Autor: Francisco Martín Cabrera, Departamento Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Islas Canarias, España

T E M A IV

4. VARIEDADES CUADRÁTICAS. ESTUDIO AFÍN

4.1. Variedades cuadráticas en el espacio afín real ampliado.

En el espacio proyectivo real n-dimensional $\mathcal{P}(V)$ consideramos el hiperplano $H_\infty = \mathcal{P}(W)$ y damos a $E = \mathcal{P}(V) - H_\infty$ una estructura de espacio afín utilizando una forma lineal f que defina W. Esto es, de modo que $\ker f = W$.

Si $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una referencia afín de E, entonces $\{O = \langle \vec{o} \rangle, \langle \vec{e}_1 \rangle, \ldots, \langle \vec{e}_n \rangle; \langle \vec{o} + \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n \rangle\}$, donde $f(\vec{o}) = 1$, es una referencia proyectiva de $\mathcal{P}(V)$ con la relación usual entre coordenadas afines y coordenadas homogéneas. Otro modo de expresar el punto unidad es $\langle \vec{o} + \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n \rangle = O * (\vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n)$. A H_∞ lo denominamos *hiperplano impropio* o *hiperplano del infinito* y admite por ecuación $x_0 = 0$ con respecto a la referencia proyectiva antes mencionada.

A lo largo de esta sección supondremos siempre que estamos trabajando con referencias proyectivas asociadas a referencias afines en la forma que hemos indicado.

Clasificación afín de las variedades cuadráticas

Para clasificar las variedades cuadráticas desde el punto de vista afín tenemos que estudiar la intersección del hiperplano del infinito con la variedad cuadrática considerada. Se tienen las siguientes alternativas:

i) El hiperplano del infinito esté contenido en la variedad cuadrática, entonces dicha intersección es el hiperplano del infinito.

ii) El hiperplano del infinito no esté contenido en la variedad cuadrática, entonces la intersección del hiperplano impropio con la variedad cuadrática es una variedad cuadrática en dicho hiperplano, denominada *variedad cuadrática del infinito*.

Según se dé el primer caso o como sea, desde el punto de vista proyectivo, la variedad cuadrática del infinito cuando se dé el segundo caso, se tendrán las distintas posibilidades que pueden surgir dentro de la clasificación proyectiva de las variedades cuadráticas vista en la sección anterior. En particular, están descritas con detalle las respectivas clasificaciones afines de las variedades cuadráticas en el plano afín (cónicas) y de tales variedades en el espacio afín tridimensional (cuádricas).

Si, con respecto a la referencia proyectiva asociada a una referencia afín $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, la matriz asociada a una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ es A, α_{00} denota el menor complementario del elemento 00 de A y A_{00} es el adjunto de dicho elemento, entonces:

i) El hiperplano impropio H_∞ estará contenido en $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si la matriz α_{00} es nula.

ii) La intersección $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ será una variedad cuadrática si y sólo si la matriz α_{00} es no nula. En este caso, α_{00} será la matriz asociada a la variedad cuadrática del infinito $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ con respecto a la referencia $\{\langle \vec{e}_1 \rangle, \ldots, \langle \vec{e}_n \rangle; \langle \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n \rangle\}$ del hiperplano impropio H_∞.

4.2. Clasificación afín las cónicas.

Para clasificar las cónicas desde el punto de vista afín tenemos que ver cómo es la intersección de la cónica con la recta del infinito.

Definición 4.1. Una cónica se dice que es de tipo:

1. *Hiperbólico*, si la recta del infinito es una recta secante. Es decir, si la intersección de la cónica con la recta del infinito son dos puntos reales y distintos.
2. *Parabólico*, si la recta del infinito es tangente.
3. *Elíptico*, si la recta del infinito es exterior. Es decir, si la intersección de la cónica con la recta del infinito son dos puntos imaginarios conjugados.

Se tienen así los siguientes casos, de acuerdo con el rango de la matriz A:

1. Si $\operatorname{rango} A = 3$, es decir, $|A| \neq 0$. En este caso se trata de una cónica ordinaria. Una cónica ordinaria de tipo hiperbólico se llama *hipérbola*, de tipo parabólico se llama *parábola* y de tipo elíptico se llama *elipse*.

