Universidad de La Laguna
Departamento de Análisis Económico

Fernando Perera Tallo
Olga María Rodríguez Rodríguez

Tema 1
Equilibrio general y fallos de mercado

Ejercicio 4:

Considere una economía de intercambio puro con dos consumidores (1 y 2) y dos bienes (*x* e *y*). Las preferencias de los consumidores vienen dadas por las siguientes funciones de utilidad: $u^1(c_x^1, c_y^1) = \ln(c_x^1) + \ln(c_y^1)$; $u^2(c_x^2, c_y^2) = 2\ln(c_x^2) + \ln(c_y^2)$. La dotación de bienes de los consumidores es como sigue: el consumidor 1 tiene una unidad de cada bien, es decir $\left(q_x^1, q_y^1\right) = (1,1)$; el consumidor 2 tiene una unidad del bien *x* y tres del bien *y*, esto es $\left(q_x^2, q_y^2\right) = (1,3)$.

a) Determine y represente la curva de contrato de esta economía.
b) Defina y calcule el equilibrio Walrasiano, normalizando el precio del bien *x* a la unidad.
c) Determine el vector de precios del equilibrio Walrasiano si normalizamos el precio del bien *y* a la unidad. Determine el vector de precios del equilibrio Walrasiano si normalizamos de tal manera que el índice de precios $\frac{p_x}{3} + \frac{2p_y}{3}$ sea uno.
d) Suponga que el concepto de equidad en esta sociedad es tal que la equidad se maximiza cuando la economía doméstica más pobre (la 1) está indiferente entre su cesta de consumo y la cesta de consumo de la economía doméstica más rica. Determine la asignación eficiente que maximizaría la equidad en esta sociedad.
e) Explique si se podría implementar esta dotación como un equilibrio Walrasiano a través de una política redistributiva. En caso afirmativo, ¿cuál sería el vector de precios de equilibrio?
f) Suponga que para implementar la asignación descrita en el apartado d) se pone un impuesto/subvención de suma fija a los dos consumidores. Defina de nuevo el equilibrio y calcule el impuesto/subvención que se le pondría a cada uno de los consumidores.

Solución:

a) Determine y represente la curva de contrato de esta economía.

Para obtener la curva de contrato de esta economía debemos resolver el siguiente problema de optimización:

$$\underset{c_x^1, c_y^1 c_x^2, c_y^2}{Max} \ln c_x^1 + \ln c_y^1$$

$$\begin{aligned} s.a: & \; 2\ln c_x^2 + \ln c_y^2 \geq \hat{u}^2 \\ & \; c_x^1 + c_x^2 \leq q_x^1 + q_x^2 = q_x = 2 \\ & \; c_y^1 + c_y^2 \leq q_y^1 + q_y^2 = q_y = 4 \end{aligned}$$

La función Lagrangiana correspondiente a este problema de maximización es la siguiente:

$$\ell = \ln c_x^1 + \ln c_y^1 + \lambda^2 (2\ln c_x^2 + \ln c_y^2 - \hat{u}^2) + \wp_x (2 - c_x^1 - c_x^2) + \wp_y (4 - c_y^1 - c_y^2)$$

Las condiciones de primer orden para solución interior son las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial c_x^1} &= \frac{1}{c_x^1} - \wp_x = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial c_y^1} &= \frac{1}{c_y^1} - \wp_y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow RMS_{x,y}^1 (c_x^1, c_y^1) = \frac{c_y^1}{c_x^1} = \frac{\wp_x}{\wp_y}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial c_x^2} &= \lambda^2 \frac{2}{c_x^2} - \wp_x = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial c_y^1} &= \lambda^2 \frac{1}{c_y^2} - \wp_y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow RMS_{x,y}^2 (c_x^2, c_y^2) = \frac{2c_y^2}{c_x^2} = \frac{\wp_x}{\wp_y}$$

Las anteriores condiciones de 1[er] orden de la función Lagrangiana indican que, para cada uno de los consumidores de esta economía, la relación marginal de substitución entre el bien *x* y el bien *y* tiene que ser igual al precio (sombra) relativo entre ambos bienes. A partir de estas dos ecuaciones obtenemos la condición de eficiencia asignativa del consumo:

$$RMS_{x,y}^1 (c_x^1, c_y^1) = \frac{c_y^1}{c_x^1} = \frac{2c_y^2}{c_x^2} = RMS_{x,y}^2 (c_x^2, c_y^2)$$

