Curso Introductorio a las Matemáticas Universitarias

Tema 9: Integración

Víctor M. Almeida Lozano
Rosa M. Gómez Reñasco

9. INTEGRACIÓN

Este tema es una introducción al cálculo integral. En él introduciremos el concepto de primitiva de una función y analizaremos algunos métodos básicos de cálculo de primitivas.

9.1. Integrales indefinidas. Primitiva de una función

Dada una función f definida sobre un intervalo $J \subset \mathbb{R}$, una **primitiva o antiderivada** de f en J es una función F continua en J, que verifica:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo x en el interior de } J$$

Ejemplo: una primitiva de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x$.

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces $F(x)+C$ es también una primitiva de $f(x)$, siendo C un número real cualquiera. De hecho, cualquier otra primitiva de $f(x)$ es de esta forma.

Ejemplo: una primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es $F(x) = \ln x$, luego $F(x) = \ln x \ + \ C$ también es una primitiva de $f(x)$ para cualquier $C \in \mathbb{R}$.

El conjunto formado por todas las primitivas de $f(x)$ se denomina **integral indefinida** de $f(x)$, y se designa por

$$\int f(x)\, dx.$$

Ejemplo: $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg}\, x \ + \ C.$

Tabla de integrales inmediatas

En la siguiente tabla la letra C representa una constante arbitraria.

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\ a} + C \quad (a \neq 1),\ (a > 0)$
6. $\int cos\ x\ dx = sen\ x + C$
7. $\int sen\ x\ dx = -cos\ x + C$
8. $\int sec^2 x\ dx = \int \dfrac{dx}{cos^2 x} = \int (1 + tg^2 x)\ dx = tg\ x + C$
9. $\int cosec^2 x\ dx = \int \dfrac{dx}{sen^2 x} = \int (1 + cotg^2 x)\ dx = -cotg\ x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsen \dfrac{x}{a} + C$
11. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C.$

9.1.1. Reglas operacionales. Integrales inmediatas

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones para las que existen primitivas, entonces se verifica que:

1. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$

2. $\int kf(x)\ dx = k \int f(x)\ dx$

Estas reglas, la tabla de integrales inmediatas y la operatoria básica, permiten calcular integrales que a priori paracen más complicadas.

Ejemplos:

(a) $\int (3x^4 - 5x^2 + x)dx = 3\int x^4 dx - 5\int x^2 dx + \int x dx = 3\dfrac{x^5}{5} - 5\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + C$

(b) $\int \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \dfrac{x}{\sqrt{x}} dx + \int \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \dfrac{2}{3}\sqrt{x}(x+3) + C$

9.2. Métodos de integración

9.2.1. Integración por cambio de variable

A veces una integral puede transformarse en otra más sencilla haciendo un cambio de variable. Ello puede hacerse de dos maneras:

1. Hacer $x = g(t)$ siendo g una función derivable con inversa derivable. Al hacer el cambio debe sustituirse dx por $g'(t)dt$, con lo que nos quedará

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt = F(t) + C = F(g^{-1}(x)) + C$$

Ejemplo: $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$. Si efectuamos el cambio de variable $x = sen\ t$, hemos de sustituir dx por $cos\ t\ dt$, con lo que obtenemos

$$I = \int \frac{sen\ t}{\sqrt{1-sen^2 t}}\, cos\ t\ dt = \int \frac{sen\ t}{cos\ t}\, cos\ t\ dt = \int sen\ t\ dt =$$

$$= -cos\ t + C = -cos(arcsen\ x) + C$$

2. Hacer $t = h(x)$ siendo h una función derivable con inversa derivable. Normalmente se elige una función $h(x)$ que aparece en el integrando, o que la expresión $h'(x)dx$ aparece en el integrando.

Ejemplo: $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$. Si efectuamos el cambio de variable $t = 1 - x^2$ obtenemos que $dt = -2xdx$; debemos sustituir xdx por $-\dfrac{dt}{2}$, con lo que obtenemos

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,(-\frac{dt}{2}) = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\ dt = -t^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Es evidente que el segundo cambio de variable es más intuitivo, pero no deja de ser curioso el haber obtenido dos resultados, aparentemente, tan diferentes. Se propone al alumno que compruebe que en realidad es el mismo resultado en los dos casos.

