Universidad de La Laguna
Departamento de Análisis Económico

Ejercicios resueltos de Microeconomía. Equilibrio general y economía de la información

Fernando Perera Tallo
Olga María Rodríguez Rodríguez

Tema 2
La elección en condiciones de incertidumbre

Ejercicio 1:

Un agente dispone de 100 u.m. de riqueza y puede apostar 50 u.m. en el siguiente juego: si escoge una carta y sale picas pierde las 50 u.m. y si sale una carta de otro palo gana 20 u.m.

a) Determine la decisión del agente si su función de utilidad es $u(c) = Lnc$.
b) Calcule el valor cierto del consumo que le resulta indiferente respecto a la situación con incertidumbre.

Solución:

Agente
- Si sale picas pierde los 50→Obtiene (100-50)=50 u.m.
- Si sale “otro palo” gana 20→Obtiene (100+20)=120 u.m.

a) Determine la decisión del agente si su función de utilidad es $u(c) = Lnc$.

Llamemos *p* a la probabilidad de perder (*p*=1/4). Por lo tanto (1-*p*=3/4) será la probabilidad de ganar. Aunque el valor esperado no es la función que debe considerarse para averiguar qué decisión tomará este agente, vamos a calcularlo para las dos opciones que tiene: $a_1 = no\ jugar$ y $a_2 = jugar$.

$$VE\begin{pmatrix} consumo \\ no\ jugar \end{pmatrix} = 100\ u.m.$$

$$VE\begin{pmatrix} consumo \\ jugar \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(100-50)+\frac{3}{4}(100+20) = 102{,}5\ u.m.$$

Si atendiéramos a la comparación del valor esperado, el agente debería elegir jugar. Sin embargo, si calculamos la utilidad esperada en cada una de las dos acciones, el resultado es diferente.

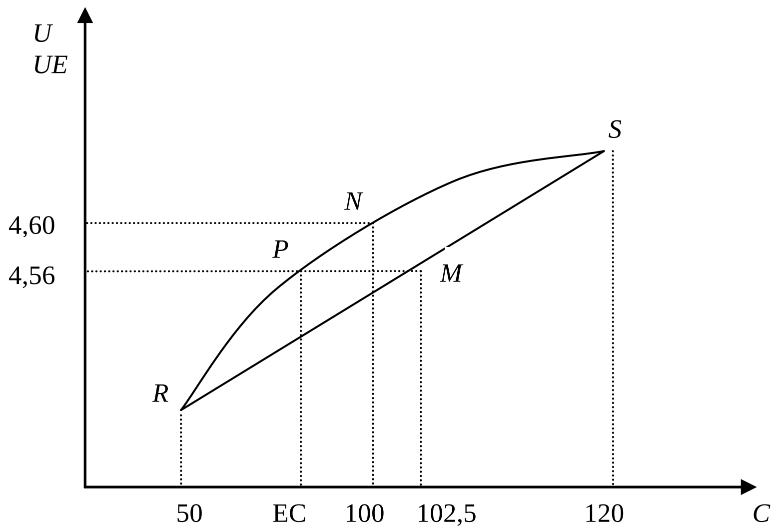
$$u(c) = Lnc \to u'(c) = \frac{1}{c} > 0 \to u''(c) = -\frac{1}{c^2} < 0 \to \text{Aversión al riesgo.}$$

$$U\begin{pmatrix} consumo \\ no\ jugar \end{pmatrix} = U(100) = \ln 100 = 4{,}605$$

$$UE\begin{pmatrix} consumo \\ jugar \end{pmatrix} = \frac{1}{4}U(50) + \frac{3}{4}U(120) = \frac{1}{4}\ln 50 + \frac{3}{4}\ln 120 = 4{,}568$$

$$U\begin{pmatrix} consumo \\ no\ jugar \end{pmatrix} = 4{,}605 > UE\begin{pmatrix} consumo \\ jugar \end{pmatrix} = 4{,}568 \rightarrow \text{El individuo averso elige } \textit{no jugar}.$$

Como podemos observar, es la **utilidad esperada** (que recoge la actitud frente al riesgo de un individuo) y no el valor esperado, la función que debe considerarse a la hora de analizar qué decisión tomará un agente en condiciones de incertidumbre.



b) Calcule el valor cierto del consumo que le resulta indiferente respecto a la situación con incertidumbre.

El valor cierto del consumo que le resulta indiferente al agente respecto de la situación con incertidumbre es el **equivalente certeza**.

$$U(EC) = UE\begin{pmatrix} consumo \\ jugar \end{pmatrix}$$

$$\ln EC = 4{,}568 \rightarrow EC = 96{,}351$$

La interpretación del equivalente certeza es la siguiente: el agente se muestra indiferente entre tener un **valor cierto** de consumo igual a 96,351 u.m. que obtener con riesgo un valor esperado del consumo de 102,5 u.m. De otra forma: el agente está dispuesto a renunciar como máximo a 9,149 u.m. (102,5-96,351) con tal de eludir el riesgo. Ésta es la llamada **prima de riesgo**, es decir, la máxima cantidad que el agente averso al riesgo está dispuesto a pagar con tal de no correr el riesgo.

Ejercicio 2:

Un presentador de televisión con una función de utilidad $u(c) = Lnc$, se plantea asegurarse o no ante eventuales problemas en su voz. Si no se asegura y ocurre un percance con su voz, con probabilidad del 10%, obtendrá 5.000 u.m., mientras que si no ocurre el percance ingresará 10.000 u.m. En el caso de que el presentador se asegure obtendrá 9.500 u.m. de forma segura.

a) Indique qué decisión tomará el presentador.
b) Señale qué propiedades tiene esta función de utilidad e indique el valor de sus índices de aversión al riesgo.
c) Represente gráficamente las dos acciones posibles.
d) Calcule la probabilidad de percance para que el presentador sea indiferente entre ambas acciones.
e) Obtenga el equivalente certeza de la acción de no asegurarse.
f) Calcule la prima de riesgo.

Solución:

Asegurarse→Obtiene 9.500 u.m. de forma segura

Presentador

Con prob. *p*=0,1→ Obtiene 5.000 u.m.

No asegurarse

Con prob. (1-*p*)=0,9→Obtiene 10.000 u.m.

a) Indique qué decisión tomará el presentador.