Sustituyendo las condiciones de factibilidad ($c_x^1 + c_x^2 \leq 2$ y $c_y^1 + c_y^2 \leq 4$) se obtiene la curva de contrato:

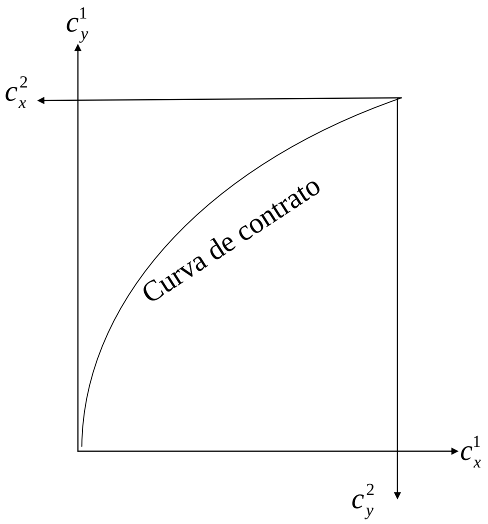
$$\frac{c_y^1}{c_x^1} = \frac{2(4 - c_y^1)}{2 - c_x^1} \Rightarrow 2c_y^1 - c_y^1 c_x^1 = 8c_x^1 - 2c_y^1 c_x^1 \Rightarrow 2c_y^1 + c_y^1 c_x^1 = 8c_x^1 \Rightarrow \boxed{c_y^1 = \frac{8c_x^1}{2 + c_x^1}}$$

Para analizar la forma de esta curva de contrato, calculemos la pendiente y la curvatura:

Pendiente: $\dfrac{\partial c_y^1}{\partial c_x^1} = \dfrac{8(2 + c_x^1) - 8c_x^1}{(2 + c_x^1)^2} = \dfrac{16}{(2 + c_x^1)^2} > 0$: pendiente positiva.

Curvatura: $\dfrac{\partial^2 c_y^1}{\partial (c_x^1)^2} = -\dfrac{32}{(2 + c_x^1)^3} < 0$: cóncava.

La representación gráfica de la curva de contrato, en este caso, es la siguiente:



b) Defina y calcule el equilibrio Walrasiano, normalizando el precio del bien *x* a la unidad.

Un equilibrio Walrasiano es una asignación $(c_x^1, c_y^1, c_x^2, c_y^2)$, llamada asignación de equilibrio, y un vector de precios (p_x, p_y), llamado vector de precios de equilibrio, tal que:

- Los consumidores maximizan su utilidad:

$$RMS_{x,y}^1(c_x^1, c_y^1) = \frac{c_y^1}{c_x^1} = \frac{p_x}{p_y}$$
(EW.1)

$$p_x c_x^1 + p_y c_y^1 = p_x q_x^1 + p_y q_y^1 = p_x + p_y$$
(EW.2)

$$RMS_{x,y}^2(c_x^2, c_y^2) = \frac{2c_y^2}{c_x^2} = \frac{p_x}{p_y} \qquad \text{(EW.3)}$$

$$p_x c_x^2 + p_y c_y^2 = p_x q_x^2 + p_y q_y^2 = p_x + 3p_y$$
(EW.4)

- Los mercados se vacían:

$$c_x^1 + c_x^2 = q_x^1 + q_x^2 = q_x = 2$$
(EW.5)

$$c_y^1 + c_y^2 = q_y^1 + q_y^2 = q_y = 4$$
(EW.6)

Usando las ecuaciones (EW.1) y (EW.2) obtenemos los consumos de los bienes *x* e y por parte del consumidor 1:

Así, (EW.1) $\Rightarrow c_y^1 = \frac{p_x}{p_y} c_x^1$

(1)

Sustituyendo (1) en la restricción presupuestaria del agente 1 (EW.2), obtenemos el consumo del bien *x* por parte del consumidor 1:

$$p_x c_x^1 + p_y \frac{p_x}{p_y} c_x^1 = p_x + p_y \Rightarrow \boxed{c_x^1 = \frac{p_x + p_y}{2p_x}}$$

(2a)

Sustituyendo la ecuación (2a) en (1) tenemos el consumo del bien *y* por parte del consumidor 1:

$$c_y^1 = \frac{p_x}{p_y}\frac{p_x + p_y}{2p_x} \Rightarrow \boxed{c_y^1 = \frac{p_x + p_y}{2p_y}}$$

(2b)

Usando las ecuaciones (EW.3) y (EW.4) se obtienen los consumos de los bienes *x* e *y* por parte del consumidor 2, de manera análoga al caso del consumidor 1:

Así, (EW.3) $\Rightarrow c_y^2 = \dfrac{p_x}{2p_y} c_x^2$

(3)

Sustituyendo (3) en la restricción presupuestaria del agente 2 (EW.4), obtenemos el consumo del bien *x* por parte del consumidor 2:

$$p_x c_x^2 + p_y \frac{p_x}{2p_y} c_x^2 = p_x + 3p_y \Rightarrow p_x c_x^2 + \frac{p_x}{2} c_x^2 = p_x + 3p_y \Rightarrow \boxed{c_x^2 = \frac{2}{3}\frac{(p_x + 3p_y)}{p_x}} \quad (4a)$$

Sustituyendo la ecuación (4a) en (3) tenemos el consumo del bien *y* por parte del consumidor 2:

$$c_y^2 = \frac{p_x}{2p_y}\left[\frac{2}{3}\frac{(p_x + 3p_y)}{p_x}\right] \Rightarrow \boxed{c_y^2 = \frac{p_x + 3p_y}{3p_y}}$$

(4b)

Usando los consumos del bien *x* por parte de los dos agentes (ecuaciones 2a y 4a) en la condición de vaciado del mercado del bien *x* (EW.5) y normalizando $p_x = 1$ obtenemos el precio de equilibrio del bien *y*:

(EW.5) es: $c_x^1 + c_x^2 = 2$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{p_y}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} + 2p_y\right) = 2 \Rightarrow \frac{7}{6} + \frac{5p_y}{2} = 2 \Rightarrow p_y = \frac{1}{3}$$

(5)

Substituyendo el precio de equilibrio del bien *y* en el consumo de los bienes *x* e *y* por parte de los dos agentes (ecuaciones 2a, 2b, 4a y 4b) y teniendo en cuenta que hemos normalizado el precio del bien *x* a la unidad ($p_x = 1$), se obtienen $c_x^1, c_y^1, c_x^2, c_y^2$:

$$c_x^1 = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} \Rightarrow c_x^1 = \frac{2}{3}; \qquad c_y^1 = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2\frac{1}{3}} \Rightarrow c_y^1 = 2$$

$$c_x^2 = \frac{2}{3}\frac{\left(1 + 3\frac{1}{3}\right)}{1} \Rightarrow c_x^2 = \frac{4}{3}; \qquad c_y^2 = \frac{1 + 3\frac{1}{3}}{3\frac{1}{3}} \Rightarrow c_y^2 = 2$$

Por lo tanto, el equilibrio Walrasiano viene dado por:

$$\{(c_x^1, c_y^1, c_x^2, c_y^2); (p_x, p_y)\} = \left\{\left(\frac{2}{3}, 2, \frac{4}{3}, 2\right); \left(1, \frac{1}{3}\right)\right\}$$

c) Determine el vector de precios del equilibrio Walrasiano si normalizamos el precio del bien y a la unidad. Determine el vector de precios del equilibrio Walrasiano si normalizamos de tal manera que el índice de precios $\frac{p_x}{3}+\frac{2p_y}{3}$ sea uno.

- Si normalizamos el precio del bien y a la unidad, el vector de precios de equilibrio es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} p_y = 1 \\ \frac{p_y}{p_x} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow p_x = 3 \Rightarrow (p_x, p_y) = (3{,}1)$$

- Si normalizamos de tal manera que el índice de precios $\frac{p_x}{3}+\frac{2p_y}{3}$ sea uno, entonces, el vector de precios es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{p_x}{3}+\frac{2p_y}{3}=1 \\ \frac{p_y}{p_x} = \frac{1}{3} \Rightarrow p_y = \frac{p_x}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p_x}{3}+\frac{2}{3}\frac{1}{3}p_x = 1 \Rightarrow \frac{5}{9}p_x = 1 \Rightarrow p_x = \frac{9}{5} \Rightarrow p_y = \frac{1}{3}\frac{9}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$(p_x, p_y) = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

d) Suponga que el concepto de equidad en esta sociedad es tal que la equidad se maximiza cuando la economía doméstica más pobre (la 1) está indiferente entre su cesta de consumo y la cesta de consumo de la economía doméstica más rica. Determine la asignación eficiente que maximizaría la equidad en esta sociedad.