9.2.2. Integración por partes

Este método tiene por objeto transformar la integral dada en otra más sencilla, utilizando una sencilla fórmula:

Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$ dos funciones derivables. Entonces, $du = u'(x)dx$ y $dv = v'(x)dx$. A partir de la regla de derivación de un producto, se obtiene que:

$$\int u\ dv = u\ v - \int v\ du$$

La elección de qué parte del integrando debe ser u y cuál dv depende de múltiples factores, lo que impide dar una regla genaral. No obstante los casos más frecuentes son los siguientes:

- $I = \displaystyle\int x\ ln\ x\ dx$.

  Para la elección de u debemos pensar en la parte del integrando que sea más fácil de derivar (en este caso tanto x como $ln\ x$ son sencillos de derivar), para dv hemos de buscar la parte sencilla de integrar, que sin lugar a dudas es $x\ dx$. Por lo tanto la elección queda cerrada $u = ln\ x$ y $dv = x\ dx$. En consecuencia $du = \dfrac{dx}{x}$ y $v = \displaystyle\int x\ dx = \frac{x^2}{2}$.

$$I = \int x\ ln\ x\ dx = \frac{x^2}{2}\ ln\ x\ - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\ dx = \frac{x^2}{2}\ ln\ x\ - \frac{1}{2}\int x\ dx = \frac{x^2}{2}\ ln\ x\ - \frac{x^2}{4} + C$$

- $I = \int x\, e^x\, dx$

  En este caso tanto x como e^x son sencillas de derivar y de integrar. Luego la elección debe basarse en otras estrategias. Si reflexionamos un poco podremos darnos cuenta de que la mejor elección es $u = x$ y $dv = e^x dx$, el motivo es claro si escribimos el resto de elementos necesarios $v = e^x$, $du = dx$.

$$I = \int x\, e^x\, dx = x\, e^x \; - \; \int e^x\, dx = x\, e^x \; - \; e^x \; + \; C$$

- $I = \int sen\ x\, e^x\, dx$

  Este último ejemplo corresponde a las llamadas integrales cíclicas. No hay lugar a dudas que en este caso la elección de u y dv es aleatoria, ya que en cualquier caso el método nos llevará a una integral esencialmente igual, en cuanto a dificultad, a la de partida. Tomemos, por ejemplo $u = sen\ x$ y $dv = e^x\, dx$, lo que nos lleva a que $du = cos\ x\, dx$ y $v = e^x$

$$I = \int sen\ x\, e^x\, dx = sen\ x\, e^x \; - \; \int e^x\, cos\ x\, dx$$

  En principio parece que no hemos ganado nada con la aplicación del método. Sin embargo, si pensamos un poco antes de desecharlo, podremos darnos cuenta de que una nueva aplicación del método nos llevaría a la integral de partida. Es decir, si en la última integral tomamos $u = cos\ x$ y $dv = e^x\, dx$, entonces, $du = -sen\ x\, dx$ y $v = e^x$, y tenemos que

$$I = sen\ x\, e^x \; - \; \int e^x\, cos\ x\, dx = sen\ x\, e^x \; - \; \left(cos\ x\, e^x \; - \; \int -sen\ x\, e^x\, dx \right) =$$

$$= (sen\ x - cos\ x)e^x - I$$

  de donde obtendríamos

$$2I = (sen\ x - cos\ x)e^x \; \Rightarrow \; I = \frac{(sen\ x - cos\ x)e^x}{2} + C$$

El procedimiento seguido justifica el nombre asignado a estas integrales.