Llamemos *p* a la probabilidad de percance (*p*=0,1). Por lo tanto (1-*p*=0,9) será la probabilidad de que no ocurra el percance. Aunque el valor esperado no es la función que debe considerarse para averiguar qué decisión tomará este individuo, vamos a calcularlo para las dos opciones que tiene: $a_1 = no\ se\ asegura$ y $a_2 = sí\ se\ asegura$.

$$u(c) = Lnc \rightarrow u'(c) = \frac{1}{c} > 0 \rightarrow u''(c) = -\frac{1}{c^2} < 0 \rightarrow \text{Aversión al riesgo.}$$

$$VE\begin{pmatrix} consumo \\ no\ seguro \end{pmatrix} = 0{,}1 \cdot 5.000 + 0{,}9 \cdot 10.000 = 9.500\ u.m.$$

$$VE\begin{pmatrix} consumo \\ sí\ seguro \end{pmatrix} = 0{,}1 \cdot 9.500 + 0{,}9 \cdot 9.500 = 9.500\ u.m.$$

$$U\begin{pmatrix} consumo \\ no\ seguro \end{pmatrix} = 0{,}1 \cdot U(5.000) + 0{,}9 \cdot U(10.000) = 0{,}1 \cdot \ln 5.000 + 0{,}9 \cdot \ln 10.000 = 9{,}1411$$

$$U\begin{pmatrix} consumo \\ sí\ seguro \end{pmatrix} = 0{,}1 \cdot U(9.500) + 0{,}9 \cdot U(9.500) = 0{,}1 \cdot \ln 9.500 + 0{,}9 \cdot \ln 9.500 = \ln 9.500 = 9{,}159$$

$$U\begin{pmatrix} consumo \\ sí\ seguro \end{pmatrix} = 9{,}159 > U\begin{pmatrix} consumo \\ no\ seguro \end{pmatrix} = 9{,}1411 \rightarrow \text{El individuo averso elige a}\textit{segurarse}.$$

Como podemos observar, es la **utilidad esperada** (que recoge la actitud frente al riesgo de un individuo) y no el valor esperado, la función que debe considerarse a la hora de analizar qué decisión tomará un individuo en condiciones de incertidumbre. Así, a pesar de que en media el individuo espera el mismo consumo tanto si se asegura como si no lo hace, prefiere asegurarse, ya que ello le reporta mayor utilidad esperada.

b) Señale qué propiedades tiene esta función de utilidad e indique el valor de sus índices de aversión al riesgo.

$u(c) = Lnc \rightarrow u'(c) = \frac{1}{c} > 0 \rightarrow$ *Utilidad marginal del consumo positiva*.

$u''(c) = -\frac{1}{c^2} < 0 \rightarrow$ Función de utilidad cóncava $\rightarrow$ Aversión al riesgo.

Medidas de aversión al riesgo:

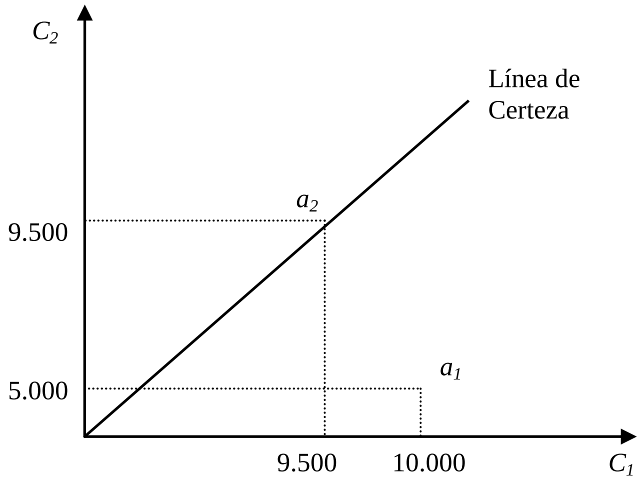
1. *Aversión Absoluta al Riesgo*: $AAR = -\frac{u''}{u'} = -\frac{\frac{-1}{c^2}}{\frac{1}{c}} = \frac{1}{c} > 0 \rightarrow$ Aversión al riesgo

$\frac{dAAR}{dc} = -\frac{1}{c^2} < 0 \rightarrow$ *Aversión Absoluta al Riesgo* decreciente con el consumo.

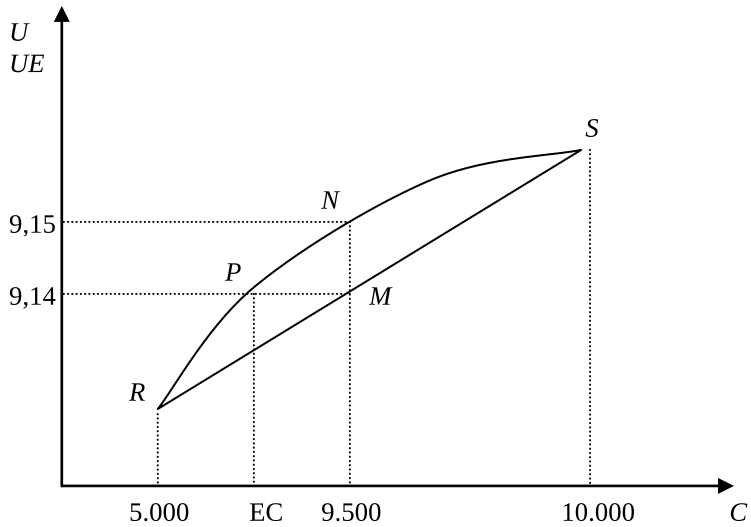
2. *Aversión relativa al Riesgo*: $ARR = c \cdot AAR = c \cdot \frac{1}{c} = 1 \rightarrow$ *Aversión Relativa al Riesgo* constante.

c) Represente gráficamente las dos acciones posibles.

En un gráfico con curvas de indiferencia:



En un gráfico de utilidades:



d) Calcule la probabilidad de percance para que el presentador sea indiferente entre ambas acciones.

Para que el presentador sea indiferente entre asegurarse y no asegurarse debe cumplirse:

$$U(N) = UE(Q)$$
$$9{,}159 = p' \cdot \ln 5.000 + (1 - p') \cdot \ln 10.000$$
$$9{,}159 = 8{,}517\,p' + 9{,}210 - 9{,}210\,p'$$

$p' = 0{,}074 \rightarrow$La probabiliad de percance debe disminuir del 10% al 7,4% para que el prsentador se muestre indiferente entre asegurarse o no.

e) Obtenga el equivalente certeza de la acción de no asegurarse.

$$U(EC) = UE\begin{pmatrix} consumo \\ no\ seguro \end{pmatrix}$$
$$\ln EC = 9{,}1411 \rightarrow EC = e^{9{,}141} = 9.331\,u.m.$$

(**Nota**: El equivalente certeza aparece representado en el gráfico del apartado c).

La interpretación del equivalente certeza es la siguiente: el presentador se muestra indiferente entre tener un **valor cierto** de consumo igual a 9.331 u.m. que obtener con riesgo un valor esperado del consumo de 9.500.

f) Calcule la prima de riesgo.

$$\Pr = VE(C) - EC = 9.500 - 9.331 = 169\,u.m.$$

El presentador está dispuesto a renunciar como máximo a 169 u.m. con tal de eludir el riesgo. Ésta es la llamada **prima de riesgo**, es decir, la máxima cantidad que un individuo averso al riesgo está dispuesto a pagar con tal de no correr el riesgo.