   Por tanto, para ver de cual de estas tres cónicas se trata tendremos que resolver el sistema formado por la cónica y la recta del infinito, es decir,
   $$\begin{aligned} \omega(\vec{x}) &= 0, \\ x_0 &= 0, \end{aligned}$$
   o lo que es lo mismo,
   $$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 &= 0, \\ x_0 &= 0, \end{aligned}$$
   cuyas soluciones dependen del discriminante $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$. Si denotamos por A_{00} la matriz adjunta del elemento a_{00} de la matriz A, observamos que $\Delta = -|A_{00}|$, teniéndose así las siguientes condiciones:
   a) $A_{00} < 0$, entonces hay dos soluciones reales y distintas y por tanto la cónica es una hipérbola.
   b) $A_{00} = 0$, entonces hay una solución doble y por tanto la cónica es una parábola. Nótese que en este caso el menor α_{00} es no nulo, pues la recta impropia no puede estar contenida en la cónica ordinaria.
   c) $A_{00} > 0$, entonces hay dos soluciones imaginarias conjugadas y por tanto la cónica es una elipse. En este caso, si la cónica es totalmente imaginaria, se dice que tenemos una *elipse imaginaria*. Por el contrario, si la cónica es real, se dice que tenemos una *elipse real*.
2. Si $\operatorname{rango} A = 2$, entonces la cónica es degenerada y tiene un único punto singular. Analicemos cómo es la cónica en este caso atendiendo a cada uno de los tipos posibles:
   a) $A_{00} < 0$, entonces hay dos puntos del infinito de la cónica que son reales y distintos. Por tanto, la cónica es el producto de *dos rectas reales que se cortan en un punto propio*, el punto singular.

b) $A_{00} > 0$, entonces la cónica no tiene puntos (reales) en el infinito y decimos que es el producto de *dos rectas imaginarias conjugadas* que se cortan en el único punto real de la cónica que es el punto singular.

c) $A_{00} = 0$, entonces la recta del infinito es tangente. Por la proposición 3.5, la recta del infinito debe contener el punto singular. En este caso, tenemos dos alternativas:

1) $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, entonces la recta impropia está contenida en la cónica. Por consiguiente, la cónica es el *producto de la recta impropia por una recta propia.*

2) $a_{11} \neq 0$ ó $a_{22} \neq 0$, entonces la recta impropia no está contenida en la cónica. Por tanto, la cónica es *dos rectas paralelas* (reales o imaginarias). Para ver si son reales o imaginarias, hay que hallar la signatura de la cónica. Si $sig(\omega) = (2, 0)$ ó $(0, 2)$, se tiene *dos rectas imaginarias paralelas*, y si $sig(\omega) = (1, 1)$, se tiene *dos rectas reales paralelas.*

3. Si rango $A = 1$, existe una recta de puntos singulares, la cónica es esa recta doble y $A_{00} = 0$. Hay dos posibilidades:

a) $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, entonces la recta impropia está contenida en cónica. Por consiguiente, la cónica es la *recta impropia doble.*

b) $a_{11} \neq 0$ ó $a_{22} \neq 0$, entonces la recta impropia no está contenida en la cónica. Por tanto, la cónica es una *recta propia doble* (real)

4.3. Clasificación afín de las cuádricas. Para clasificar las cuádricas desde el punto de vista afín tenemos que ver cómo es la intersección de la cuádrica considerada con el plano del infinito. Una cuádrica se dice que es de tipo:

i) *Hiperbólico*, si su intersección con el plano del infinito es una cónica ordinaria y real.

ii) *Parabólico*, si el plano del infinito está contenido en la cuádrica o la intersección de la cuádrica con el plano del infinito es una cónica degenerada. Es decir, el plano del infinito es tangente a la cuádrica.

iii) *Elíptico*, si su intersección con el plano del infinito es una cónica ordinaria totalmente imaginaria.