9.2.3. Integración de funciones racionales

Se trata de encontrar primitivas de funciones que son un cociente de polinomios, es decir:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx \qquad\qquad P(x),\ Q(x) \ \text{ polinomios.}$$

Cuando tenemos este tipo de integrando, lo primero que hay que hacer es mirar si el grado del polinomio del numerador, $P(x)$, es mayor o igual que el grado del polinomio del denominador, $Q(x)$. Si es así, dividimos $P(x)$ entre $Q(x)$ para obtener el polinomio cociente, $C(x)$, y el polinomio resto, $R(x)$. Es decir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \;\;, \;\text{ siendo el grado de } R(x) < \text{ grado de } \; Q(x)$$

Entonces, tenemos que:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \left[C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\right]\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

La $\int C(x)\,dx$ es inmediata ($C(x)$ es un polinomio). Veamos como resolver $\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$, sabiendo ya que el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

Veamos diferentes casos

1. Denominador de grado 1: $\int \frac{R(x)}{ax+b}\,dx$. En este caso $R(x) = A =$ constante. Y la integral es inmediata:

$$\int \frac{R(x)}{ax+b}\,dx = A\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{A}{a}\int \frac{a\,dx}{ax+b} = \frac{A}{a}\ln|ax+b)| + C$$

Ejemplo: $I = \int \frac{x^5+x^4-8}{x-1}\,dx$. Al dividir el polinomio x^5+x^4-8 entre $x-1$ se obtiene como cociente $C(x) = x^4+2x^3+2x^2+2x+2$ y como resto $R(x) = -6$, por lo tanto,

$$I = \int \frac{x^5+x^4-8}{x-1}\,dx = \int (x^4+2x^3+2x^2+2x+2)\,dx - 6\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{2x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + x^2 + 2x - 6\ln|x-1| + C$$

2. Denominador de grado 2, y con raíces complejas: $\int \frac{R(x)}{ax^2+bx+c}\,dx$.

El grado de $R(x)$ puede ser 0 ó 1.

a) Si el grado de $R(x)$ es cero, es decir es una constante, se ajusta para obtener un arcotangente.

Ejemplo:

$$I = \int \frac{3}{x^2+2x+2}\,dx = 3\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = 3\,arctg(x+1) + C$$

b) Si el grado de $R(x)$ es 1 se separa en dos integrales, una dará un logaritmo neperiano y la otra un arcotangente.

Ejemplo:

$$I = \int \frac{3x+4}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{3x+3+1}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= 3\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\,\ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arc\,tg}(x+1) + C$$

3. Denominador de grado mayor o igual que 2 y, a lo sumo, raíces complejas simples. Lo primero que debe hacerse es factorizar $Q(x)$, para luego efectuar una descomposición de $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples, cada una de las cuales generará integrales que sabremos resolver, en función de que trabajemos con raíces reales o complejas de $Q(x)$.

   Ejemplo: $I = \displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)}\, dx$. En primer lugar hemos de descomponer en fracciones simples el integrando:

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

   Efectuando los cálculos apropiados, se obtiene $A=2$, $B=-2$, $C=-2$ y $D=4$. Por tanto

$$I = 2\int \frac{1}{x-1}\, dx - 2\int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx + \int \frac{-2x+4}{x^2+1}\, dx =$$

$$= 2\ \ln|x-1| + 2\ \frac{1}{x-1} - \ln\left(x^2+1\right) + 4\ \operatorname{arc\,tg}\ x + \ C$$

9.2.4. Integrales trigonométricas

A la hora de calcular primitivas que involucran funciones trigonométricas, se suelen usar cambios de variables que usan las propiedades de estas funciones. Veremos dos tipos de estas integrales.