Ejercicio 3:

Suponga que un agente puede elegir una lotería A que proporciona un premio de 700 u.m. con probabilidad p=0,25 y otro premio de 100 u.m. Este agente también podría elegir una lotería B que concede un premio de 300 u.m. con probabilidad q=0,1, y otro premio que consiste en participar en otra lotería C con dos resultados: 100 u.m. con probabilidad 0,7 ó 600 u.m.

a) Señale qué lotería, la A o la B, prefiere el agente si su función de utilidad viene dada por $u(c) = c^{1/2}$.
b) Calcule el equivalente certeza correspondiente a las loterías A y B.
c) Dado el valor de p=0,25, y suponiendo que el agente es neutral al riesgo, calcule el valor de "q" para el que le serían indiferentes las loterías A y B.

Solución:

El agente puede elegir entre las dos loterías siguientes:

Lotería A
- → Con probabilidad *p*=0,25 gana 700
- → Con probabilidad (1-*p*)=0,75 gana 100

Lotería B
- → Con prob. *q*=0,1 gana 300
- → Con prob. (1-*q*)=0,9 gana *lotería C*
  - → Con prob. *t*=0,7 gana 100
  - → Con prob. (1-*t*)=0,3 gana 600

Evidentemente, la suma de las probabilidades en cada lotería debe ser igual a 1:

Lotería A: $p + (1-p) = 0{,}25 + 0{,}75 = 1$

Lotería B: $q + [(1-q)t] + [(1-q)(1-t)] = 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}1 + 0{,}63 + 0{,}27 = 1$

a) Señale qué lotería, la A o la B, prefiere un agente si su función de utilidad viene dada por $u(c) = c^{1/2}$.

$u(c) = c^{1/2} \rightarrow u'(c) = \dfrac{1}{2\sqrt{c}} > 0 \rightarrow u''(c) = -\dfrac{1}{4}c^{-3/2} < 0 \rightarrow$ Aversión al riesgo.

El agente preferirá la lotería que le reporte mayor utilidad esperada:

$$UE\begin{pmatrix} consumo \\ lotería\ \ A \end{pmatrix} = 0{,}25\sqrt{700} + 0{,}75\sqrt{100} = 14{,}114$$

$$UE\begin{pmatrix} consumo \\ lotería\ B \end{pmatrix} = 0{,}1\sqrt{300} + 0{,}9\left(0{,}7\sqrt{100} + 0{,}3\sqrt{600}\right) = 14{,}64$$

$$UE\begin{pmatrix} consumo \\ lotería\ B \end{pmatrix} > UE\begin{pmatrix} consumo \\ lotería\ A \end{pmatrix} \rightarrow \text{El agente prefiere la } \textit{lotería B}.$$

Si calculamos los valores esperados asociados a cada una de las dos loterías, tenemos:

$$VE\begin{pmatrix} consumo \\ lotería\ A \end{pmatrix} = 0{,}25 \cdot 700 + 0{,}75 \cdot 100 = 250$$

$$VE\begin{pmatrix} consumo \\ lotería\ B \end{pmatrix} = 0{,}1 \cdot 300 + 0{,}9\left(0{,}7 \cdot 100 + 0{,}3 \cdot 600\right) = 255$$

Como puede observarse, la *lotería B* no sólo tiene mayor utilidad esperada sino también mayor valor esperado que la *lotería A*.

b) Calcule el equivalente certeza correspondiente a las loterías A y B.

$$EC_A: \quad U(EC_A) = UE\left(VE\begin{pmatrix} consumo \\ lotería\ A \end{pmatrix}\right) \rightarrow (EC_A)^{1/2} = 14{,}114 \rightarrow EC_A = (14{,}114)^2 = 199{,}20$$

$$EC_B: \quad U(EC_B) = UE\left(VE\begin{pmatrix} consumo \\ lotería\ B \end{pmatrix}\right) \rightarrow (EC_B)^{1/2} = 14{,}64 \rightarrow EC_B = (14{,}64)^2 = 214{,}32$$

c) Dado el valor de p=0,25, y suponiendo que el agente es neutral al riesgo, calcule el valor de "q" para el que le serían indiferentes las loterías A y B.

Si el agente es neutral al riesgo, para que ambas loterías le resulten indiferentes, éstas deberían reportarle la misma utilidad esperada (o el mismo valor esperado, ya que la utilidad esperada coincide con el valor esperado en el caso de la neutralidad al riesgo). Por lo tanto, debe cumplirse que:

$$UE\begin{pmatrix} consumo \\ lotería\ A \end{pmatrix} = VE\begin{pmatrix} consumo \\ lotería\ A \end{pmatrix} = UE\begin{pmatrix} comsumo \\ lotería\ B \end{pmatrix} = VE\begin{pmatrix} consumo \\ lotería\ B \end{pmatrix} = 250$$

$$UE\begin{pmatrix} consumo \\ lotería\ B \end{pmatrix} = q' \cdot 300 + (1 - q') \cdot \left[0{,}7 \cdot 100 + 0{,}3 \cdot 600\right] = 250 \rightarrow q' = 0$$

Este resultado significa que, para que el agente neutral al riesgo se muestre indiferente entre ambas loterías, la *lotería B* debe limitarse al premio de la *lotería C*.

Ejercicio 8:

A un individuo se le ofrece la posibilidad de invertir 1.000 u.m. en un negocio. Si el resultado es exitoso obtendrá una ganancia de 0,2 u.m. por u.m. invertida y si fracasa perderá 0,1 u.m. por u.m. invertida.

a) Calcule la probabilidad de ganar para que el valor esperado de invertir sea 1.100 u.m.
b) Calcule la restricción presupuestaria y represente gráficamente el punto que representa la inversión de la totalidad de su riqueza inicial. Interprete el valor de la pendiente.
c) Calcule cuánto invertirá el individuo si $u(c) = c^2$. Represente la situación gráficamente en un mapa de preferencias.
d) Calcule la variación que debe experimentar la probabilidad de éxito para que el juego esté equilibrado.

Solución:

Individuo → No invertir→Obtiene 1.000 u.m. de forma segura

Individuo → Invertir
- Con prob. (1-*p*) tiene éxito→Obtiene 1.200 u.m.
- Con prob. *p* fracasa→Obtiene 900 u.m.

Resultados si invierte:

- Si tiene éxito: $0{,}2 \cdot 1.000 = 200 \rightarrow 1.000 + 200 = 1.200$ u.m.
- Si fracasa: $-0{,}1 \cdot 1.000 = -100 \rightarrow 1.000 - 100 = 900$ u.m.

a) Calcule la probabilidad de ganar para que el valor esperado de invertir sea 1.100 u.m.