Si, con respecto respecto a la referencia proyectiva asociada a una referencia afín $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, la matriz asociada a la cuádrica es A, α_{00} denota el menor complementario del elemento 00 de A y A_{00} es el adjunto de dicho elemento, entonces:

i) El plano impropio π_∞ estará contenido en la cuádrica si y sólo si la matriz α_{00} es nula.

ii) La intersección de π_∞ con la cuádrica será una cónica si y sólo si la matriz α_{00} es no nula. En este caso, α_{00} será la matriz asociada a la cónica del infinito con respecto a la referencia $\{\langle\vec{e}_1\rangle, \langle\vec{e}_2\rangle, \langle\vec{e}_3\rangle; \langle\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\rangle\}$ del plano impropio.

Teniendo esto en cuenta, cada uno de los casos anteriores se pueden expresar como:

i) Hiperbólico si y sólo si la signatura de α_{00} es $(1, 2)$ ó $(2, 1)$.

ii) Parabólico si y sólo si $A_{00} = 0$.

iii) Elíptico si y sólo si la signatura de α_{00} es $(3, 0)$ ó $(0, 3)$.

Se tienen así los siguientes casos, de acuerdo con el rango de la matriz A:

I) Si rango $A = 4$, es decir, $|A| \neq 0$. En este caso se trata de una cuádrica ordinaria. Una cuádrica ordinaria de tipo hiperbólico se llama *hiperboloide*, de tipo parabólico se llama *paraboloide* y de tipo elíptico se llama *elipsoide*. Se tienen así las siguientes condiciones:

i) sig $A = (4, 0)$ ó $(0, 4)$. En este caso, la cónica del infinito no puede ser ni ordinaria real, ni degenerada, ya que en tales casos la cuádrica tendría puntos, contradicción. Luego, la signatura de la matriz α_{00} tiene que ser $(3, 0)$ ó $(0, 3)$, por lo que se dice que se trata de un *elipsoide imaginario.*

ii) sig $A = (3, 1)$ ó $(1, 3)$, la cuádrica es ordinaria real no reglada, y se tienen las siguientes posibilidades:

.-sig $\alpha_{00} = (0, 3)$ ó $(3, 0)$. En este caso, la cuádrica se denomina *elipsoide real.*

.-sig $\alpha_{00} = (2, 1)$ ó $(1, 2)$. En este caso, la cuádrica se denomina *hiperboloide no reglado.*

.-$A_{00} = 0$. En este caso, la cuádrica se denomina *paraboloide no reglado.* Además, la signatura de α_{00} es $(2, 0)$ ó $(0, 2)$, ya que para otra posible signatura la cuádrica contendría alguna recta.

iii) sig $A = (2, 2)$, la cuádrica es ordinaria real reglada. En este caso, no puede suceder que sig $\alpha_{00} = (3, 0)$ ó $(0, 3)$, ya que la cónica del infinito debe contener puntos debido a que la intersección del plano impropio con una generatriz rectilínea debe ser no vacía. Se tienen así las siguientes posibilidades:

.-sig $\alpha_{00} = (2, 1)$ ó $(1, 2)$. En este caso, la cuádrica se denomina *hiperboloide reglado.*

.-$A_{00} = 0$. En este caso, la cuádrica se denomina *paraboloide reglado.* Además, la signatura de α_{00} es $(1, 1)$. En efecto, el plano impropio es tangente, luego existe un punto impropio P_∞ conjugado a todos los puntos impropios. Por tanto, π_∞ es el plano polar de P_∞ y dicho punto pertenece a la cuádrica. Además, sabemos que por P_∞ pasan dos generatrices, una de cada familia, que están contenidas en el plano polar de P_∞. De esto se puede concluir que la cónica del infinito son las dos generatrices que pasan por P_∞.

II) Si rango $A = 3$, entonces la cuádrica es degenerada y tiene un sólo punto singular Q. Nótese que en este caso se satisface:

.-Un plano no puede estar contenido en la cuádrica.

.-Un plano es tangente si y sólo si su intersección con la cuádrica es una cónica degenerada.

.-Un plano es tangente si y sólo si contiene al punto singular.

