgo.
- Calcule el porcentaje de inspecciones que debería existir para que el contribuyente decida no defraudar si fuera neutral al riesgo.
- Suponga que la función de utilidad del contribuyente es $u(c) = Lnc$. Calcule el porcentaje de declaraciones a fiscalizar si los impuestos defraudados por este individuo ascienden a 3.000 u.m.

12. Don Leopoldo Antúnez, cuya renta correspondiente al ejercicio 2012 asciende a 25.000 u.m., está preparando su declaración del I.R.P.F. El tipo impositivo que le corresponde es del 20% de su renta. No obstante, puede decidir defraudar al Fisco contratando a su hijo, que es un prestigioso asesor fiscal. El importe de los honorarios que le pagaría a su hijo sería del 5% de los impuestos defraudados. En caso de que un inspector de Hacienda descubra que D. Leopoldo Antúnez ha ocultado renta en su declaración, éste, además de devolver los impuestos defraudados, tiene que pagar una multa de M u.m. por unidad de impuestos defraudados.

- Obtenga analíticamente la restricción presupuestaria de D. Leopoldo y represéntela gráficamente.

- b) Calcule la mínima probabilidad de que Hacienda descubra el fraude por la que D. Leopoldo Antúnez, averso al riesgo, decidiría no defraudar.
- c) Suponga que la probabilidad de ser descubierto es del 10% y que la función de utilidad de D. Leopoldo Antúnez viene dada por la expresión: $u(c) = Lnc$. Calcule cuál debería ser el valor de M para que D. Leopoldo decidiera ocultar toda su renta. Calcule, además, el importe total de la multa si lo descubrieran, en ese caso.

13. Un agente tiene 8.000€ para invertir que puede **repartir** en dos tipos de activos: Bonos del Tesoro, con una rentabilidad del 25%, y acciones cuya rentabilidad depende de la coyuntura económica. En situaciones de crisis la rentabilidad es del 15% mientras que en situaciones de expansión económica es del 45%. La probabilidad de crisis económica es del 50% y la función de utilidad del agente es del tipo CES:

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} & \text{si } \sigma \in (0,1) \cup (1,+\infty) \\ Lnc & \text{si } \sigma = 1 \end{cases}$$

- a) Calcule el índice de aversión relativa al riesgo (ARR) del agente.
- b) Calcule la cantidad que invertirá en acciones.
- c) Explique cómo afecta σ a la cantidad que el agente puede invertir en acciones. (Recuerde que $\frac{\partial(a^{f(x)})}{\partial x} = f'(x)a^{f(x)}Lna$).
- d) Calcule la rentabilidad que deberían ofrecer los Bonos del Tesoro para que el agente decidiera no invertir en acciones.

14. Un banco tiene la posibilidad de conceder préstamos a un 20% de interés y/o de comprar Letras del Tesoro, cuya rentabilidad es del 10%. En la economía hay dos estados de la naturaleza: alta morosidad (estado de la naturaleza 1) y baja morosidad (estado de la naturaleza 2). En caso de que exista alta morosidad, el 10% de los préstamos concedidos corresponderían a clientes que se declaran insolventes, por lo que no le pagarían nada al banco; en caso de que exista baja morosidad, esa proporción se reduce al 5%. El banco tiene 100 u.m. para invertir.

- a) Calcule la restricción presupuestaria del banco y represéntela gráficamente.
- b) Si el dueño del banco fuera averso al riesgo, calcule la probabilidad de alta morosidad para que el banco dejara de conceder préstamos. Explique su respuesta y represente la situación en el gráfico del apartado anterior.
- c) Suponga que la función de utilidad del propietario del banco es $u(c) = Lnc$ y que la probabilidad de alta morosidad es menor que la del apartado b). Calcule la cantidad de dinero que el banco dedicaría a conceder préstamos en función de la probabilidad de alta morosidad.

15. Considere un transportista cuya renta es igual a los beneficios que genera su empresa. La empresa genera unos ingresos de 1.500 u.m. y los costes están asociados a la compra de combustible. La empresa necesita comprar 500 litros de gasoil para llevar a cabo sus actividades. Se sabe que con probabilidad 0,6 el precio del gasoil va a ser 1 u.m./litro y con probabilidad 0,4 va a ser 2 u.m./litro. El transportista tiene la opción de hacer un contrato en el mercado de futuros que le permitiría comprar parte (o todo) el gasoil que necesita a un precio conocido $P_F \in (1, 2)$.

- a) Calcule y represente la restricción presupuestaria del transportista. (**Nota:** llame X a la cantidad de gasoil que el transportista compra en el mercado de futuros).
- b) Explique qué ocurriría si el transportista compra todo el gasoil en el mercado de futuros.

- c) Suponga que el precio del gasoil en el mercado de futuros es $P_F = 1,5$ u.m./litro. Calcule la cantidad de gasoil que compraría el transportista en el mercado de futuros si su función de utilidad fuera $u(c) = Lnc$.