Si llamamos p a la probabilidad de fracasar:

$$VE\begin{pmatrix} consumo \\ si\ invierte \end{pmatrix} = p \cdot 900 + (1-p) \cdot 1.200 = 1.100$$

$$900p + 1.200 - 1.200p = 1.100 \rightarrow p = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la probabilidad de éxito o de ganar es $\boxed{(1-p) = \frac{2}{3}}$

b) Calcule la restricción presupuestaria y represente gráficamente el punto que representa la inversión de la totalidad de su riqueza inicial. Interprete el valor de la pendiente.

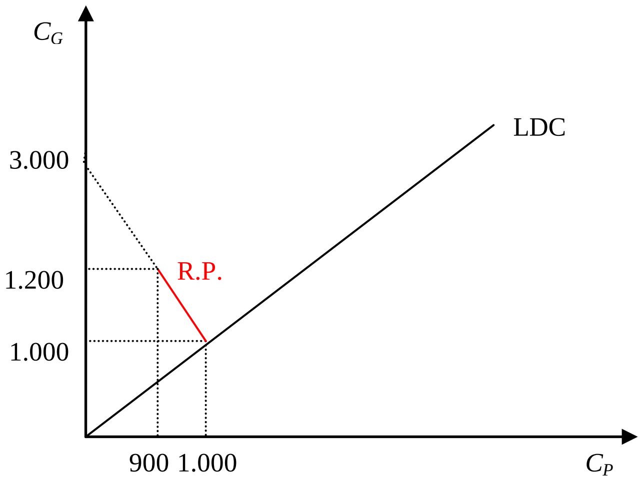
$$C_P = M + PX = 1.000 - 0{,}1X \rightarrow X = \frac{1.000 - C_P}{0{,}1}$$

$$C_G = M + GX = 1.000 + 0{,}2X \rightarrow C_G = 1.000 + 0{,}2\left(\frac{1.000 - C_P}{0{,}1}\right)$$

$$C_G = 1.000 + 2.000 - 2C_P$$

$\boxed{C_G = 3.000 - 2C_P}$ Para $900 \leq C_P \leq 1.000$ →Restricciòm presupuestaria

Gráficamente:



La restricción presupuestaria del individuo sólo será la línea en rojo del gráfico anterior, ya que lo máximo que puede perder es 100 (si invierte las 1.000 u.m.), por lo que su consumo mínimo en caso de que fracase será 900; por su parte, su consumo máximo en caso de ganar (si invierte las 1.000 u.m.) será 1.200.

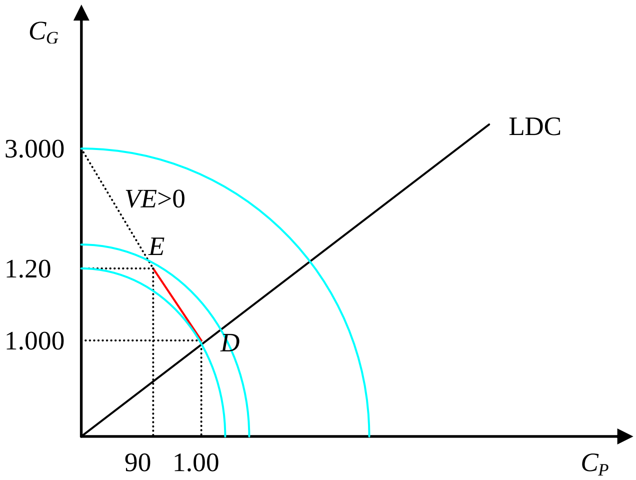
c) Calcule cuánto invertirá el individuo si $U(c)=c^2$. Represente la situación gráficamente en un mapa de preferencias.

Si $u(c) = c^2 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial c} = 2c > 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = 2 > 0 \rightarrow$ el individuo es amante del riesgo.

Calculemos el valor esperado asociado a esta situación:

$VE(invertir) = \frac{1}{3}(-0{,}1) + \frac{2}{3}(0{,}2) = 0{,}1 > 0 \rightarrow$ El juego está desequilibrado a favor del individuo, y como éste es amante del riesgo decidirá invertir toda su riqueza, esto es $X = 1.000$.

Gráficamente:



Como se observa en la gráfica, la curva de indiferencia más alta posible que puede alcanzarse, dentro de las opciones asequibles del consumidor, es la que corta a la restricción resupuestaria en el punto *E*. La dotación, que se encuentra en el punto *D*, está en una curva de indiferencia más baja. Por lo tanto, la elección tiene lugar en el punto *E*, que representa invertir toda su riqueza.

d) Calcule la variación que debe experimentar la probabilidad de éxito para que el juego esté equilibrado.

Para que el juego esté equilibrado el valor esperado del mismo deber ser igual a cero. Por lo tanto:

$$VE(invertir) = 0 \rightarrow p \cdot (-0{,}1) + (1-p) \cdot 0{,}2 = 0 \rightarrow p = \frac{2}{3}$$

La probanilidad de éxito debe ser $(1-p) = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, la probabilidad de ganar debe reducirse en un tercio ($\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$) para que el juego esté equilibrado.

Ejercicio 10:

Considere un individuo con una renta de 12.500€ anuales de los cuales tiene que pagar un 20% a Hacienda. No obstante, este individuo puede decidir defraudar al Fisco. En caso de que un inspector de Hacienda descubra que el individuo está defraudando, éste, además de devolver los impuestos defraudados, tiene que pagar una multa igual a tres veces la cuantía de los impuestos defraudados.

a) Obtenga analíticamente la restricción presupuestaria y represéntela gráficamente.
b) Calcule la mínima probabilidad de descubrir el fraude por la que un individuo averso al riesgo decidirá no defraudar.
c) Suponga que la probabilidad de ser descubierto es del 10% y que la función de utilidad del individuo viene dada por la expresión: $u(c) = Lnc$. Calcule la cantidad de renta ocultada así como la cuantía de los impuestos defraudados a Hacienda por este individuo.

Solución:

a) Obtenga analíticamente la restricción presupuestaria y represéntela gráficamente.

Llamenos:

$X =$cantidad de renta que decide defraudar el individuo.
$0{,}2X =$impuestos defraudados.