Para determinar la asignación eficiente que maximizaría la equidad en esta sociedad (donde se ha definido equidad de la forma que indica el enunciado), tendremos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$u^1(c_x^1, c_y^1) = u^1(c_x^2, c_y^2) \Rightarrow \ln c_x^1 + \ln c_y^1 = \ln c_x^2 + \ln c_y^2 \quad \text{(E.1)}$$

$$c_x^1 + c_x^2 = 2 \quad \text{(E.2)}$$

$$c_y^1 + c_y^2 = 4 \quad \text{(E.3)}$$

$$RMS_{x,y}^1(c_x^1, c_y^1) = RMS_{x,y}^2(c_x^2, c_y^2) \Rightarrow \frac{c_y^1}{c_x^1} = \frac{2c_y^2}{c_x^2}$$

(E.4a)

Sustituyendo las restricciones de factibilidad (ecuaciones E.2 y E.3) en la ecuación (E.4a), se obtiene la curva de contratos de esta economía, que ya habíamos calculado en el apartado a): $c_y^1 = \frac{8c_x^1}{2+c_x^1}$.

Así, el sistema de ecuaciones anterior lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$u^1(c_x^1, c_y^1) = u^1(c_x^2, c_y^2) \Rightarrow \ln c_x^1 + \ln c_y^1 = \ln c_x^2 + \ln c_y^2 \quad \text{(E.1)}$$

$$c_x^1 + c_x^2 = 2$$

(E.2)

$$c_y^1 + c_y^2 = 4$$

(E.3)

$$c_y^1 = \frac{8c_x^1}{2 + c_x^1}$$

(E.4b)

Quitando logaritmos de la ecuación (E.1) y utilizando (E.2) y (E.3), se tiene:

$$c_x^1 c_y^1 = c_x^2 c_y^2 \Rightarrow c_x^1 c_y^1 = \left(2 - c_x^1\right)\left(4 - c_y^1\right) \Rightarrow c_x^1 c_y^1 = 8 - 2c_y^1 - 4c_x^1 + c_x^1 c_y^1 \Rightarrow 2c_y^1 = 8 - 4c_x^1 \Rightarrow$$

$$c_y^1 = 4 - 2c_x^1$$

Sustituyendo esta última expresión en (E.4b), se obtiene:

$$4 - 2c_x^1 = \frac{8c_x^1}{2 + c_x^1} \Rightarrow 8 - 2\left(c_x^1\right)^2 = 8c_x^1 \Rightarrow \left(c_x^1\right)^2 + 4c_x^1 - 4 = 0 \Rightarrow c_x^1 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1.(-4)}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{-4 + 4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow c_x^1 = 2\left(\sqrt{2} - 1\right) \Rightarrow c_y^1 = 4 - 2\left[2\left(\sqrt{2} - 1\right)\right] = 4 - 4\sqrt{2} + 4 \Rightarrow \Rightarrow c_y^1 = 4\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

Utilizando las condiciones de factibilidad (ecuaciones E.2 y E.3), se obtiene:

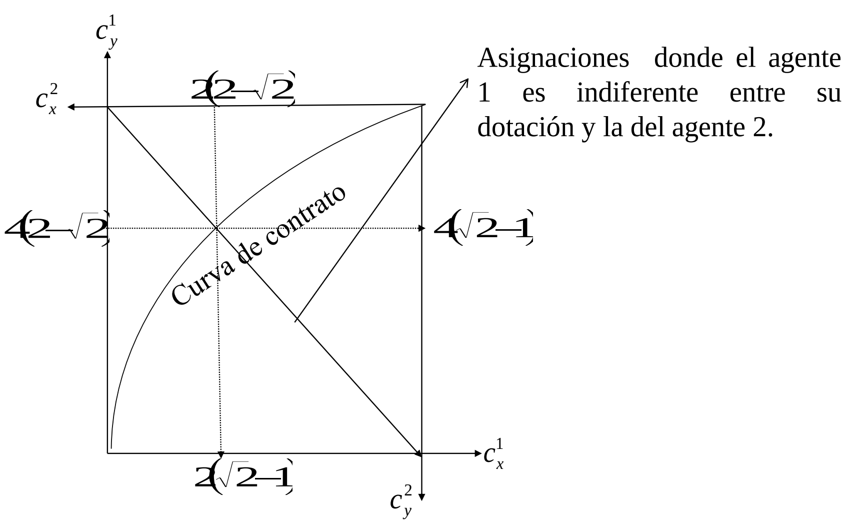
$$c_x^2 = 2 - 2\left(\sqrt{2} - 1\right) \Rightarrow c_x^2 = 2\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

$$c_y^2 = 4 - 4\left(2 - \sqrt{2}\right) \Rightarrow c_y^2 = 4\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Por lo tanto, la asignación eficiente que maximizaría la equidad en esta economía sería la siguiente:

$$(c_x^1, c_y^1, c_x^2, c_y^2) = \left(2\left(\sqrt{2} - 1\right), 4\left(2 - \sqrt{2}\right), 2\left(2 - \sqrt{2}\right), 4\left(\sqrt{2} - 1\right)\right)$$

