Universidad de La Laguna

Curso Introductorio a las Matemáticas Universitarias

Tema 5: Álgebra matricial

Evelia García Barroso
María Victoria Reyes Sánchez

5. ÁLGEBRA MATRICIAL

Las matrices aparecen por primera vez hacia el año 1850, introducidas por el matemático inglés J.J. Sylvester (1814-1897). El desarrollo inicial de la teoría se debe al matemático y astrónomo irlandés W.R. Hamilton (1805-1865), y al inglés A. Cayley (1821-1895), quien utilizó en 1858 la notación matricial como una forma abreviada de representar un sistema de ecuaciones lineales. Las matrices aparecen en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales. Además, las matrices están presentes de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física... y actualmente su utilización constituye una parte esencial de los lenguajes de programación (arrays), ya que la mayoría de los datos se introducen en los ordenadores como tablas organizadas en filas y columnas: hojas de cálculo, bases de datos...

5.1. Definición de matriz

Se llama matriz de orden $m \times n$ a todo conjunto de $m \cdot n$ elementos a_{ij} dispuestos en m líneas horizontales (llamadas filas) y en n líneas verticales (llamadas columnas) de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Abreviadamente puede escribirse como $A = (a_{ij})$ donde el subíndice i varía entre los valores 1 y m y el subíndice j varía entre los valores 1 y n. Los subíndices indican la posición del elemento dentro de la matriz, el primero denota la fila i y el segundo la columna j.

Ejemplo: la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

es de orden 3×2 donde $a_{11} = 4$, $a_{12} = -1$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 9$ y $a_{23} = -2$.

Obsérvese que denotamos las matrices con letras mayúsculas y que en el ejemplo anterior los elementos de la matriz son números enteros. En estas notas trabajaremos en general con matrices cuyos elementos serán números reales o complejos pero existen matrices con elementos no numéricos como por ejemplo la disposición de los alumnos en una clase (filas $\times$ columnas) o el horario de clases de un curso donde las filas representan las franjas horarias, las columnas representan los días de la semana y los elementos de la matriz son las asignaturas.

Dos *matrices* $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son *iguales* cuando tienen el mismo orden y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales, es decir $a_{ij} = b_{ij}$ para todo valor de i y de j. Según esta definición, para que las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & a \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 9 & b \end{pmatrix}$ sean iguales debe ocurrir que $a = -1$ y $b = -7$.

Ejercicio: Determina si los siguientes pares de matrices son iguales:

1. $\begin{pmatrix} 4 & 5^2 - 13 & 14 \\ 9 & -7 & \sqrt{16} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \frac{24}{6} & 12 & +\sqrt{164} \\ 9 & -\sqrt{49} & 2^2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} \frac{14-3}{2} & -3 \\ 3{,}5 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 + \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{21}{6} & 1 \end{pmatrix}$

Algunos tipos de matrices

Podemos clasificar las matrices según distintos criterios, como pueden ser su forma o las propiedades de sus elementos. Atendiendo a la forma tenemos:

- Una matriz *fila* es aquella que sólo tiene una fila:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

  Ejemplo: los vectores en el plano real $\mathbb{R}^2$ o en el espacio real $\mathbb{R}^3$ se pueden interpretar como matrices filas.

- Análogamente una matriz *columna* es aquella que sólo tiene una columna:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

- Una matriz *cuadrada* es aquella que tiene igual número de filas que de columnas. En este caso diremos que la matriz es de orden n, donde n es el número de filas (y columnas).

  Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n llamamos

  - *diagonal principal* a los elementos a_{ii} donde i varía entre 1 y n:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

  - *diagonal secundaria* a los elementos a_{ij} donde $1 \leq i \leq n$ y $j = n + 1 - i$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \mathbf{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a_{n1}} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: los *cuadrados mágicos*, que son aquellas matrices cuadradas de números enteros positivos cuya suma de los elementos de cada fila, columna o diagonales es constante. Por ejemplo, el conocido como cuadrado mágico de Durero cuya constante es 34 y que aparece en la esquina superior derecha de su grabado titulado *Melancolía*:

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 1. Cuadrado mágico de Durero

o el cuadrado mágico de la fachada de la pasión del Templo Expiatorio de la Sagrada Familia en Barcelona[1]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & 14 & 4 \\ 11 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 10 & 10 & 5 \\ 13 & 2 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$

Figura 2. Cuadrado mágico en la Sagrada Familia

cuya constante es 33, la edad de Jesucristo en la Pasión.

Atendiendo a sus elementos tenemos:

- La matriz *nula*, que se denota por O y cuyos elementos son todos cero, así por ejemplo $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de orden 2×3.

[1] Las imágenes del grabado *Melancolía* de Durero y del cuadrado mágico y los amantes en la Sagrada Familia han sido tomadas de *Wikimedia Commons* (commons.wikimedia.org).

- La matriz *identidad*, que es una matriz cuadrada en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a uno y los restantes elementos son ceros:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  es la matriz identidad de orden 3.