Por tanto, si Q no está en el plano impropio, esto es, $A_{00} \neq 0$, entonces la cónica del infinito es ordinaria y se dice que la cuádrica es un *cono.* En cambio, si Q está en el plano impropio, esto es, $A_{00} = 0$, entonces la cónica del infinito es degenerada y se dice que la cuádrica es un *cilindro.*

Analicemos ahora los tipos posibles de cuádricas de rango 3:

i) sig $A = (3, 0)$ ó $(0, 3)$ Se tienen dos alternativas:

.-$A_{00} \neq 0$, la cuádrica es un *cono imaginario.*

.-$A_{00} = 0$, la cuádrica es un *cilindro imaginario.*

ii) sig $A = (2, 1)$ ó $(1, 2)$. Aquí las alternativas que se pueden presentar son:

.-Si $A_{00} \neq 0$, la cuádrica es un *cono real.*

.-Si $A_{00} = 0$, en este caso se tienen la posibilidades siguientes:

(a) Si la signatura de α_{00} es $(2, 0)$ ó $(0, 2)$, se trata de un *cilindro elíptico real.* La cónica del infinito son dos rectas imaginarias.

(b) Si la signatura de α_{00} es $(1, 1)$, se trata de un *cilindro hiperbólico.* La cónica del infinito son dos rectas reales.

(c) Si la signatura de α_{00} es $(1,0)$ ó $(0,1)$, se trata de un *cilindro parabólico*. La cónica del infinito es una recta doble.

III) Si rango $A = 2$, existe una recta de puntos singulares y la cuádrica es el producto de dos planos que pasan por esa recta. Además, los puntos singulares están contenidos en el plano impropio si y sólo si el rango de α_{00} es menor que 2.

Se tienen las siguientes posibilidades:

i) Si $\operatorname{sig} A = (2,0)$ ó $(0,2)$, la cuádrica es el producto de dos *planos imaginarios*:
.-Si rango de α_{00} es 2. En este caso se trata de dos *planos imaginarios no paralelos.*
.-Si rango de α_{00} es 1. En este caso se trata de dos *planos imaginarios paralelos.*

ii) Si $\operatorname{sig} A = (1,1)$, la cuádrica es el producto de dos *planos reales*:
.-Si rango de α_{00} es 2. En este caso se trata de dos *planos reales propios no paralelos.*
.-Si rango de α_{00} es 1. En este caso se trata de dos *planos reales propios paralelos.*
.-Si rango de α_{00} es 0. En este caso se trata del producto del *plano impropio por un plano real propio.*

IV) Si rango $A = 1$, se trata de un plano doble de puntos singulares. En este caso hay dos posibilidades:
.-rango $\alpha_{00} = 1$, la cuádrica es un *plano propio doble.*
.-rango $\alpha_{00} = 0$, la cuádrica es el *plano impropio doble.*

4.4. Centro de una variedad cuadrática.

Definición 4.2. Se llama *centro* de una variedad cuadrática a un polo del hiperplano del infinito, caso de que exista y sea propio.

Según la ecuación de la polaridad, $\rho U = AP$, el polo del hiperplano del infinito $x_0 = 0$ tendrá que cumplir las condiciones:

$$\rho \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix},$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n &\neq 0, \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ &\dots \\ &\dots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Observación 4.3. Nótese que para una variedad cuadrática ordinaria con centro, las coordenadas homogéneas del centro vienen dadas por

$$(A_{00}, A_{01}, \dots, A_{0n}), \qquad \text{con } A_{00} \neq 0.$$

Ejemplo 4.4. Hallamos un centro, caso de que exista de la cuádrica $\mathcal{C}(\omega) \equiv x^2 - xz + yz + y - 1 = 0$. Se trata pues de resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} -2+y &=& \rho \neq 0, \\ 2x - z &=& 0, \\ 1+z &=& 0, \\ -x+y &=& 0. \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$. Sustituyendo esta solución en la primera ecuación, se tiene $-2 + \frac{1}{2} \neq 0$. Por tanto, el punto C es centro de la cuádrica.

Ejemplo 4.5. En el espacio afín tridimensional, hallamos los posibles centros, caso de que existan de la cuádrica $\mathcal{C}(\omega) \equiv -1 + 2x^2 + 3y^2 = 0$. Se trata pues de resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} -1 &=& \rho \neq 0, \\ 2x &=& 0, \\ 3y &=& 0, \\ 0\,z &=& 0. \end{array}\right\}$$

Las soluciones de este sistema son $C(0, 0, \beta)$. Sustituyendo estas soluciones en la primera ecuación, se tiene $-1 \neq 0$. Por tanto, los puntos C son centros de la cuádrica. Estos centros constituyen la recta afín

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& 0, \\ y &=& 0. \end{array}\right\}$$

A continuación vemos algunas condiciones necesarias y suficientes para que una variedad cuadrática tenga centro.