Sea C_1 el consumo si pierde, esto es, el consumo si lo descubren; y C_2 el consumo si gana, esto es, el consumo si no lo descubren. Así, las siguientes ecuaciones, que recogen los consumos contingentes a estos dos estados de la naturaleza, nos permitirán obtener la ecuación de la restricción presupuestaria del individuo:

$$C_1 = 12.500 - 0{,}2(12.500 - X) - 0{,}2X - 3(0{,}2X) = 10.000 - 0{,}6X$$

Despejando X:

$$X = \frac{10.000 - C_1}{0{,}6} = 16.666{,}67 - \frac{C_1}{0{,}6}$$

$$C_2 = 12.500 - 0{,}2(12.500 - X) = 10.000 + 0{,}2X$$

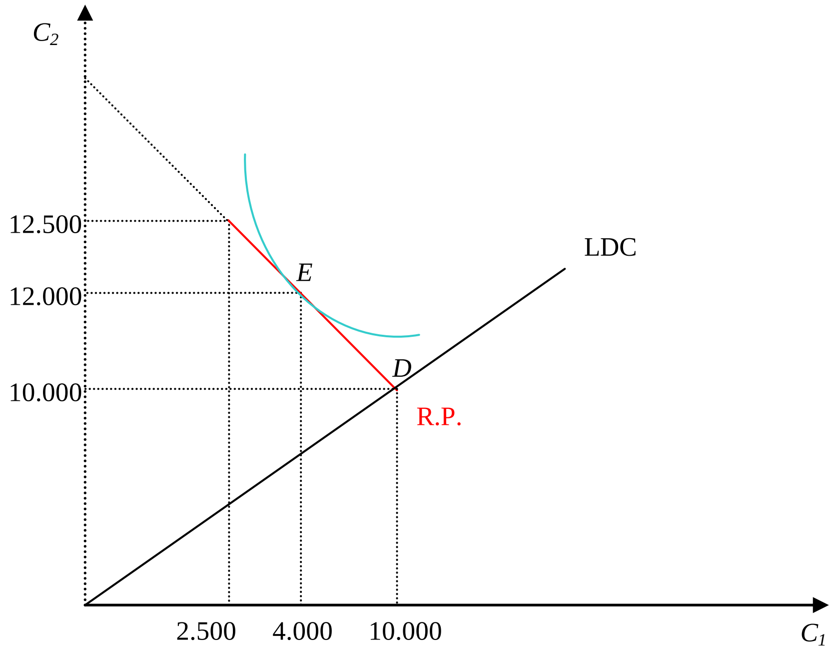
Sustituyendo X en esta última ecuación :

$$C_2 = 10.000 + 0{,}2\left(16.667{,}67 - \frac{C_1}{0{,}6}\right) = 13.333{,}3 - \frac{C_1}{3}$$

Por lo tanto, la ecuación de la restricción presupuestaria del individuo es:

$$\boxed{C_2 = 13.333{,}3 - \frac{C_1}{3}} \text{ Para } 2.500 \leq C_1 \leq 10.000 \rightarrow \text{Restricción presupuestaria}$$

Gráficamente:



La restricción presupuestaria del individuo sólo será la línea en rojo del gráfico anterior. Los extremos de la restricción se explican de la siguiente manera: si decide no defraudar, estará sobre la línea de certeza con un consumo idéntico de 10.000 u.m. en ambos estados de la naturaleza. Si decide defraudar y oculta toda su renta, el consumo en el caso de que lo descubran será de 2.500, mientras que si no lo descubren será de 12.500. Es decir, los límites de la restricción presupuestaria corresponden a la decisión de no defraudar nada y a defraudar toda su renta.

b) Calcule la mínima probabilidad de descubrir el fraude por la que un individuo averso al riesgo decidirá no defraudar.

El undividuo no defraudará si se sitúa sobre su línea de certeza, esto es, si la tangencia entre la curva de indiferencia más alta posible y su restrición presupuestaria tiene lugar a lo largo de la línea de certeza:

$$RMS = \frac{p}{1-p}\frac{u'(C_1)}{u'(C_2)} = \frac{p}{1-p}, \text{ ya que sobre la LDC: } \frac{u'(C_1)}{u'(C_2)} = 1 \text{ al ser } C_1 = C_2.$$

Como se obtuvo anteriormente, la pendiente de la restricción presupuestaria es $-\frac{1}{3}$. Por lo tanto:

$$\frac{p}{1-p} = \frac{1}{3}\boxed{\rightarrow p = \frac{1}{4}}$$

c) Suponga que la probabilidad de ser descubierto es del 10% y que la función de utilidad del individuo viene dada por la expresión: $u(c) = Lnc$. Calcule la cantidad de renta ocultada así como la cuantía de los impuestos defraudados a Hacienda por este individuo.

$u(c) = Lnc \rightarrow$El individuo es averso al riesgo.

Calculemos el valor esperado del consumo del individuo:

$$VE(consumo) = 0{,}1(10.000 - 0{,}6X) + 0{,}9(10.000 + 0{,}2X) = 10.000 + 0{,}12X$$

Como podemos observar, el valor esperado del consumo crece con la cantidad que se defrauda (*X*), por lo que podemos señalar que el juego está desequilibrado a favor del individuo. Un individuo averso al riesgo ante un juego desequilibrado a su favor decidirá arriesgar algo; por lo tanto, este individuo decidirá defraudar una parte de su renta, y para obtenerla debemos calcular el punto de tangencia entre la restricción presupuestaria y la curva de indiferencia más alta que pueda alcanzar (maximización de su utilidad esperada sujeto a la restricción presupuestaria).

$$RMS = \frac{p}{1-p}\frac{u'(C_1)}{u'(C_2)} = \frac{p}{1-p} = \frac{0{,}1}{0{,}9}\frac{\frac{1}{C_1}}{\frac{1}{C_2}} = \frac{0{,}1}{0{,}9}\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{3} \rightarrow C_1 = \frac{0{,}3C_2}{0{,}9}$$

$$C_2 = 13.333{,}3 - \frac{C_1}{3} \rightarrow C_2 = 13.333{,}3 - \frac{1}{3}\left(\frac{0{,}3C_2}{0{,}9}\right) \rightarrow C_2 = 13.333{,}3 - \frac{0{,}3}{2{,}7}C_2$$

$$\boxed{C_2 = 12.000} \rightarrow \boxed{C_1 = 4.000}$$

Una vez obtenido el punto de tangencia, que informa de los resultados posibles en cada uno de los estados de la naturaleza en la decisión óptima del individuo, podemos obtener la cantidad de renta ocultada, X, simplemente sustituyendo estos valores en las ecuaciones de los consumos contingentes.

$$X = \frac{10.000 - C_1}{0{,}6} = 16.666{,}67 - \frac{4.000}{0{,}6} = 10.000$$

Por lo tanto, la renta ocultada será de $X = 10.000$ u.m.

Los impuestos defraudados serán: $0{,}2X = 2.000$ u.m.
La elección optima del individuo está representada en el gráfico anterior a través del punto *E*.