- *Matriz diagonal* es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos. Obsérvese que toda matriz identidad es diagonal. Es importante destacar que en la definición de matriz diagonal los elementos de la diagonal principal pueden tomar el valor que se desee, nulo o no, así por ejemplo

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

  es una matriz diagonal.

- *Matriz escalar* es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales, como por ejemplo

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- *Matriz triangular superior* es una matriz cuadrada en la que todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos, es decir, si $A = (a_{ij})$ es cuadrada de orden n, A será triangular superior si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$, como por ejemplo

$$\begin{pmatrix} -1 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- *Matriz triangular inferior* es una matriz cuadrada en la que todos los elementos por encima de la diagonal principal son nulos, es decir, si $A = (a_{ij})$ es cuadrada de orden n, A será triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$, como por ejemplo

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ 9 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

- *Matriz triangular* es una matriz triangular inferior o superior.

Obsérvese que los términos matriz identidad, diagonal, escalar y triangular se refieren únicamente a matrices cuadradas. Además toda matriz diagonal es triangular superior y triangular inferior.

5.2. Traspuesta de una matriz

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$, llamamos *traspuesta* de A, y se denota por A^t, a la matriz de orden $n \times m$ que se obtiene cambiando filas por columnas en A, es decir, $A^t = (b_{ij})$ donde $b_{ij} = a_{ji}$. Así por ejemplo

$$\text{si} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 12 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que dada cualquier matriz A se verifica que $(A^t)^t = A$.

5.3. Matrices simétricas y antisimétricas

Llamamos *matriz simétrica* a toda matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = a_{ji}$, es decir, $A = A^t$. Ejemplos de matrices simétricas son

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Llamamos *matriz antisimétrica* a toda matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = -a_{ji}$, es decir, $A = -A^t$. Como consecuencia de ello, los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son nulos.

Ejemplos de matrices antisimétricas son

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 \\ -3 & 0 & 4 \\ -10 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & -13 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio: Determina de qué tipo son las siguientes matrices (observa que una misma matriz puede ser de varios tipos):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.4. Operaciones con matrices

Hemos visto que los vectores los podemos identificar con matrices filas. De igual forma que sumamos vectores y multiplicamos estos por un número podemos definir dichas operaciones para las matrices:

Suma de matrices

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, del mismo orden $m \times n$, se define la *suma* de A y B, y se denota $A + B$, como la matriz $(a_{ij} + b_{ij})$, es decir:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & \frac{3}{2} \\ 16 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ entonces $A + B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 13 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

En un contexto real podemos escribir por cada Centro de Enseñanza Secundaria de Canarias la matriz cuadrada de orden 2×3 donde ordenamos los chicos y chicas de las tres modalidades del segundo curso de Bachillerato. Si queremos saber el número de chicos y chicas por cada modalidad en los Centros de Tenerife, basta con sumar las matrices asociadas a los centros situados en dicha isla.

La suma de matrices posee las siguientes propiedades:

1. Propiedad asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$.
2. Propiedad commutativa: $A + B = B + A$.
3. $A + O = O + A = A$.
4. $(A + B)^t = A^t + B^t$.

donde A, B, C son matrices cualesquiera del mismo orden y O es la matriz nula de dicho orden.

Producto de matrices por un número real

El producto de una matriz $A = (a_{ij})$ por un número real k es la matriz (ka_{ij}), que denotamos kA, es decir, es la matriz del mismo orden que A cuyos elementos se obtienen multiplicando los elementos de A por el número k:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 14 \\ -3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ entonces $3 \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 42 \\ -9 & 21 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Retornando al ejemplo de los Centros de Secundaria en Canarias, si fijamos uno de ellos y sabemos que el número de estudiantes aprobados por curso es el 70 por ciento de los matriculados, multiplicando la matriz asociada a dicho Centro por $0'7$ obtenemos el número de alumnos y alumnas que han aprobado en cada especialidad de Bachillerato.

Al número real k se le llama también *escalar*, y al producto de un número por una matriz, producto de *escalares por matrices*.

El producto de un número por una matriz posee las siguientes propiedades:

1. $k(A+B) = kA + kB$.
2. $(k+h)A = kA + hA$.
3. $k(hA) = (kh)A$.
4. $1 \cdot A = A$.
5. $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$.

donde A y B son matrices cualesquiera del mismo orden y h, k son números reales.

Se llama *matriz opuesta* de la matriz $A = (a_{ij})$ a la matriz que resulta de multiplicar el número -1 por A y la denotamos $-A$.

Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ -30 & 17 \\ 0 & -21 \end{pmatrix}$ su matriz opuesta es $-A = \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ 30 & -17 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$.

Obsérvese que la suma de toda matriz con su opuesta es la matriz nula, es decir $A + (-A) = O$.

Dadas dos matrices A, B del mismo orden llamamos *diferencia* de A y B, que escribimos $A - B$, a la suma de A con la matriz opuesta de B, es decir $A - B = A + (-B)$.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & \frac{3}{2} \\ 16 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ entonces $A - B = \begin{pmatrix} -6 & 7 & -1 \\ -19 & 5 & -9 \end{pmatrix}$.