Proposición 4.6. *Sean $H_\infty = \mathcal{P}(W)$ el hiperplano impropio, $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática y $\hat{f}$ la aplicación lineal de polaridad. Entonces son equivalentes:*

(i) $\mathcal{C}(\omega)$ *tiene centro.*

(ii) $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) = \mathcal{P}(\ker \hat{f}_{|W})$, *donde $\hat{f}_{|W}$ es la aplicación lineal de polaridad de ω restringida a W.*

(iii) $\mathrm{rango}(\omega_{|W}) = \mathrm{rango}(\omega) - 1$, *donde $\omega_{|W}$ es la forma cuadrática ω restringida a W.*

Demostración. Si una variedad cuadrática tiene centro, entonces el hiperplano impropio debe estar en el conjunto imagen de la polaridad. Por tanto, dicho hiperplano debe contener a todos los puntos singulares, esto es, $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) \subseteq H_\infty$. De ahí que $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) \subseteq \mathcal{P}(\ker \hat{f}_{|W})$.

Por otro lado, si $\langle \vec{v} \rangle \in \mathcal{P}(\ker \hat{f}_{|W})$. Tomando una referencia afín $\{C; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, donde C es un centro de $\mathcal{C}(\omega)$, se tiene que $\langle \vec{v} \rangle$ es conjugado a los puntos C, $\langle \vec{e}_1 \rangle$, ..., $\langle \vec{e}_n \rangle$ que son los puntos básicos de la referencia proyectiva asociada a la referencia afín. Por consiguiente, $\langle \vec{v} \rangle$ es punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$, esto es, $\langle \vec{v} \rangle \in \mathcal{P}(\ker \hat{f})$. Por lo anterior, hemos probado (i) implica (ii).

Veamos (ii) implica (iii). En efecto,

$$\mathrm{rango}(\omega_{|W}) = \mathrm{rango}(\hat{f}_{|W}) = n - \dim(\ker \hat{f}) = \mathrm{rango}(\hat{f}) - 1 = \mathrm{rango}(\omega) - 1.$$

Veamos (iii) implica (i). Veamos que $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) \subseteq H_\infty$, es decir, que todos los puntos singulares son impropios. Supongamos que existiese un punto singular Q que fuese propio. Considerando la referencia afín $\{Q; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, se tiene que la matriz asociada A es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & a_{11} & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & a_{n1} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Por tanto rango(ω) = rango(A) = rango(α_{00}) = rango$(\omega_{|W})$, contradicción.

Como todos los puntos singulares son impropios, entonces H_∞ pertenece al conjunto imagen de la polaridad. Sea C un punto tal que su hiperplano polar sea H_∞. Veamos que C es propio y, por tanto, C es centro. Si C fuese impropio, entonces H_∞ sería tangente. Por lo que, $H_\infty \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ ó $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática degenerada en el espacio H_∞.

Si $H_\infty \subseteq \mathcal{C}(\omega)$, entonces rango$(\omega_{|W}) = 0$ y rango$(\omega) = 1$. Por tanto, $\mathcal{C}(\omega)$ sería el hiperplano H_∞ doble. En tal caso, como $C \in H_\infty$, C sería punto singular, contradicción.

Si $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática degenerada en el espacio H_∞, entonces C sería un punto singular de $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ siendo no singular de $\mathcal{C}(\omega)$. Por lo que dim(ker $\hat{f}_{|W}$) > dim(ker $\hat{f}$). De esto se tendría

$$n - \text{rango}(\omega_{|W}) > n + 1 - \text{rango}(\omega).$$

Por tanto, rango$(\omega) - 1 >$ rango$(\omega_{|W})$, contradicción.

Las contradicciones han surgido del hecho de suponer que C es impropio. Por tanto, C es propio y es un centro.