16. Arminda, que es la dueña de una piscina deportiva, posee una riqueza de 2.000 u.m. Si alguien sufre un accidente en sus instalaciones, lo que puede ocurrir con una probabilidad de 0,125, la demandarán por 1.000 u.m. y tendrá que pagar dicha cantidad. La empresaria puede comprar un seguro a un precio de 0,3 u.m. por unidad monetaria de cobertura.

- Si su función de utilidad es $u(c) = c^{1/2}$, explique, ayudándose de un gráfico, qué decisión tomará Arminda en este caso.
- Explique cómo cambiaría su decisión si la probabilidad de que alguien tenga un accidente en la piscina fuera de 0,25. Represente la situación en el gráfico del apartado anterior.
- Si Arminda fuera neutral al riesgo, explique qué decisión tomará, teniendo en cuenta los datos del enunciado. Asimismo, calcule la mínima probabilidad de que alguien sufra un accidente para que Arminda cambie de decisión. Utilice gráficos como apoyo a sus respuestas.

17. Eustaquio, que es neutral al riesgo, se enfrenta a una situación de riesgo que implica una probabilidad del 4% de perder toda su riqueza (W).

- Obtenga la expresión analítica de su restricción presupuestaria y la cantidad de seguro que contratará si se le ofrece un seguro actuarialmente equilibrado. Represente la situación en un gráfico con curvas de indiferencia.
- Si la prima de la póliza del seguro es $q=0,02$, obtenga la cantidad de seguro que contratará Eustaquio en este caso. Explique su respuesta en términos económicos y represente la situación en un gráfico con curvas de indiferencia.
- Responda a los apartados anteriores si el Eustaquio fuera amante del riesgo, siendo su función de utilidad $u(c) = c^2$.

18. Doña Pitita Pijarrez posee una excelente colección de joyas y va a hacer una fiesta en su mansión, donde se pondrá hasta el último diamante. No obstante, le han dicho que a su fiesta puede asistir el famoso ladrón de joyas "La Pantera Rosa". La fortuna de la Sra. Pijarrez asciende a 324 millones de euros y su colección de joyas está valorada en 224 millones de euros (tome millones de euros como unidad monetaria). Hay dos estados de la naturaleza: no le roban las joyas a la Sra. Pijarrez (estado de la naturaleza 1) o le roban todas las joyas (estado de la naturaleza 2). La probabilidad de cada estado de la naturaleza es del 50%. Suponga que la Sra. Pijarrez puede contratar un seguro de robo de sus joyas por el que tendría que pagar una prima de q unidades monetarias por unidad de indemnización.

- Obtenga la restricción presupuestaria de la Sra. Pijarrez y representela gráficamente.
- Si la Sra. Pijarrez fuera adversa al riesgo, obtenga el valor de la prima del seguro para el que se aseguraría totalmente. Calcule, asimismo, los consumos contingentes a los estados de la naturaleza, en este caso.
- Suponga que un amigo de la Sra. Pijarrez, el Sr. Benito Mafiasoli, sabe cómo contactar con La Pantera Rosa y puede "sobornarlo" para que no le robe a la Sra. Pijarrez sus joyas. Suponiendo que no hay ningún seguro disponible y que la función de utilidad de la Sra. Pijarrez es $u(c) = \sqrt{c}$, calcule cuánto estaría dispuesta a pagar en concepto de soborno para que no le robaran.
- Suponga que la prima del seguro es $3/8$. Calcule la cantidad de seguro que contrataría la Sra. Pijarrez, así como los consumos contingentes a los estados de la naturaleza.

19. Un individuo posee 10.000€ de los que puede invertir una cantidad X en acciones de una empresa reparadora de casas, que ofrece una rentabilidad del 5% en caso de que no haya inundaciones y del 25% en caso de que haya inundaciones. El resto del dinero, $10.000-X$, lo puede depositar en un banco a un tipo de

interés del 10% (cuando $10.000-X$ es una cifra negativa se interpreta como un préstamo al 10% de interés). Un préstamo le permitiría al individuo invertir más de 10.000€ en acciones. La probabilidad de que haya inundaciones es del 25%. Además, cuando hay inundaciones el agente tiene que desembolsar 4.000€ para reparar su casa.

- Calcule la restricción presupuestaria y represéntela gráficamente.
- Determine la pendiente de la restricción presupuestaria. Calcule el valor de la Relación Marginal de Sustitución (entre consumo cuando no hay inundaciones y consumo cuando sí las hay) en la línea de certeza.
- Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, explique la decisión de este individuo si fuera averso al riesgo.
- Suponga que, debido al calentamiento global de la Tierra, la probabilidad de inundaciones aumenta. En este caso, obtenga la cantidad que invertiría en acciones si el individuo fuera neutral al riesgo.