El producto escalar y la suma de matrices verifican las siguientes propiedades de simplificación:

1. $A + C = B + C$ es equivalente a $A = B$,
2. $kA = kB$ es equivalente a $A = B$ si k es distinto de 0,
3. $kA = hA$ es equivalente a $h = k$ si A es distinta de la matriz nula,

donde A, B, C son matrices cualesquiera del mismo orden y h, k son dos números reales.

Producto de matrices

Dados dos vectores podemos multiplicarlos mediante el producto escalar: si $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ su producto escalar se define como

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = xx' + yy' + zz'.$$

Además de la interpretación geométrica de dicho producto se pueden dar otras. Por ejemplo si vamos de paseo y compramos 3 CD de música a 15 euros cada uno, 2 libros de bolsillo a $9'5$ euros y 2 botellas de agua a 60 céntimos, podemos considerar $(3, 2, 2)$ como vector compra y $(15, 9'5, 0'6)$ como vector precio, y el coste total de las compras de esa tarde fue:

$$(3, 2, 2) \cdot (15, 9'5, 0'6) = 3 \cdot 15 + 2 \cdot 9'5 + 2 \cdot 0'6 = 65'2 \text{ euros.}$$

Obsérvese que para poder definir el producto escalar los vectores deben tener el mismo número de componentes.

El producto escalar se puede interpretar como el producto de una matriz fila por una matriz columna:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'.$$

Vamos a generalizar el producto a dos matrices no necesariamente filas o columnas como el producto de todas las filas de la primera por todas las columnas de la segunda (¡en ese orden!). Para poder multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda matriz; dicho de otra forma: dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ de orden $n \times p$, la matriz $A \cdot B = (c_{ij})$ es una nueva matriz de orden $m \times p$, donde el término c_{ij} se obtiene multiplicando escalarmente la fila i de A por la columna j de B, es decir,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, p.$$

Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -9 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $A.B = \begin{pmatrix} -15 & 0 & 3 \\ -54 & 2 & 11 \\ 9 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejemplo: Los precios en dos centros comerciales del último CD editado por tres grupos musicales distintos se recoge en la siguiente matriz $\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 12 & 14 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$. Si en el periodo de rebajas el primer disco tiene un descuento del 10 por ciento, el segundo del 15 por ciento y el tercero del 12 por ciento, ¿en cuál de las dos centros comerciales compraríamos los tres discos más baratos? Para resolver la cuestión basta multiplicar:

$$\begin{pmatrix} 0'9 & 0'85 & 0'88 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 12 & 14 \\ 9 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31'62 & 35'9 \end{pmatrix}$$

y concluimos que ahorramos dinero comprando en el primer centro comercial.

El producto de matrices posee las siguientes propiedades:

1. Si A, B, C son matrices tales que $A \cdot B$ y $B \cdot C$ están definidas, entonces $A \cdot (B \cdot C)$ y $(A \cdot B) \cdot C$ también están definidas y $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
2. Si A, B, C son matrices tales que $A.B$ y $B + C$ están definidas, entonces $A \cdot (B + C)$ y $A \cdot B + A \cdot C$ también están definidas y $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
3. Si A, B, C son matrices tales que $A + B$ y $A \cdot C$ están definidas, entonces $(A + B) \cdot C$ y $A \cdot C + B \cdot C$ también están definidas y $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.
4. Si A, B son matrices tales que $A \cdot B$ está definida, entonces $B^t \cdot A^t$ también está definida y $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.
5. Si A es una matriz cuadrada de orden n e I_n es la matriz identidad de orden n entonces $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.

Aunque muchas de las propiedades de las operaciones con números reales se verifican también en las operaciones de matrices, existen otras, como las que presentamos a continuación, que no se verifican:

1. El producto de matrices no verifica la propiedad conmutativa:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 55 & 29 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 38 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Si $A.B = A.C$, no podemos deducir que $B = C$:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ pero $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Si $A.B = 0$, no tiene por qué ocurrir que A o B sean iguales a la matriz nula:
$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pero ni $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ni $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ son la matriz nula.

En el conjunto de las matrices cuadradas podemos definir *la potencia de matrices* de la forma siguiente: si A es una matriz cuadrada y n es un número entero positivo definimos A^n como el producto de n veces la matriz A por ella misma, es decir, $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ veces}}$. Obsérvese que $A^n = A^{n-1} \cdot A$.

Además se cumple en general que:

1. $(A + B)^2$ es distinto de $A^2 + 2AB + B^2$,
2. $(A - B)^2$ es distinto de $A^2 - 2AB + B^2$,
3. $(A + B)(A - B)$ es distinto de $A^2 - B^2$.

5.5. Ejercicios

1. Encuentra matrices que confirmen las tres afirmaciones anteriores.

2. Consideramos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 12 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   Justifica si las siguientes operaciones están bien definidas y realiza aquellas que sí lo están: A^2, $A \cdot B$, $B \cdot A$, $5D$, $3C - 7D$, $-B$.