□

Corolario 4.7. *Una variedad cuadrática ordinaria tiene centro si y sólo si $A_{00} \neq 0$.*

Demostración. Aplíquese la condición (iii) de la proposición 4.6. □

Corolario 4.8. *En un espacio afín de dimensión mayor que* 1, *una variedad cuadrática con un único punto singular Q tiene centro si y sólo si Q es el único punto singular de la variedad cuadrática en el infinito.*

Demostración. Es una consecuencia directa del apartado (ii) de la proposición 4.6. □

Observación 4.9. Una cuádrica $\mathcal{C}(\omega)$ de rango 3 tiene centro si y sólo si $\mathcal{C}(\omega)$ es un cilindro elítpico (real o imaginario) o un cilindro hiperbólico.

Una cónica $\mathcal{C}(\omega)$ de rango 2 tiene centro si y sólo si $\mathcal{C}(\omega)$ son dos rectas paralelas (reales o imaginarias).

4.5. Diámetros e hiperplanos diametrales.

Definición 4.10. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ con centro. Un *diámetro* de $\mathcal{C}(\omega)$, es toda recta que contiene un centro y sólo uno.

La siguiente proposición justifica la noción de centro de una variedad cuadrática.

Proposición 4.11. *Sea C un centro de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$. Si d es un diámetro no tangente que pasa por C, entonces C es el punto medio de $\{A, B\} = \mathcal{C}(\omega) \cap d$, siendo A y B puntos reales o imaginarios.*

Demostración. Sea $X \in \mathcal{C}(\omega) \cap d$, entonces $X = \langle \lambda \vec{c} + \mu \vec{d} \rangle$, donde $\langle \vec{c} \rangle = C$ y $\langle \vec{d} \rangle = D_\infty$ es el punto del infinito del diámetro d, y $\omega(\lambda \vec{c} + \mu \vec{d}) = 0$. Como $f(\vec{c}, \vec{d}) = 0$, se obtiene

$$\lambda^2 \omega(\vec{c}) + \mu^2 \omega(\vec{d}) = 0.$$

De esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \langle -\sqrt{-\omega(\vec{c})}\, \vec{d} + \sqrt{\omega(\vec{d})}\, \vec{c} \rangle, \\ B &= \langle \sqrt{-\omega(\vec{c})}\, \vec{d} + \sqrt{\omega(\vec{d})}\, \vec{c} \rangle, \end{aligned}$$

Al ser el diámetro d no tangente $\omega(\vec{c}) \neq 0$ y $\omega(\vec{d}) \neq 0$. Hallando ahora la razón simple

$$(CAB) = (ABCD_\infty) = (CD_\infty AB) = \frac{\sqrt{-\omega(\vec{c})}}{-\sqrt{-\omega(\vec{c})}} : \frac{\sqrt{\omega(\vec{d})}}{\sqrt{\omega(\vec{d})}} = -1 : 1 = -1.$$

Por lo que $\overrightarrow{CA} = -1.\overrightarrow{CB}$. Lo que implica que C es el punto medio del segmento de extremos A y B. □

Definición 4.12. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ con centro en un espacio afín de dimensión mayor que 2. Un *hiperplano diametral* de $\mathcal{C}(\omega)$, es todo hiperplano que contenga a todos los centros.

Definición 4.13. Dos diámetros d y d' se dicen que son *conjugados* respecto de la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, si sus puntos del infinito son conjugados respecto de $\mathcal{C}(\omega)$.

Definición 4.14. Un diámetro es *conjugado* a un hiperplano diametral, si el hiperplano diametral es el hiperplano polar del punto del infinito del diámetro.

Sea el hiperplano diametral $u_0 x_0 + u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n = 0$, y un diámetro de dirección $(0, v_1, \ldots, v_n)$. Para que el diámetro sea conjugado al hiperplano diametral, ha de verificarse la ecuación

$$\rho \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix}.$$

4.6. Proyectividad central de una cónica ordinaria con centro.

Definición 4.15. Supongamos que se tiene una cónica con centro de modo que la recta del infinito sea no tangente (no es de tipo parabólico), es decir, una cónica ordinaria con centro. Se llama *proyectividad central* ó *proyectividad de diámetros conjugados* a la correspondencia que asocia a cada diámetro d un diámetro d' de tal forma que los puntos del infinito de d y d' son conjugados respecto de la cónica. Esto es, los diámetros se corresponden a través de la proyectividad inducida por la cónica en la recta del infinito.