Gráficamente:



e) Explique si se podría implementar esta dotación como un equilibrio Walrasiano a través de una política redistributiva. En caso afirmativo, ¿cuál sería el vector de precios de equilibrio?

Sí se podría implementar: según el Segundo Teorema de la Economía del Bienestar, cualquier asignación eficiente en sentido de Pareto (como por ejemplo la del apartado anterior) puede ser implementada como un equilibrio Walrasiano.

El vector de precios de equilibrio se obtendría usando la definición de equilibrio:

$$\frac{p_x}{p_y} = RMS^1_{x,y}\left(c^1_x, c^1_y\right) = \frac{c^1_y}{c^1_x} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = RMS^1_{x,y}\left(2\left(\sqrt{2}-1\right), 4\left(2-\sqrt{2}\right)\right) = \frac{4\left(2-\sqrt{2}\right)}{2\left(\sqrt{2}-1\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)} \Rightarrow 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = 2\sqrt{2}$$

Normalizando $p_x = 1 \Rightarrow \boxed{\left(p_x, p_y\right) = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}$

f) Suponga que para implementar la asignación descrita en el apartado d) se pone un impuesto/subvención de suma fija a los dos consumidores. Defina de nuevo el equilibrio y calcule el impuesto/subvención que se le pondría a cada uno de los consumidores.

Definición: un equilibrio Walrasiano es una asignación $(c^1_x, c^1_y, c^2_x, c^2_y)$, llamada asignación de equilibrio, y un vector de precios (p_x, p_y), llamado vector de precios de equilibrio, tal que:

- Los consumidores maximizan su utilidad:

$$RMS^1_{x,y}(c^1_x, c^1_y) = \frac{c^1_y}{c^1_x} = \frac{p_x}{p_y}$$
(EW.1)'
$$p_x c^1_x + p_y c^1_y = p_x q^1_x + p_y q^1_y + tr^1 = p_x + p_y + tr^1$$
(EW.2)'
$$RMS^2_{x,y}(c^2_x, c^2_y) = \frac{2c^2_y}{c^2_x} = \frac{p_x}{p_y} \qquad \text{(EW.3)'}$$
$$p_x c^2_x + p_y c^2_y = p_x q^2_x + p_y q^2_y - T^2 = p_x + 3p_y - T^2$$
(EW.4)'

- Se cumple la restricción presupuestaria del gobierno:

$$tr^1 = T^2$$
(EW.5)'

- Los mercados se vacían:
  - $c^1_x + c^2_x = q^1_x + q^2_x = q_x = 2$
    (EW.6)'
  - $c^1_y + c^2_y = q^1_y + q^2_y = q_y = 4$
    (EW.7)'

Sabemos que $(c_x^1, c_y^1, c_x^2, c_y^2) = \left(2\left(\sqrt{2}-1\right), 4\left(2-\sqrt{2}\right), 2\left(2-\sqrt{2}\right), 4\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$ es la asignación de consumo de equilibrio, mientras que $\left(p_x, p_y\right) = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ es el vector de precios de equilibrio obtenidos en el apartado d). Por lo tanto, $\frac{p_y}{p_x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

De la ecuación (EW.1)’ del agente 1, obtenemos que $c_y^1 = \frac{p_x}{p_y} c_x^1$. Sustituyendo esta expresión en (EW.2)’, tenemos: $c_x^1 = \frac{p_x + p_y + tr^1}{2p_x} \Rightarrow c_x^1 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{p_y}{p_x} + tr^1\right] \Rightarrow$

$$2\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + tr^1\right] \Rightarrow \boxed{tr^1 = 0{,}303 = T^2}$$

Ejercicio 5:

Sea una economía con dos empresas. La empresa 1 produce el bien *x* de acuerdo con la función de producción: $F_x(L_x) = \sqrt{L_x}$; y la empresa 2 produce el bien *y* de acuerdo con la función de producción: $F_y(L_y, q_x) = \sqrt{\dfrac{L_y}{1+0{,}06(q_x)^2}}$; donde L_x y L_y son, respectivamente, las cantidades utilizadas en la producción de los bienes *x* e *y* del único factor existente en la economía (L), del que hay una dotación inicial de 800 unidades. El único consumidor de esta economía tiene unas preferencias representadas por la siguiente función de utilidad: $u(c_x, c_y) = \ln(c_x) + \ln(c_y)$.