5.6. Sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen frecuentemente en diferentes campos de la ciencia en general y de las matemáticas en particular, como muestran los siguientes ejemplos tomados del Bachillerato de Ciencias.

El primer ejemplo procede de la Física: imagina que viajas en avión entre dos ciudades que distan 2200 kilómetros. Si el vuelo de ida, con viento en contra, dura tres horas y el de regreso ese mismo día, con viento a favor, dura 2 horas y media, ¿cual es la velocidad del avión (respecto del suelo) y la velocidad del viento, suponiendo que ambas son constantes? Si denotamos por x la velocidad del avión y por y la del viento, el problema se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3(x-y) & = & 2200 \\ \frac{5}{2}(x+y) & = & 2200 \end{array}\right\}$$

El segundo ejemplo nos viene de la Química: Si mezclamos, bajo condiciones controladas, tolueno C_7H_8 con ácido nítrico HNO_3 podemos producir trinitrotolueno $C_7H_5O_6N_3$ (más conocido como TNT) con un excedente de agua. ¿En qué proporción debemos mezclar los diferentes componentes para obtenerlo? Si recordamos el principio general que nos dice que el número de átomos de cada componente antes de la mezcla debe ser el mismo que después de la mezcla, el diagrama de nuestro ensayo es

$$xC_7H_8 \quad + \quad yHNO_3 \quad \longrightarrow \quad zC_7H_5O_6N_3 \quad + \quad wH_2O$$

lo que nos da el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 7x & = & 7z \\ 8x + 1y & = & 5z + 2w \\ 1y & = & 3z \\ 3y & = & 6z + 1w \end{array}\right\}$$

Contestar a las preguntas de los ejemplos anteriores requiere resolver un sistema de ecuaciones, donde en ninguna ecuación aparecen potencias de las variables que sean superiores a uno. Mostraremos un método, conocido como *método de Gauss*, en honor de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que nos permitirá resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales.

Se llama *ecuación lineal en las variables* $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ a toda ecuación de la forma

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b \tag{1}$$

donde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ son los coeficientes de la ecuación y $b \in \mathbb{R}$ es el término independiente de la misma.

Una n-upla $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ es una *solución* de (o satisface, o verifica) la ecuación (1) si $a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto finito de ecuaciones lineales de la forma:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

y diremos que tiene por *solución* a $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ si la n-upla es solución de todas las ecuaciones que forman el sistema.

Ejemplo.- El par $(2, 0)$ es solución del sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_2 = 6 \end{array}\right\}$$

sin embargo $(0, 2)$ no es solución del mismo. Podemos interpretar el resultado de forma geométrica: cada ecuación del sistema se corresponde con la ecuación de una recta en el plano. Decir que el par $(2, 0)$ es solución del sistema equivale a decir que las rectas $L_1 \equiv 2x_1 + x_2 = 4$ y $L_2 \equiv 3x_1 + x_2 = 6$ se cortan en un único punto del plano, el punto $(2, 0)$:

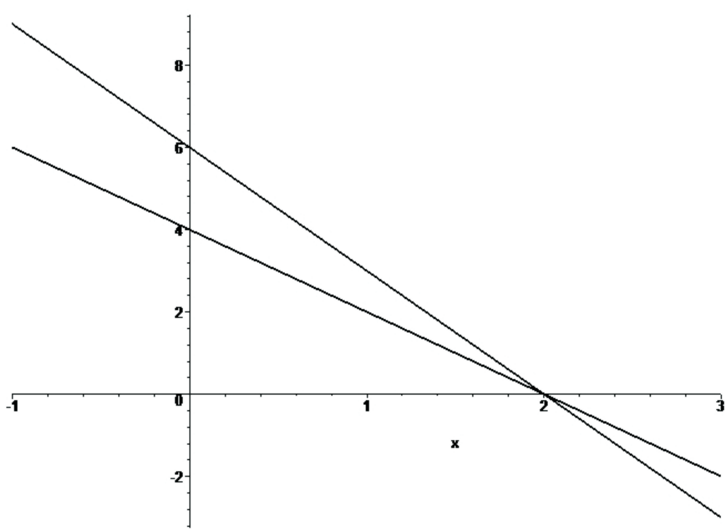

FIGURA 3. Rectas que se cortan en el punto $(2, 0)$.

Sabemos geométricamente que dos rectas en el plano o bien son secantes, como nuestro ejemplo, o bien paralelas o bien son coincidentes. Algebraicamente, la afirmación anterior se reduce a decir que un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas o bien tiene una única solución, o ninguna o infinitas:

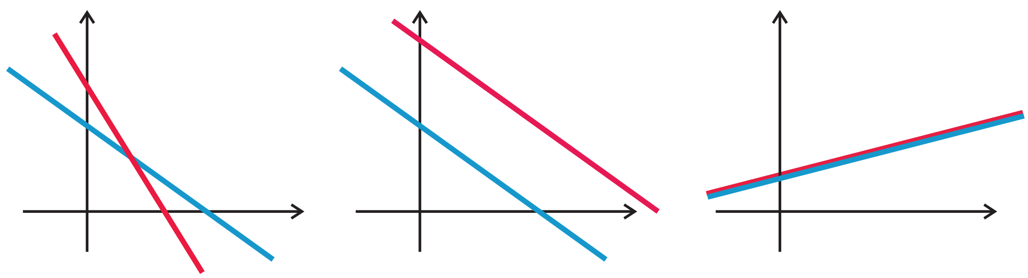

FIGURA 4. Rectas secantes, paralelas y coincidentes.