Si d y d' tienen por direcciones (v_1, v_2) y (u_1, u_2) respectivamente, los puntos del infinito $(0, v_1, v_2)$ y $(0, u_1, u_2)$ serán conjugados si

$$(0, v_1, v_2)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Por consiguiente, se tiene la ecuación matricial

$$(v_1, v_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Esto implica

$$u_1(v_1a_{11} + v_2a_{12}) + u_2(v_1a_{21} + v_2a_{22}) = 0.$$

Lo que es equivalente a que el par $(v_1a_{21} + v_2a_{22}, -v_1a_{11} - v_2a_{12})$ es proporcional al par (u_1, u_2). Un modo matricial de escribir este hecho es

$$\rho\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ -a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Como se esperaba, esto coincide con la ecuación de la proyectividad inducida por cónica en la recta del infinito r_∞.

Proposición 4.16. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática ordinaria con centro y H un hiperplano diametral con d su diámetro congujado. Si r es una recta secante paralela a d con $r \cap \mathcal{C}(\omega) = \{A, B\}$, entonces $M = r \cap H$ es el punto medio del segmento de extremos A y B.*

Demostración. Sabemos que si D_∞ es el punto impropio de d y de r, entonces el hiperplano H es el hiperplano polar de D_∞. De donde se sigue que $(MAB) = (ABMD_\infty) = -1$. Por tanto, M es el punto medio del segmento de extremos A y B. □

Observación 4.17. En la proposición anterior, si uno considera la simetría s según el hiperplano diametral H y de dirección d, se obtiene que $s(\mathcal{C}(\omega)) = \mathcal{C}(\omega)$.

4.7. Asíntotas.

Definición 4.18. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ con centro. Se llama *variedad cuadrática asintótica* de $\mathcal{C}(\omega)$, a la variedad cuadrática tangente a la variedad cuadrática desde un centro.

Si $\mathcal{C}(\omega)$ es ordinaria, entonces el centro es el único punto singular de la variedad cuadrática asintótica cuyo rango sería n. En particular, cuando $\mathcal{C}(\omega)$ es una cuádrica ordinaria con centro, se tendrá un *cono asintótico*.

Pasamos ahora a considerar cónicas en el plano afín real.

Definición 4.19. Se dice que una recta propia r es *asíntota* de una cónica $\mathcal{C}(\omega)$, si es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ y hay un punto no singular $P_\infty = \langle\vec{p}\rangle$ de $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ contenido en la recta impropia. Por consiguiente, como para todo $X = \langle\vec{x}\rangle$ de una asíntota r se tiene $f(\vec{p}, \vec{x}) = 0$, entonces $r = \widetilde{f}(P_\infty)$. Esto es, P_∞ es un punto de tangencia no singular de r.

Proposición 4.20. *Una cónica $\mathcal{C}(\omega)$ tiene asíntota si y sólo si $\mathcal{C}(\omega)$ es de tipo hiperbólico.*

Demostración. Veamos que si $\mathcal{C}(\omega)$ tiene asíntota, necesariamente es de tipo hiperbólico. En efecto, denotando por r_∞ a la recta impropia y por r a una asíntota, se tiene que existe $\langle \vec{p} \rangle = P_\infty$ un punto no singular de $r \cap r_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$. Además, puesto que $r_\infty \cap \mathcal{C}(\omega) \neq \phi$, r_∞ es secante o tangente.

Si fuese r_∞ tangente, entonces $f(\vec{p}, \vec{x}) = 0$, para todo $\langle \vec{x} \rangle = X \in r_\infty$. Luego r_∞ es la recta polar de P_∞. Como también se llega a que r es la recta polar de P_∞, entonces $r = r_\infty$, contradicción. Luego, r_∞ es secante y la cónica $\mathcal{C}(\omega)$ es de tipo hiperbólico.

Recíprocamente, veamos que si $\mathcal{C}(\omega)$ es de tipo hiperbólico, necesariamente tiene asíntotas. En efecto, en este caso r_∞ es secante, por lo que no puede contener ningún punto singular (en tal caso, sería tangente, contradicción). Además, si A_∞ y B_∞ son los dos puntos impropios de la cónica (que son no singulares), sus respectivas rectas polares son tangentes a la cónica. Por tanto, dichas rectas no pueden coincidir con r_∞ y de ahí que sean asíntotas de $\mathcal{C}(\omega)$. □

Para calcular la ecuación de las asíntotas será suficiente obtener su dirección y un punto por donde pasen.