Ejercicio 13:

Un agente tiene 8.000€ para invertir que puede **repartir** en dos tipos de activos: Bonos del Tesoro, con una rentabilidad del 25%, y acciones cuya rentabilidad depende de la coyuntura económica. En situaciones de crisis la rentabilidad es del 15% mientras que en situaciones de expansión económica es del 45%. La probabilidad de crisis económica es del 50% y la función de utilidad del agente es del tipo CES:

$$u(c)=\begin{cases}\dfrac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} & si \quad \sigma\in(0,1)\cup(1,+\infty)\\ \ln(c) & si \quad \sigma=1\end{cases}$$

a) Calcule el índice de aversión relativa al riesgo (ARR) del agente.
b) Calcule la cantidad que invertirá en acciones.
c) Explique cómo afecta σ a la cantidad que el agente puede invertir en acciones. (Recuerde que $\dfrac{\partial(a^{f(x)})}{\partial x}=f'(x)a^{f(x)}\ln a$).
d) Calcule la rentabilidad que deberían ofrecer los Bonos del Tesoro para que el agente decidiera no invertir en acciones.

Solución:

Individuo → Bonos del Tesoro→Obtiene $(1+0{,}25)(8.000-X)$

Individuo → Acciones → Con prob. 0,5 hay crisis→Obtiene $(1+0{,}15)X$

Individuo → Acciones → Con prob. 0,5 hay expansión→Obtiene $(1+0{,}45)X$

X : cantidad que invierte en acciones.

a) Calcule el índice de aversión relativa al riesgo (ARR) del agente.

$$ARR=c\cdot AAR$$

$$AAR=-\frac{u''}{u'}$$

$$u'=\begin{cases}\dfrac{(1-\sigma)\cdot c^{-\sigma}}{(1-\sigma)}=\dfrac{1}{c^{\sigma}} & si \quad \sigma\in(0,1)\cup(1,+\infty)\\ \dfrac{1}{c} \quad si \quad \sigma=1\end{cases}$$

$$u''=\begin{cases}-\sigma\cdot c^{-(1+\sigma)}=-\dfrac{\sigma}{c^{(1+\sigma)}} & si \quad \sigma\in(0,1)\cup(1,+\infty)\\ -\dfrac{1}{c^{2}} \quad si \quad \sigma=1\end{cases}$$

$$AAR = \begin{cases} -\dfrac{\dfrac{-\sigma}{c^{(1+\sigma)}}}{\dfrac{1}{c^{\sigma}}} = \dfrac{\sigma \cdot c^{\sigma}}{c^{(1+\sigma)}} = \dfrac{\sigma}{c} \;\; si \;\; \sigma \cup (0,1) \cup (1,+\infty) \\ -\dfrac{-\dfrac{1}{c^2}}{\dfrac{1}{c}} = \dfrac{1}{c} \;\; si \;\; \sigma = 1 \end{cases}$$

El índice de Aversión Absoluta al Riesgo es positivo, por lo que el individuo es averso al riesgo. Además, este índice es decreciente cn el consumo, por lo que el individuo es menos averso a medida que aumenta su riqueza.

$$ARR = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{c} c = \sigma \;\; si \;\; \sigma \in (0,1) \cup (1,+\infty) \\ \dfrac{1}{c} c = 1 \;\; si \;\; \sigma = 1 \end{cases}$$

El índice de Aversión Relativa al Riesgo es constante

b) Calcule la cantidad que invertirá en acciones.

Los dos estados de la Naturaleza son:

s_1: hay crisis
s_2: hay expansión

Los consumos asociados a los dos estados de la Naturaleza son los siguientes:

$C_1 =$ consumo si hay crisis
$C_2 =$ consumo si hay expansión

Calculemos la ecuación de la restricción presupuestaria del individuo:

$$C_1 = [(1+0{,}25)(8.000 - X)] + [(1+0{,}15)X]$$

$$C_2 = [(1+0{,}25)(8.000 - X)] + [(1+0{,}45)X]$$

$$C_1 = 8.000 - X + 2.000 - 0{,}25X + X + 0{,}15X = 10.000 - 0{,}1X \rightarrow X = \frac{10.000 - C_1}{0{,}1}$$

$$C_2 = 8.000 - X + 2.000 - 0{,}25X + X + 0{,}45X = 10.000 + 0{,}2X$$

$$C_2 = 10.000 + 0{,}2\left[\frac{10.000 - C_1}{0{,}1}\right] = 10.000 + 2[10.000 - C_1] = 10.000 + 20.000 - 2C_1$$

$\boxed{C_2 = 30.000 - 2C_1}$ para $9.200 \leq C_1 \leq 10.000$ →Restricción presupuestaria

Calculemos el valor esperado del consumo del individuo:

$$VE(consumo) = 0{,}5(10.000 - 0{,}1X) + 0{,}5(10.000 + 0{,}2X) = 10.000 + 0{,}05X$$

Como podemos observar, el valor esperado del consumo crece con la cantidad que se invierte (*X*), por lo que podemos señalar que el juego está desequilibrado a favor del individuo.Un individuo averso al riesgo ante un juego desequilibrado a su favor decidirá arriesgar algo, por lo tanto, este individuo invertirá una parte de su riqueza en el activo con riesgo, esto es, en acciones. Para obtener cuánto invertirá debemos obtener el punto de tangencia entre la restricción presupuestaria y la curva de indiferencia más alta que pueda alcanzar (maximización de su utilidad esperada sujeto a la restricción presupuestaria).

- Si $\sigma \in (0,1) \cup (1,+\infty)$:

$$RMS = \frac{p}{1-p}\frac{u'(C_1)}{u'(C_2)} = \frac{0{,}5}{0{,}5}\frac{\frac{1}{C_1^{\sigma}}}{\frac{1}{C_2^{\sigma}}} = \frac{C_2^{\sigma}}{C_1^{\sigma}}$$

Pendiente de la restricción presupuestaria=-2

$RMS =$ - pendiente de la restricción presupuestaria

$$\frac{C_2^{\sigma}}{C_1^{\sigma}} = 2$$

$$C_2 = 30.000 - 2C_1$$

$$C_2 = 30.000 - 2C_1 = 2^{1/\sigma} C_1$$

$$C_1 = 10.000 - 0{,}1X \to X = \frac{10.000 - C_1}{0{,}1} = \frac{10.000 - \left[\frac{30.000}{2^{1/\sigma} + 2}\right]}{0{,}1} = \frac{\frac{10.000\left(2^{1/\sigma} + 2\right) - 30.000}{2^{1/\sigma} + 2}}{0{,}1} \to$$

$$\boxed{X = \frac{-10.000 + 10.000 \cdot 2^{1/\sigma}}{0{,}1\left(2^{1/\sigma} + 2\right)}}$$

Esta ecuación expresa la cantidad óptima que debe invertir el individuo si quiere maximizar su utilidad esperada. Obviamente depende del valor de σ.