Diremos que un sistema de ecuaciones es *incompatible* si no admite ninguna solución. En caso contrario diremos que es *compatible*. Los sistemas compatibles a su vez pueden tener una única solución, en cuyo caso diremos que es *compatible determinado*, o más de una solución que denominaremos *compatible indeterminado*.

Diremos que dos sistemas con el mismo número de incógnitas son *equivalentes* si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Resolver un sistema consiste en encontrar el conjunto de sus soluciones. El *Método de Gauss* es un algoritmo que permite resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales. En líneas generales, este método consiste en transformar el sistema de ecuaciones lineales que tenemos de partida en otro de tal forma que tenga el mismo conjunto de soluciones, es decir en un sistema equivalente, pero que sea *más fácil* de resolver. Por ejemplo si tomamos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x_3 & = & 9 \\ x_1+5x_2-2x_3 & = & 2 \\ \frac{1}{3}x_1+2x_2 & = & 3 \end{array}\right\}$$

podemos transformarlo sucesivamente de la siguiente forma, que nos será más fácil de resolver:

Permutamos la primera con la tercera ecuación $\left.\begin{array}{rcl} \frac{1}{3}x_1+2x_2 & = & 3 \\ x_1+5x_2-2x_3 & = & 2 \\ 3x_3 & = & 9 \end{array}\right\}$

Multiplicamos la primera ecuación por 3 $\left.\begin{array}{rcl} x_1+6x_2 & = & 9 \\ x_1+5x_2-2x_3 & = & 2 \\ 3x_3 & = & 9 \end{array}\right\}$

Sumamos a la segunda ecuación la primera multiplicada por -1

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1+6x_2 & = & 9 \\ -x_2-2x_3 & = & -7 \\ 3x_3 & = & 9 \end{array}\right\}$$

y podemos resolver el último sistema despejando las variables de *abajo hacia arriba*. Así, de la última ecuación obtenemos $x_3 = 3$, que sustituido en la segunda ecuación nos da $x_2 = 1$ y sustituyendo por último en la primera ecuación, obtenemos $x_1 = 3$, y por tanto el sistema tiene una única solución que es la terna $(3, 1, 3)$.

Los diferentes sistemas de ecuaciones que van apareciendo son *equivalentes*, es decir, todos tienen el mismo conjunto de soluciones, gracias al siguiente teorema:

Teorema.- Si transformamos un sistema de ecuaciones lineales en otro utilizando alguna de las siguientes operaciones:

1. se permuta una ecuación por otra,

2. se multiplica una ecuación por una constante no nula,

3. se sustituye una ecuación por la suma de ella con un múltiplo de otra ecuación,

entonces ambos sistemas tienen el mismo conjunto de soluciones.

Las tres operaciones del teorema anterior se denominan *operaciones elementales* u *operaciones de Gauss*, y son conocidas por *permutación*, *multiplicación por un escalar* y *pivotación*, respectivamente.

Obsérvese que dichas operaciones tienen restricciones. Así, por ejemplo, está prohibido multiplicar por el escalar nulo pues cambia el conjunto de soluciones del sistema. De la misma forma está prohibido sustituir una ecuación por ella menos el producto de ella por -1 pues tiene el mismo efecto que multiplicar la ecuación por cero.

Por simplificar denotaremos:

- la permutación de la i-ésima ecuación por la ecuación j-ésima como $F_i \leftrightarrow F_j$,

- la multiplicación de la i-ésima ecuación por el escalar no nulo α como αF_i,

- la pivotación de la i-ésima ecuación mediante el escalar α y la j-ésima ecuación por $F_i + \alpha F_j$.

Utilizando transformaciones elementales todo sistema de ecuaciones lineales se transforma en un sistema equivalente triangular, que será más *fácil* de resolver.

Un sistema de ecuaciones lineales queda determinado por sus coeficientes y sus términos independientes. Dichos números podemos escribirlos en dos matrices, la matriz formada por los coeficientes se denomina *matriz del sistema* y si a ésta le añadimos una columna con los términos independientes, se obtiene la *matriz ampliada*, más concretamente la matriz asociada al sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \tag{2}$$

es

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y su matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Podemos reescribir el sistema (2) usando su matriz asociada y el producto de matrices de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

que se conoce como *escritura matricial* del sistema en cuestión.