Por ser las tangentes en los puntos impropios, el punto del infinito de dicha recta coincidirá con un punto del infinito de la cónica. Por tanto para calcular la dirección de las asíntotas tendremos que hallar los puntos del infinito de la cónica. Es decir, resolver el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 &= 0, \\ x_0 &= 0. \end{aligned}$$

Si (v_1, v_2) indica la dirección de las asíntotas, el punto $(0, v_1, v_2)$ satisfará el sistema anterior. Esto es,

$$a_{22}v_2^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{11}v_1^2 = 0,$$

siendo $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. La asíntotas son las polares de los dos puntos $(0, v_1, v_2)$ que sean las soluciones de la ecuación anterior.

Hemos concluido que para que tenga asíntotas, la cónica debe ser de tipo hiperbólico:

- Si la cónica tiene centro (es una hipérbola), la asíntota tiene que pasar por el centro. En efecto, el centro es conjugado de todos los puntos del infinito y la asíntota está formada por los puntos que son conjugados a cierto punto del infinito que está en la cónica.
- Si la cónica tiene punto singular (es dos rectas propias reales que se cortan en un punto propio), la asíntota, al ser una recta tangente, tiene que pasar por el punto singular Q. Además, la asíntota $r = P_\infty Q$ está contenida en la cónica.

4.8. Ecuación diagonal afín de una variedad cuadrática.

Definición 4.21. Una referencia afín $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ se dice que es *autoconjugada* con respecto a una variedad cuadrática, si los puntos básicos de la referencia proyectiva asociada $\{O, \langle \vec{e}_1 \rangle, \ldots, \langle \vec{e}_n \rangle; O + (\vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n)\}$ forman un $n+1$-vértice autoconjugado.

Proposición 4.22. *Una referencia afín $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ se dice que es autoconjugada con respecto a una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si la ecuación, denominada ecuación diagonal afín, de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a dicha referencia toma la forma*

$$a_0 + a_1y_1^2 + \cdots + a_ny_n^2 = 0,$$

donde $(y_1, \ldots, y_n)$ denotan las coordenadas afines de un punto.

Demostración. Si $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es autoconjugada, entonces para la referencia $\{O, \langle\vec{e}_1\rangle, \ldots, \langle\vec{e}_n\rangle; O + (\vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n)\}$ la ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ es

$$a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 = 0. \tag{4.5}$$

Dividiendo por x_0^2, se obtiene

$$a_0 + a_1 y_1^2 + \cdots + a_n y_n^2 = 0.$$

Recíprocamente, si esta es la ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a la referencia afín, entonces (4.5) es la ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a la referencia proyectiva $\{O, \langle\vec{e}_1\rangle, \ldots, \langle\vec{e}_n\rangle; O+(\vec{e}_1+\cdots+\vec{e}_n)\}$. Por tanto, los puntos básicos de esta referencia forman un $n+1$-vértice autoconjugado. $\square$

Proposición 4.23. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática. Una referencia afín $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es autoconjugada con respecto $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si O es un centro o un punto singular propio y $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ son direcciones conjugadas dos a dos. Además, en dicho caso, la ecuación diagonal afín correspondiente,*

$$a_0 + a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \cdots + a_n y_n^2 = 0,$$

es tal que $a_0 = \omega(\vec{c})$, donde $\langle\vec{c}\rangle = O$ y $\langle\vec{c} + \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n\rangle = C + (\vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n)$. Se tiene que $a_0 \neq 0$ cuando O es centro y $a_0 = 0$ cuando O es punto singular propio.

Demostración. Si $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es autonjugada, entonces O y $\langle e_i\rangle$ son conjugados. Por tanto, todos los puntos del hiperplano impropio son conjugados a O. Si O no es punto singular, entonces el hiperplano polar de O es el hiperplano impropio. Por tanto, O es un centro de $\mathcal{C}(\omega)$.

Recíprocamente, si O es un centro o un punto singular propio y $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ son direcciones conjugadas dos a dos, es immediato que $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es autoconjugada. $\square$