a) Obtenga la expresión de la Frontera de Posibilidades de Producción (*FPP*) de esta economía.
b) Calcule las cantidades de producción óptimo paretianas (*OP*) de esta economía.
c) Calcule las cantidades de producción correspondientes al equilibrio Walrasiano (*EW*).
d) ¿Coinciden las cantidades de producción óptimo paretianas y de equilibrio Walrasiano? Explique su respuesta en términos económicos.

Solución:

a) Obtenga la expresión de la Frontera de Posibilidades de Producción (*FPP*) de esta economía.

Las ecuaciones que deben satisfacerse para obtener la Frontera de Posibilidades de Producción de esta economía son las siguientes: las funciones de producción de ambas empresas y la restricción de dotación de factor.

Función de producción de la empresa que produce *x*:

$$F_x(L_x) = \sqrt{L_x}$$

Función de producción de la empresa que produce *y*:

$$F_y(L_y, q_x) = \sqrt{\frac{L_y}{1+0{,}06(q_x)^2}}$$

Restricción de dotación de factor:

$$\bar{L} = L_x + L_y = 800$$

Operando con estas expresiones obtenemos:

$$q_x = F_x(L_x) = \sqrt{L_x} \rightarrow L_x = (q_x)^2$$
(a.1)

$$q_y = F_y(L_y, q_x) = \sqrt{\frac{L_y}{1+0{,}06(q_x)^2}} \rightarrow (q_y)^2 = \frac{L_y}{1+0{,}06(q_x)^2} \rightarrow$$
$$L_y = (q_y)^2\left(1+0{,}06(q_x)^2\right)$$
(a.2)

$$L_x + L_y = 800 \tag{a.3}$$

Sustituyendo (a.1) y (a.2) en (a.3):

$\boxed{(q_x)^2 + (q_y)^2\left[1 + 0{,}06(q_x)^2\right] = 800}$ (FPP) ó $\boxed{q_y = \sqrt{\dfrac{800 - (q_x)^2}{1 + 0{,}06(q_x)^2}}}$ (FPP)

b) Calcule las cantidades de producción óptimo paretianas (OP) de esta economía.

El problema de optimización que debe resolverse para obtener el Óptimo Paretiano de esta economía es el siguiente: Maximizar la utilidad del único consumidor de la economía sujeto a la restricción impuesta por la Frontera de Posibilidades de Producción. Esto es:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ u(c_x, c_y) = ln(c_x) + ln(c_y) \\ s.a\ \ (q_x)^2 + (q_y)^2\left[1 + 0{,}06(q_x)^2\right] = 800 \\ c_x = q_x \quad \text{y} \quad c_y = q_y \end{array}\right\}$$

La función auxiliar lagrangiana del problema de optimización es la siguiente:

$$\ell(q_x, q_y, \lambda) = ln(q_x) + ln(q_y) - \lambda((q_x)^2 + (q_y)^2\left[1 + 0{,}06(q_x)^2\right] - 800)$$

Las condiciones de primer orden de máximo interior son las siguientes:

$$\frac{\partial \ell}{\partial q_x} = 0 \rightarrow \frac{1}{q_x} - 2\lambda q_x - 2\lambda 0{,}06 q_x (q_y)^2 = 0 \rightarrow \frac{1}{q_x} - 2\lambda q_x\left[(1 + 0{,}06(q_y)^2\right] = 0$$
(b.1)

$$\frac{\partial \ell}{\partial q_y} = 0 \rightarrow \frac{1}{q_y} - 2\lambda q_y\left[(1 + 0{,}06(q_x)^2\right] = 0$$
(b.2)

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow (q_x)^2 + (q_y)^2\left[1 + 0{,}06(q_x)^2\right] = 800 \tag{b.3}$$