Si retornamos al sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x_3 & = & 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 & = & 3 \end{array}\right\}$$

tenemos que su matriz asociada y su matriz ampliada son

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{ccr|c} 0 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

respectivamente y la escritura matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que podemos realizar a las filas de la matriz ampliada las mismas transformaciones que hicimos al sistema para resolverlo y obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 0 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccr|r} \frac{1}{3} & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_1} \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 6 & 0 & 9 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+(-1)F_1}$$

$$\left(\begin{array}{crr|r} 1 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

siendo la última matriz, la matriz ampliada del sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 6x_2 & = & 9 \\ -x_2 - 2x_3 & = & -7 \\ 3x_3 & = & 9 \end{array}\right\}$$

que resolvimos fácilmente.

Diremos que un sistema de ecuaciones lineales es *homogéneo* si todos sus términos independientes son nulos, es decir, si $b_i = 0$ para todo valor de i.

Los sistemas homogéneos son siempre compatibles pues admiten la solución $(0, \ldots, 0)$, pero pueden ser determinados o indeterminados.

Como veremos a continuación las transformaciones elementales serán de utilidad en otros contextos.

Obsérvese que toda transformación elemental es reversible. Es decir, si el sistema S es equivalente al sistema R por una operación elemental entonces existe una operación elemental que transforma el sistema R en el sistema S.

5.7. Ejercicios

1. Usa el método de Gauss para resolver los sistemas:

$$(a) \quad \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 13 \\ x - y = -1 \end{array}\right\} \qquad\qquad (b) \quad \left.\begin{array}{r} x - z = 0 \\ 3x + y = 1 \\ -x + y + z = 4 \end{array}\right\}$$

2. Hay otros métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales además del método de Gauss. Uno de ellos, visto en la Educación Secundaria, consiste en despejar una variable en una ecuación y sustituirla en las otras ecuaciones. Este paso se repite hasta que conseguir una ecuación con una única incógnita, de la cual despejamos su valor y aplicamos entonces sustitución ascendente. Este método conlleva en general más operaciones y por tanto la probabilidad de equivocarse es mayor. Para ilustrar lo anterior tomamos el ejemplo

$$\left.\begin{array}{rcr} x + 3y & = & 1 \\ 2x + y & = & -3 \\ 2x + 2y & = & 0 \end{array}\right\}$$

   a) Despeja x de la primera ecuación y sustitúyela en la segunda ecuación. Encuentra el valor de y.

   b) Sustituye el valor de x de la primera ecuación en la tercera y encuentra el valor de y.

   c) ¿Deducimos de lo anterior que el sistema tiene solución? ¿Qué nuevo paso debemos dar para concluir correctamente que el sistema no tiene solución?

3. Recuerda las propiedades elementales de la trigonometría para deducir, utilizando el método de Gauss, si el siguiente sistema tiene solución:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2\operatorname{sen}\alpha - \cos\beta + 3\operatorname{tg}\gamma & = & 3 \\ 4\operatorname{sen}\alpha + 2\cos\beta - 2\operatorname{tg}\gamma & = & 10 \\ 6\operatorname{sen}\alpha - 3\cos\beta + \operatorname{tg}\gamma & = & 9 \end{array}\right\}$$

   ¿Quiénes son las incógnitas del sistema?

4. ¿Los sistemas que resultan de problemas de reacciones químicas, como el del ejemplo del TNT, deben tener infinitas soluciones? ¿Qué información nos proporcionan las soluciones de dichos sistemas?

5. ¿Hay algún sistema lineal con dos incógnitas cuyo conjunto de soluciones sea todo el plano $\mathbb{R}^2$?

6. ¿Hay alguna operación elemental que sea redundante, es decir, que se pueda obtener de otras operaciones elementales?

5.8. Determinantes y sus propiedades

En este apartado asociaremos a toda matriz cuadrada A un número real, llamado *determinante* de A, que denotaremos $|A|$. Estudiaremos explícitamente la forma de calcularlo así como su interpretación geométrica y su uso en el álgebra lineal.

<u>*Determinante de una matriz cuadrada de orden 2:*</u>

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es una matriz 2×2, calculamos su determinante como

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Por ejemplo el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - (-2) \cdot 7 = 8 + 14 = 22.$$

Geométricamente el determinante de A, en valor absoluto, coincide con el área del paralelogramo que determinan las filas de A vistas como elementos de $\mathbb{R}^2$. En efecto el área del paralelogramo que determinan los vectores (a_{11}, a_{12}) y (a_{21}, a_{22}) coincide con el área de cualquier otro paralelogramo que tenga la misma base y la misma altura que el anterior.

Obtenemos entonces un segundo paralelogramo trasladando el primer vector hasta intersectar el eje x y el segundo vector hasta intersectar el eje y. Algebraicamente dicha traslación consiste en hacer dos transformaciones elementales sobre las filas: si ningún vector está sobre el eje y, a_{11} y a_{12} son distintos de cero y las transformaciones consistirían en sumar a la segunda fila la primera fila multiplicada por $-\frac{a_{12}}{a_{11}}$ y luego a la primera fila le restamos una proporcional a la segunda, de tal forma que la componente de la matriz que ocupa la fila primera y la columna segunda sea cero. Si uno de los vectores ya está sobre uno de los ejes, basta trasladar el otro vector hasta el otro eje.