20. Suponga una relación contractual entre un agricultor, individuo A , y un terrateniente, individuo B . El terrateniente quiere contratar al agricultor para que éste trabaje sus tierras. Supongamos que la única incertidumbre en este problema es el estado de la Naturaleza (y no el esfuerzo o actuación de los agentes, para obviar el problema de incentivos), que puede suponer un año de buena cosecha, en cuyo caso el consumo es C_1 , o un año de mala cosecha, siendo C_2 el consumo en este otro caso. Obviamente $C_1 > C_2$. Las funciones de utilidad de los individuos son las siguientes: $U(C_A) = -e^{-AC}$ y $U(C_B) = -e^{-BC}$.

- Calcule la aversión absoluta al riesgo (AAR) de cada individuo.
- Obtenga la curva de contratos e indique qué modalidad contractual sería eficiente en la distribución de riesgos. Represente la situación gráficamente.

21. Un terrateniente (T) y un agricultor (A) se plantean llegar a un acuerdo para que este último cultive las tierras del primero. Las funciones de utilidad del terrateniente y del agricultor, vienen dadas, respectivamente, por las siguientes expresiones $u(c_T) = -e^{-Tc}$ y $u(c_A) = -e^{-Ac}$. Existen dos estados de la naturaleza: “buena cosecha”, que supone unos ingresos de 500 u.m., y “mala cosecha”, con unos ingresos de 250 u.m.

- Calcule la aversión absoluta al riesgo (AAR) de cada individuo.
- Obtenga la curva de contratos e indique qué modalidad contractual sería eficiente en la distribución de riesgos. Represente la situación gráficamente.
- Explique analítica y razonadamente qué tendría que ocurrir con el grado de aversión al riesgo de estos individuos para que el punto medio de la Caja de Edgeworth fuera un punto eficiente en la distribución de riesgos en esta economía.

22. Considere una cooperativa formada por dos agricultores que producen plátanos cuya producción, y (medida en toneladas), depende de los miles de litros de agua utilizada, “ A ”, de acuerdo con la siguiente función:

$$y = \begin{cases} 2A^2 & \text{si } A \leq 3 \\ 18 & \text{si } A \geq 3 \end{cases}$$

Hay dos estados de la naturaleza: *año lluvioso*, donde $A=4$ (miles de litros), y *año seco*, donde $A=1$ (miles de litros). La probabilidad de que un año sea lluvioso es del 50%. La cantidad de dinero que obtiene la cooperativa por **una** tonelada de plátanos es 10.000 € y la función de utilidad de cada uno de los agricultores es $u(c) = \sqrt{c}$.

- Determine la distribución eficiente de los ingresos de la cooperativa entre ambos agricultores y represéntela en una Caja de Edgeworth.

- b) La situación de partida supone que los dos agricultores se reparten los ingresos a partes iguales, explique si este reparto es eficiente.
- c) Dada la asignación del apartado anterior, determine el equivalente certeza y la prima de riesgo de cada uno de los dos agricultores en dicha asignación.
- d) Suponga que construyendo un embalse se pueden conseguir 2 unidades (miles de litros) más de agua en cada estado de la naturaleza. Suponiendo que los dos agricultores van a seguir repartiéndose los ingresos a partes iguales, calcule la cantidad máxima de dinero que estaría dispuesto a pagar cada agricultor por este embalse. Si el embalse cuesta 70.000€ explique si sería eficiente construirlo.

23. Un agricultor y un terrateniente se reparten los ingresos de una finca de plátanos. Estos ingresos son 120 u.m. en caso de año no ventoso y 60 u.m. en caso de año ventoso. Las funciones de utilidad del agricultor y el terrateniente son idénticas e iguales a $u(c) = -\frac{1}{c}$.

- a) Calcular la curva de contrato y representarla gráficamente.
- b) Suponga que los ingresos de la finca se reparten entre el agricultor y el terrateniente de acuerdo con el sistema de aparcería: tanto el agricultor como el terrateniente reciben una porción constante de los ingresos. Explique si este sistema de aparcería es eficiente desde el punto de vista de la distribución de riesgos.
- c) Suponga que la probabilidad de que el año sea ventoso es del 50%. El agricultor podría obtener en el sector servicios un salario de 40 u.m. Suponiendo que el terrateniente le paga al agricultor la proporción de los ingresos mínima para que acepte el contrato, calcule la fracción de los ingresos que se llevaría el agricultor y la que se llevaría el terrateniente.
- d) Suponga que si se construye un invernadero, el viento no afecta a la producción de plátanos, por lo que los ingresos de la finca serían 120 u.m. con certeza. Sabiendo que, en este caso, el terrateniente sólo tendría que pagar al agricultor su coste de oportunidad, calcule cuánto estaría dispuesto a pagar (como máximo) por poner el invernadero.