Despejando λ de (b.1) y (b.2) y operando, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} (\text{b.1}): \lambda = \dfrac{\frac{1}{q_x}}{2q_x\left[1 + 0{,}06(q_y)^2\right]} \\ (\text{b.2}): \lambda = \dfrac{\frac{1}{q_y}}{2q_y\left[1 + 0{,}06(q_x)^2\right]} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\frac{1}{q_x}}{2q_x\left[1 + 0{,}06(q_y)^2\right]} = \frac{\frac{1}{q_y}}{2q_y\left[1 + 0{,}06(q_x)^2\right]}$$

$$(q_x)^2\left[1+0{,}06(q_y)^2\right]=(q_y)^2\left[1+0{,}06(q_x)^2\right]\rightarrow q_x=q_y$$
(b.4)

Sustituyendo (b.4) en (b.3), tenemos:

$$(q_x)^2+(q_y)^2\left[1+0{,}06(q_x)^2\right]=800\rightarrow(q_x)^2+(q_x)^2+0{,}06(q_x)^4=800\rightarrow$$

$$2(q_x)^2+0{,}06(q_x)^4=800$$

Haciendo el cambio de variable: $(q_x)^2=z$, tenemos:

$0{,}06z^2+2z-800=0$. Resolviendo, tenemos:

$$z=\frac{-2\pm\sqrt{4-(4\cdot 0{,}06\cdot(-800))}}{2\cdot 0{,}06}=\frac{-2\pm\sqrt{4+192}}{0{,}12}=$$

$$z_1=\frac{-2+14}{0{,}12}=100$$

$$z_2=\frac{-2-14}{0{,}12}<0$$

Teniendo en cuenta que la producción negativa no tiene sentido económico, deshaciendo el cambio de variable, y considerando la ecuación (b.4), tenemos que las producciones óptimo paretianas de ambos bienes son las siguientes:

$$z=100\rightarrow q_x=\sqrt{z}=10$$

Cantidades de producción en el *OP*: $\boxed{q_x^{OP}=q_y^{OP}=10}$. Por lo que: $\boxed{c_x^{OP}=c_y^{OP}=10}$

Las funciones de producción de las empresas permiten obtener las cantidades de factor que emplean cada una de ellas en la producción del bien que fabrican. Así, usando la ecuación (a.1) del apartado a), tenemos:

$L_x=(q_x)^2=100\rightarrow\boxed{L_x^{OP}=100}$ Cantidad de factor utilizada en la producción óptimo paretiana del bien *x*.

Utilizando la ecuación (a.2) del apartado a), tenemos:

$L_y=(q_y)^2\left[1+0{,}06(q_x)^2\right]=100(1+0{,}06\cdot 100)=700\rightarrow\boxed{L_y^{OP}=700}$ Cantidad de factor utilizada en la producción óptimo paretiana del bien y.

c) Calcule las cantidades de producción correspondientes al equilibrio Walrasiano (*EW*).

- Resolviendo el problema de optimización para cada una de las empresas (maximización del beneficio condicionada a la restricción tecnológica de la empresa), tenemos:

- Para la empresa *x*:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ \pi_x = p_x q_x - wL_x \\ s.a \quad q_x = \sqrt{L_x} \end{array}\right\} Max \quad \pi_x = p_x q_x - w(q_x)^2$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\partial \pi_x}{\partial q_x} = p_x - 2wq_x = 0 \rightarrow w = \frac{p_x}{2q_x}$$

(c.1)

- Para la empresa *y*:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ \pi_y = p_y q_y - wL_y \\ s.\,a \quad q_y = \sqrt{\dfrac{L_y}{1+0{,}06(q_x)^2}} \end{array}\right\} Max\ \pi_y = p_y q_y - w\left[(q_y)^2\left(1+0{,}06(q_x)^2\right)\right]$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\partial \pi_y}{\partial q_y} = p_y - 2wq_y\left[1+0{,}06(q_x)^2\right] = 0 \rightarrow w = \frac{p_y}{2q_y\left[1+0{,}06(q_x)^2\right]}$$

(c.2)

Igualando (c.1) y (c.2), tenemos:

$$\frac{p_x}{2q_x} = \frac{p_y}{2q_y\left[1+0{,}06(q_x)^2\right]} \rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{q_x}{q_y\left[1+0{,}06(q_x)^2\right]}$$

(c.3)

- Resolviendo el problema de optimización del consumidor (maximizar su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria), tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ \ u(c_x, c_y) = ln(c_x) + ln(c_y) \\ s.\,a \quad p_x c_x + p_y c_y = p_x q_x + p_y q_y \end{array}\right\}$$

Nota: Recuerde que, en equilibrio, el gasto del consumidor tiene que ser igual al valor de la producción.