Veamos esto en el ejemplo anterior:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 22 \end{vmatrix} = 22.$$

<u>*Determinante de una matriz cuadrada de orden 3:*</u>

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es una matriz 3×3, calculamos su determinante, utilizando la conocida como regla de Sarrus, en honor al matemático francés Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861) que la hizo explícita en su artículo *Nouvelles méthodes pour la résolution des équations* publicado en Estrasburgo en 1833:

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Por ejemplo el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 8\cdot 7+1.(-2)\cdot 4+0.(-2).(-6)-0\cdot 8\cdot 4-1.(-2)\cdot 7-1.(-2).(-6) = 50.$$

El determinante de una matriz de orden tres se puede interpretar como el volumen del paralelepípedo determinado por sus tres filas.

<u>*Determinante de una matriz cuadrada de orden n:*</u>

Calcularemos el determinante de una matriz cuadrada de orden n mediante recurrencia utilizando el concepto de menor complementario.

Se llama *menor complementario* de un elemento a_{ij} de una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$ al determinante de la matriz de orden $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j de la matriz original, y se denota por M_{ij}. Se llama *adjunto* del elemento a_{ij}, y lo denotaremos A_{ij} a:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Si en una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ cada elemento se sustituye por su adjunto, se obtiene una matriz del mismo tamaño que se llama *adjunta* de A, y que se denota por adj$A$.

Calculamos un determinante de una matriz cuadrada de orden $n \times n$, a partir del desarrollo por filas o columnas siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots a_{nj}A_{nj},$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$.

Retornando al determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, si desarrollamos por la primera fila se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}.$$

Obsérvese que el número de sumandos obtenidos al desarrollar un determinante crece rápidamente al aumentar el orden de la matriz. Así, los determinantes de matrices de orden 4 tienen 24 términos, los de orden 5 tienen 120, y en general los de orden n tienen $n!$ términos. Es claro entonces que calcular determinantes desarrollando por filas o columnas es un proceso largo. Las siguientes propiedades nos ayudarán a calcular los determinantes de una forma más rápida, *utilizando transformaciones elementales*:

1. Si se intercambian dos filas o dos columnas de un determinante, éste cambia de signo.
2. Si se multiplica una fila o columna de un determinante por un número real k, éste queda multiplicado por k.
3. Si se suma a una fila o columna de un determinante un múltiplo de otra, su valor no varía.

Además se verifican las siguientes propiedades:

1. Si una matriz cuadrada tiene dos filas o columnas iguales, su determinante es igual a cero.
2. Si una matriz cuadrada tiene una fila o una columna nula, su determinante es igual a cero.

3. El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las respectivas matrices.

Ejemplo: Queremos calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Restamos a la tercera columna la primera, y a la cuarta columna el doble de la primera:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos por la primera fila y aplicando la regla de Sarrus se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 19.$$

5.9. Ejercicios

Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

4. $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

5.10. Rango de una matriz

Dada una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

se dice que las m filas $F_1, F_2, \ldots, F_m$ son *linealmente* independientes si de la relación

$$\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_m F_m = 0,$$

deducimos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Obsérvese que lo anterior es equivalente a decir que la única solución que tiene el sistema homogéneo de matriz asociada A e incógnitas $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ es la solución nula.

De forma análoga se define la independencia lineal de las n columnas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de la matriz A.
Se define el rango de una matriz como el número máximo de filas (o el número máximo de columnas) que son linealmente independientes. Aunque no lo demostraremos aquí es un hecho fundamental del álgebra lineal que ambos números coinciden.

Existen distintos métodos para calcular el rango de una matriz:

Usando el determinante:

El rango de una matriz coincide con el orden del mayor determinante distinto de cero que pueda extraerse de la misma.
Ejemplo: La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango dos, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, pero $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Usando las transformaciones elementales de Gauss:

Tomamos la matriz A de orden $m \times n$ y hacemos transformaciones elementales en la misma hasta obtener una matriz T del mismo orden, que cumple:

1. Si T tiene una fila de ceros, ésta se encuentra en la parte inferior de la matriz.
2. El primer término no nulo de cada fila es igual a 1.
3. El primer término no nulo de cada fila está a la derecha del de la fila anterior.

El rango de A coincide entonces con el número de filas no nulas de la matriz T.

Ejemplo: Usando la matriz del ejemplo anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+(-1)F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+(-2)F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+(-1)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz resultante tiene dos filas no nulas que son linealmente independientes, por lo tanto el rango de la matriz es dos.

5.11. Matriz inversa

Una matriz cuadrada A de orden n se dice que es inversible si existe una matriz $n \times n$, denotada por A^{-1}, tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

La matriz A^{-1} se llama *matriz inversa* de A.

Obsérvese que no todas las matrices cuadradas tienen inversa, como por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, si existiera su inversa sería una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que es imposible pues no existen números reales a y c tales que $a + c = 1$ y $a + c = 0$.

Se llama *matriz regular o inversible* a toda matriz cuadrada que tiene inversa. En caso contrario, se dice que la *matriz es singular*.