- Si $\sigma = 1$

$$RMS = \frac{p}{1-p}\frac{u'(C_1)}{u'(C_2)} = \frac{0,5}{0,5}\frac{\frac{1}{C_1}}{\frac{1}{C_2}} = \frac{C_2}{C_1}$$

Pendiente de la restricción presupuestaria=-2

$RMS =$ - pendiente de la restricción presupuestaria

$$\frac{C_2}{C_1} = 2$$

$$C_2 = 30.000 - 2C_1$$

$$C_1 = \frac{30.000}{4} = 7.500$$

$$\boxed{C_1 = 7.500}$$

$$\boxed{C_2 = 15.000}$$

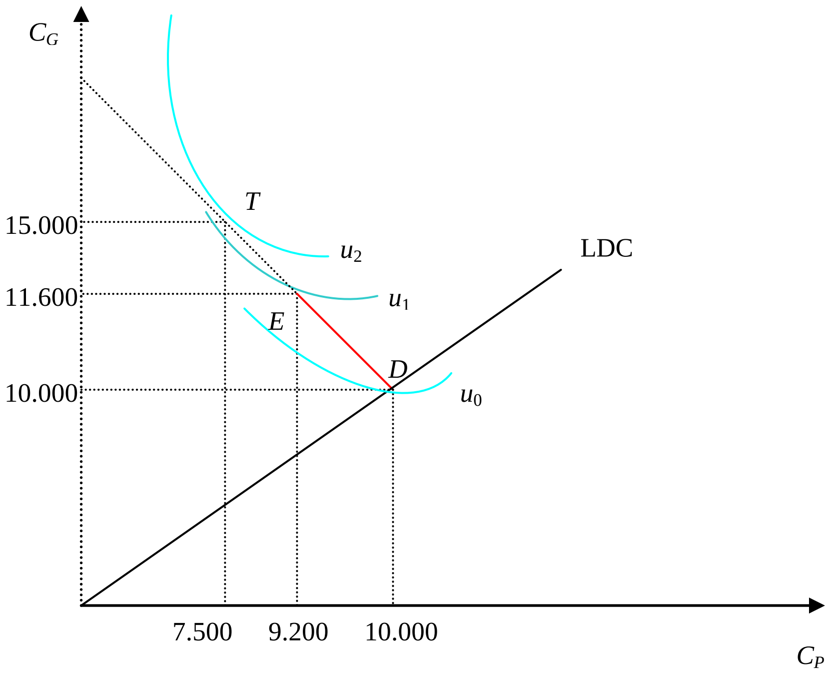
$$X = \frac{10.000 - C_1}{0,1} = \frac{10.000 - 7.500}{0,1} = 25.000$$

$$X = \frac{C_2 - 10.000}{0,2} = \frac{15.000 - 10.000}{0,2} = 25.000$$

Como podemos observar, la cantidad que debería invertir el individuo es 25.000 u.m. (aquí estaría la tangencia matemática) y los consumos contingentes serían los indicados en recuadros arriba. Sin embargo, el individuo sólo puede invertir como máximo 8.000 u.m., por lo que la solución sería que lo invierte TODO (las 8.000 u.m.) en acciones y sería una solución de esquina.

En el gráfico siguiente puede observarse que, aunque la tangencia matemática tenga lugar en el punto *T*, la solución al problema de optimización (maximización de la utilidad esperada sujeto a la restricción presupuestaria), es decir, la elección del consumidor, tiene lugar en el punto *E*, indicando que el consumidor debe invertir toda su riqueza (8.000 u.m.) en acciones. (Nótese que la restricción del consumidor sólo es la parte dibujada en rojo en el gráfico y la tangencia matemática está fuera de ella). Por lo tanto, en este caso, tenemos que la solución es un punto de esquina, ya que la curva de indiferencia u_1 corta a la restricción presupuestaria en el punto *E*.

Gráficamente:



c) Explique cómo afecta σ a la cantidad que el agente puede invertir en acciones. (Recuerde que $\frac{\partial(a^{f(x)})}{\partial x} = f'(x)a^{f(x)}\ln a$).

Para determinar el efecto que tiene σ sobre la cantidad que el individuo decide invertir en acciones, debemos calcular la siguiente derivada:

$$X = \frac{10.000 - \left(\frac{30.000}{2^{1/\sigma}+2}\right)}{0,1} = \frac{10.000}{0,1} - 10\left(\frac{30.000}{2^{1/\sigma}+2}\right)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \sigma} = -10\frac{-30.000 \cdot \left(-\frac{1}{\sigma^2}2^{1/\sigma}\ln 2\right)}{\left(2^{1/\sigma}+2\right)^2}$$

$\frac{\partial X}{\partial \sigma} = -10\frac{30.000\frac{1}{\sigma^2}2^{1/\sigma}\ln 2}{\left(2^{1/\sigma}+2\right)^2} < 0$ Este signo negativo significa que, a mayor σ menor cantidad de dinero invierte el individuo en el activo con riesgo, esto es, en acciones.

d) Calcule la rentabilidad que deberían ofrecer los Bonos del Tesoro para que el agente decidiera no invertir en acciones.

Para que un individuo averso al riesgo elija la opción segura, esto es, invertir en Bonos del Tesoro, debe cumplirse que el valor esperado de ambas opciones sean iguales, esto es, que el juego esté actuarialmente equilibrado:

$$VE\begin{pmatrix} Invierte \\ Bonos \end{pmatrix} = VE\begin{pmatrix} Invierte \\ Acciones \end{pmatrix}$$

$$VE\begin{pmatrix} Invierte \\ Bonos \end{pmatrix} = (1+r)\cdot 8.000 = 8.000 + 8.000\,r$$

$$VE\begin{pmatrix} Invierte \\ Acciones \end{pmatrix} = 0{,}5\cdot(1+0{,}15)\cdot 8.000 + 0{,}5\cdot(1+0{,}45)\cdot 8.000 = 4.600 + 5.800$$

$$8.000 + 8.000\,r = 4.600 + 5.800$$

$$r = 0{,}3 \rightarrow \boxed{r = 30\%}$$

Para una rentabilidad de, como mínimo, el 30%, este individuo averso al riesgo eligirá invertir en la opción segura, esto es, en Bonos del Tesoro.

Ejercicio 20:

Suponga una relación contractual entre un agricultor, individuo *A*, y un terrateniente, individuo *B*, El terrateniente quiere contratar al agricultor para que éste trabaje sus tierras. Supongamos que la única incertidumbre en este problema es el estado de la Naturaleza (y no el esfuerzo o actuación de los agentes, para obviar el problema de incentivos), que puede suponer un año de buena cosecha, en cuyo caso el consumo es C_1, o un año de mala cosecha, siendo C_2 el consumo en este otro caso. Obviamente $C_1 > C_2$. Las funciones de utilidad de los individuos son las siguientes: $U(C_A) = -e^{-AC}$ y $U(C_B) = -e^{-BC}$.

a) Calcule la aversión absoluta al riesgo (*AAR*) de cada individuo.
b) Obtenga la curva de contratos e indique qué modalidad contractual sería eficiente en la distribución de riesgos. Represente la situación gráficamente.