La función auxiliar lagrangiana del problema de optimización es la siguiente:

$$L(c_x, c_y, \lambda) = ln(c_x) + ln(c_y) - \lambda\left(p_x c_x + p_y c_y - p_x q_x - p_y q_y\right)$$

Las condiciones de primer orden de máximo interior son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial \ell}{\partial c_x}=0 \rightarrow \dfrac{1}{c_x}-\lambda p_x=0 \rightarrow \lambda=\dfrac{1}{c_x p_x} \\ \dfrac{\partial \ell}{\partial c_y}=0 \rightarrow \dfrac{1}{c_y}-\lambda p_y=0 \rightarrow \lambda=\dfrac{1}{c_y p_y}\end{array}\right\} \lambda=\lambda \rightarrow \dfrac{1}{c_x p_x}=\dfrac{1}{c_y p_y} \rightarrow \dfrac{p_x}{p_y}=\dfrac{c_y}{c_x} \qquad \text{(c.4)}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda}=0 \rightarrow p_x c_x+p_y c_y=p_x q_x+p_y q_y \rightarrow c_x=q_x \text{ y } c_y=q_y \qquad \text{(c.5)}$$

Utilizando (c.3), (c.4) y (c.5), tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{p_x}{p_y}=\dfrac{q_x}{q_y\left[1+0{,}06(q_x)^2\right]} \\ \dfrac{p_x}{p_y}=\dfrac{q_y}{q_x}\end{array}\right\} \quad \frac{q_y}{q_x}=\frac{q_x}{q_y\left[1+0{,}06(q_x)^2\right]} \rightarrow (q_y)^2\left[1+0{,}06(q_x)^2\right]=(q_x)^2 \rightarrow$$

$$\boxed{(q_y)^2\left[1+0{,}06(q_x)^2\right]-(q_x)^2=0}$$

(c.6)

La asignación de equilibrio Walrasiano debe estar en la *FPP*:

FPP: $(q_x)^2+(q_y)^2\left[1+0{,}06(q_x)^2\right]=800$. Con esta expresión y con (c.6) tenemos:

$$(q_x)^2-(q_y)^2\left[1+0{,}06(q_x)^2\right]=0$$

$+$

$$(q_x)^2+(q_y)^2\left[1+0{,}06(q_x)^2\right]=800$$

$$2(q_x)^2=800 \rightarrow (q_x)^2=400$$

Por lo tanto, $\boxed{q_x^{EW}=20}$

Por (c.6): $(q_y)^2\left[1+0{,}06(q_x)^2\right]-(q_x)^2=0 \rightarrow (q_y)^2=\dfrac{(q_x)^2}{\left[1+0{,}06(q_x)^2\right]}=\dfrac{400}{1+24} \rightarrow \boxed{q_y^{EW}=4}$

Por lo tanto: $\boxed{c_x^{EW}=20}$ y $\boxed{c_y^{EW}=4}$

Las cantidades de factor utilizadas en la producción de *EW* de ambos bienes son:

$$q_x=\sqrt{L_x} \rightarrow L_x=(q_x)^2=400 \rightarrow \boxed{L_x^{EW}=400}$$

$$q_y=800-q_x \rightarrow \boxed{L_y^{EW}=400}$$

e) ¿Coinciden las cantidades de producción óptimo paretianas y de equilibrio Walrasiano? Explique su respuesta en términos económicos.

No coinciden las cantidades de producción *OP* y de *EW*, ya que existe un efecto externo negativo en la producción del bien *x* que afecta a la producción del bien *y*.

$$\frac{\partial q_y}{\partial q_x} = -\frac{2 \cdot 0{,}06 \cdot L_y \cdot q_x}{2\sqrt{\frac{L_y}{\left[1+0{,}06(q_x)^2\right]}} \cdot \left[1+0{,}06(q_x)^2\right]^2} < 0$$

$q_x^{OP} < q_x^{EW}$	$q_2^{OP} > q_2^{EW}$
$10 < 20$	$10 > 4$

Este resultado implica que el mercado competitivo está asignando ineficientemente los recursos (hay un "fallo de mercado"), ya que está asignando más cantidad de factor productivo, L_x, (400 unidades) de la que sería necesaria (100 unidades) en la producción eficiente del bien *x*. Lo óptimo sería, por tanto, redistribuir las cantidades de factor, de manera que se produzca menos de este bien *x* (en cuya producción se está generando un efecto externo negativo) y más del bien *y*. Esto es, debería redistribuirse factor productivo, *L*, desde la producción del bien *x* hasta la producción de bien *y* (concretamente 300 unidades de factor *L*).