Podemos caracterizar las matrices cuadradas que son inversibles mediante su determinante o bien su rango. Más precisamente,

Teorema.- Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces

1. A es inversible si y sólo si su determinante es no nulo.
2. A es inversible si y sólo si su rango es exactamente n.

Existen distintos métodos para calcular la matriz inversa de una matriz dada:

Usando el determinante:

Si la matriz cuadrada A es inversible su matriz inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A)^t.$$

Ejemplo: La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ es inversible pues su determinante es igual a -7. Además su matriz adjunta es $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y la traspuesta de ésta es $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, de lo que concluimos que la inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}.$$

Usando las transformaciones elementales de Gauss:

Si la matriz cuadrada A de orden n es inversible calculamos la matriz inversa de A, formando una nueva matriz colocando a la derecha de A la matriz identidad del mismo orden $(A|I_n)$, y aplicando transformaciones elementales por filas hasta obtener $(I_n|B)$, entonces B será la matriz inversa de A. Si al realizar el proceso de transformación alguna de las filas de la matriz se anula, entonces A no tiene inversa.

Ejemplo: Volvemos a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, realizamos transformaciones elementales por filas:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-3F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{7}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-2F_2}$$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 3/7 & -1/7 \end{array}\right)$, y concluimos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}.$$

5.12. Ejercicios

1. Determina si las siguientes matrices son inversibles (observa que son las mismas que las del ejercicio de la sección anterior) y calcula la inversa, mediante los dos métodos, de aquellas que son regulares:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   c) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

   d) $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Nota.- De igual forma que hemos definido las transformaciones elementales por filas, podemos definirlas por columnas. Teniendo eso en cuenta también podemos calcular la inversa de una matriz regular haciendo transformaciones elementales por columnas. Ahora bien no podemos, en un mismo ejercicio, combinar las transformaciones por filas y por columnas.

5.13. Sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché-Fröbenius

El método de Gauss nos proporciona un algoritmo para resolver un sistema. A veces nos interesa saber exclusivamente si un sistema tiene solución o no sin calcular sus soluciones, que es lo que se conoce como *discutir un sistema*. La respuesta a dicha pregunta nos la da el teorema de Rouché-Fröbenius.
Sea el sistema de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right. \tag{3}$$

que podemos escribir matricialmente $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}. \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

El *teorema de Rouché-Fröbenius* caracteriza la resolubilidad del sistema en términos de los rangos de la matriz asociada A y de la matriz ampliada del sistema A^*. Nótese que, puesto que A es una submatriz de A^*, se tiene siempre rango$(A) \leq$ rango(A^*) (basta pensar el rango por columnas).

Teorema de Rouché-Fröbenius Sea el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot X = B$. Entonces:

1. Si rango(A) $\neq$ rango(A*), el sistema es incompatible.
2. Si rango(A) $=$ rango(A*) $=$ n, el sistema es compatible y determinado.
3. Si rango(A) $=$ rango(A*) $<$ n, el sistema es compatible e indeterminado.

Se dice que un sistema es *de Cramer* si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas ($m = n$), y la matriz del sistema A tiene determinante distinto de cero. En un sistema de Cramer $A \cdot X = B$ la matriz asociada es inversible y obtenemos la solución de dicho sistema multiplicando por la inversa de A a ambos lados, es decir, la solución del sistema es $X = A^{-1}B$, y por lo tanto la solución de un sistema de Cramer es

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

donde

$$|A_i| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5.14. Ejercicios

1. Estudia cada uno de los siguientes sistemas y busca sus soluciones en caso de tenerlas:

$$(a) \quad \left.\begin{array}{r} 2x+2y=5 \\ x-4y=0 \end{array}\right\} \qquad (b) \quad \left.\begin{array}{r} -x+y=1 \\ x+y=2 \end{array}\right\} \qquad (c) \quad \left.\begin{array}{r} x-3y+z=1 \\ x+y+2z=14 \end{array}\right\}$$

$$(d) \quad \left.\begin{array}{r} -x-y=1 \\ -3x-3y=2 \end{array}\right\} \qquad (e) \quad \left.\begin{array}{r} 4y+z=20 \\ 2x-2y+z=0 \\ x+z=5 \\ x+y-z=10 \end{array}\right\} \qquad (f) \quad \left.\begin{array}{r} 2x+z+w=5 \\ y-w=-1 \\ 3x-z-w=0 \\ 4x+y+2z+w=9 \end{array}\right\}$$

2. Estudia el sistema $\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ 3x-3y=k \end{array}\right\}$ en función de los valores del parámetro k.

3. ¿Qué condiciones deben verificar los términos constantes b_i para que los siguientes sistemas tengan solución?

$$(a) \quad \left.\begin{array}{r} x-3y=b_1 \\ 3x+y=b_2 \\ x+7y=b_3 \\ 2x+4y=b_4 \end{array}\right\} \qquad (b) \quad \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=b_1 \\ 2x+5y+3z=b_2 \\ x+8z=b_3 \end{array}\right\}$$