Solución:

a) Calcule la aversión absoluta al riesgo (*AAR*) de cada individuo.

Estudiemos, en primer lugar, la actitud frente al riesgo de los agentes:

$$U'(C_A) = A \cdot e^{-AC_A} \rightarrow U''(C_A) = -A^2 \cdot e^{-AC_A} < 0 \rightarrow \text{Adverso al riesgo.}$$
$$U'(C_B) = B \cdot e^{-BC_B} \rightarrow U''(C_B) = -B^2 \cdot e^{-BC_B} < 0 \rightarrow \text{Averso al riesgo.}$$

Calculemos, además, los índices de aversión absoluta al riesgo de ambos individuos:

$$AAR_A = -\frac{U''}{U'} = -\frac{-A^2 \cdot e^{-AC_A}}{A \cdot e^{-AC_A}} = A \rightarrow \text{Aversión absoluta al riesgo constante.}$$

$$AAR_B = -\frac{U''}{U'} = -\frac{-B^2 \cdot e^{-BC_B}}{B \cdot e^{-BC_B}} = B \rightarrow \text{Aversión absoluta al riesgo constante.}$$

Ambos individuos son aversos al riesgo, por lo que la curva de contratos en la distribución de riesgos estará **entre las líneas de certeza de ambos agentes**. Recordemos, que cuando los dos individuos son aversos al riesgo, la curva de contratos debe estar entre las dos líneas de certeza, **aunque no necesariamente será la diagonal principal** (que recogería una contratación de aparcería).

b) Obtenga la curva de contratos e indique qué modalidad contractual sería eficiente en la distribución de riesgos. Represente la situación gráficamente.

Analicemos ahora en qué punto se situará cada agente cuando resuelve su problema de optimización. Las condiciones que se obtengan aquí, junto con las restricciones de dotación, permitirán deducir la ecuación de la curva de contratos en la distribución eficiente de riesgos.

Las funciones de utilidad esperada de ambos individuos son las siguientes:

$$UE_A = p_1\left(-e^{-AC_{1A}}\right) + p_2\left(-e^{-AC_{2A}}\right)$$

$$UE_B = p_1\left(-e^{-BC_{1B}}\right) + p_2\left(-e^{-BC_{2B}}\right)$$

Las Relaciones Marginales de Sustitución (*RMSs*) de los individuos son las siguientes:

$$RMS_A = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{U'(C_{1A})}{U'(C_{2A})} \rightarrow RMS_A = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{A \cdot e^{-AC_{1A}}}{A \cdot e^{-AC_{2A}}}$$

$$RMS_B = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{U'(C_{1B})}{U'(C_{2B})} \rightarrow RMS_B = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{B \cdot e^{-BC_{1B}}}{B \cdot e^{-BC_{2B}}}$$

La distribución eficiente del riesgo exige que se igualen las *RMSs* de los dos individuos y que se cumplan las restricciones de dotación:

$$RMS_A = RMS_B \rightarrow \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{A \cdot e^{-AC_{1A}}}{A \cdot e^{-AC_{2A}}} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{B \cdot e^{-BC_{1B}}}{B \cdot e^{-BC_{2B}}} \quad (1)$$

$$C_1 = C_{1A} + C_{1B} \quad (2)$$

$$C_2 = C_{2A} + C_{2B} \quad (3)$$

Operando en (1), tenemos:

$$e^{-A(C_{1A} - C_{2A})} = e^{-B(C_{1B} - C_{2B})} \quad (4)$$

$$A(C_{1A} - C_{2A}) = B(C_{1B} - C_{2B}) \quad (5)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (5):

$$AC_{1A} - AC_{2A} = B(C_1 - C_{1A} - C_2 + C_{2A}) \rightarrow AC_{1A} - AC_{2A} = B(C_1 - C_2) - BC_{C_{1A}} + BC_{2A}$$

$$AC_{1A} + BC_{1A} = AC_{2A} + BC_{2A} + B(C_1 - C_2) \rightarrow (A + B)C_{1A} = (A + B)C_{2A} + B(C_1 - C_2)$$

$$\boxed{C_{1A} = C_{2A} + \frac{B}{(A + B)}(C_1 - C_2)} \quad (6)$$

$$\boxed{C_{2A} = C_{1A} - \frac{B}{(A + B)}(C_1 - C_2)} \quad (7)$$

Cualquiera de las ecuaciones (6) o (7) representan la curva de contratos en la distribución de riesgos expresada desde el origen del individuo A. Si queremos expresarla desde el origen del individuo B, tendríamos:

$$\boxed{C_{1B} = C_{2B} + \frac{A}{(A + B)}(C_1 - C_2)} \quad (8)$$

$$\boxed{C_{2B} = C_{1B} - \frac{A}{(A+B)}(C_1 - C_2)} \tag{9}$$

Cualquiera de las ecuaciones (8) o (9) representan la curva de contratos en la distribución de riesgos expresada desde el origen del individuo B.

Estas expresiones de la curva de contratos en la distribución de riesgos representan el llamado **"contrato de participación"**, ya que la distribución eficiente de riesgos exige que el reparto de consumos sea de la siguiente manera: una parte fija (por ejemplo: $C_{1A} = C_{2A}$, si lo estamos viendo desde la perspectiva del individuo *A*), más una parte proporcional (por ejemplo: $\frac{B}{(A+B)}$, si lo estamos viendo desde la perspectiva del individuo *A*) de la diferencia de consumos en los estados de la Naturaleza, $(C_1 - C_2)$. Como puede observarse, esta parte proporcional depende del grado de aversión al riesgo de un individuo respecto al grado de aversión del otro. Así, tendríamos:

- Si $B = 0$, esto es, si el individuo *B* es neutral al riesgo, la curva de contratos coincidirá con la línea de certeza (LDC) del individuo *A*, que es averso al riesgo.
- Si $A = 0$, esto es, si el individuo *A* es neutral al riesgo, la curva de contratos coincidirá con la línea de certeza (LDC) del individuo *B*, que es averso al riesgo.
- Si $A = B$, esto es, si el grado de aversión al riesgo de los dos individuos es el mismo, la curva de contratos estará a la misma distancia de las LDC de ambos individuos.
- Un caso límite sería el de la aversión infinita al riesgo de uno de los individuos, frente a una aversión positiva al riesgo, pero no infinita del otro individuo, en cuyo caso, la curva de contratos coincidiría también con la LDC del individuo infinitamente averso al riesgo.

Por lo tanto, cuanto más averso sea un individuo respecto de otro, más cerca de su LDC estará la curva de contratos en la distribución eficiente de riesgos.

En el gráfico puede observarse la curva de contratos en la distribución de riesgos (CCDR), vista desde el origen del individuo *A*, de este problema y que constituye el llamado "contrato de participación".

Gráfico: Contrato de participación (ambos individuos tienen un grado de aversión absoluta al riesgo positivo):