1. Integrales del tipo $\displaystyle\int R(sen\ x, cos\ x)dx$, donde R es una función racional

   a) R es impar en $sen\ x$. Es decir, $R(-sen\ x, cos\ x) = -R(sen\ x, cos\ x)$.
   Se efectúa el cambio de variable $t = cos\ x$, con lo que se obtiene

$$sen\ x = \sqrt{1-t^2} \quad \text{y} \quad dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

   Ejemplo

$$I = \int \frac{sen\ x}{cos^2 x + 1}\, dx = -\int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2+1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt =$$

$$= -\int \frac{1}{1+t^2}\, dt = -\operatorname{arc\,tg}\ t + C = -arctg(cos\ x) + C$$

   b) R es impar en $cos\ x$. Es decir, $R(sen\ x, -cos\ x) = -R(sen\ x, cos\ x)$.
   Se efectúa el cambio de variable $t = sen\ x$, con lo que se obtiene

$$cos\ x = \sqrt{1-t^2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

Ejemplo

$$I = \int sen^2x\ cos^3x\ dx = \int t^2(\sqrt{1-t^2})^3 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt = \int (t^2 - t^4)\ dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{sen^3x}{3} - \frac{sen^5x}{5} + C$$

c) R es par en $sen\ x$ y $cos\ x$. Es decir, $R(-sen\ x, -cos\ x) = R(sen\ x, cos\ x)$.
Se efectúa el cambio de variable $t = tg\ x$, con lo que obtenemos,

$$cos\ x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad sen\ x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\quad y\quad dx = \frac{1}{1+t^2}\ dt\ .$$

Ejemplo

$$I = \int \frac{sen\ x}{sen\ x + cos\ x}\ dx = \int \frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}\ \frac{1}{1+t^2}\ dt = \int \frac{t}{(t+1)(1+t^2)}\ dt =$$

$$= ln\sqrt[4]{\frac{(1+t^2)}{(t+1)^2}} + \frac{1}{2}\ arctg\ t + C = ln\sqrt[4]{\frac{(1+tg^2x)}{(tg\ x+1)^2}} + \frac{1}{2}\ x + C$$

Un caso particular lo constituyen las integrales del tipo $\int sen^nx\ cos^mx\ dx$, con n y m pares. La resolución de éstas se simplifica si se aplican las fórmulas:

$$sen^2x = \frac{1-cos\ 2x}{2}\quad ,\quad cos^2x = \frac{1+cos\ 2x}{2}$$

Ejemplo

$$I = \int sen^2x\ cos^2x\ dx = \int \frac{1-cos\ 2x}{2}\ \frac{1+cos\ 2x}{2}\ dx = \int \frac{1-cos^2 2x}{4}\ dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ x - \frac{1}{4}\int \frac{1+cos\ 4x}{2}\ dx = \frac{1}{4}\ x - \frac{1}{8}\ x - \frac{1}{32}\ sen\ 4x + C =$$

$$= \frac{1}{8}\ x - \frac{1}{32}\ sen\ 4x + C$$

d) El cambio de variable que siempre puede aplicarse, aunque sólo se aconseja cuando no estemos en alguno de los casos anteriores, es:

$$t = tg\frac{x}{2};\quad sen\ x = \frac{2t}{1+t^2};\quad cos\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Ejemplo

$$I = \int \frac{1}{sen\ x + cos\ x}\ dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}}\ \frac{2}{1+t^2}\ dt = -\int \frac{2}{t^2-2t-1}\ dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ ln\left|\frac{t-(1-\sqrt{2})}{t-(1+\sqrt{2})}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-(1-\sqrt{2})}{tg\frac{x}{2}-(1+\sqrt{2})}\right| + C$$

2. $\int sen(ax+b)sen(cx+d)dx$, $\int sen(ax+b)cos(cx+d)dx$, $\int cos(ax+b)cos(cx+d)dx$.

Se emplean las fórmulas:

$$sen\ A \cdot cos\ B = \tfrac{1}{2}[sen(A+B) + sen(A-B)]$$

$$cos\ A \cdot cos\ B = \tfrac{1}{2}[cos(A+B) + cos(A-B)]$$

$$sen\ A \cdot sen\ B = -\tfrac{1}{2}[cos(A+B) - cos(A-B)]$$

Ejemplos

$$I = \int sen(2x-1)sen(3x+2)\ dx = -\frac{1}{2}\int [cos(5x+1) - cos(-x-3)]\ dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{sen(5x+1)}{5} - sen(x+3)\right] + C$$

$$I = \int sen(x-2)cos(5x+3)\ dx = \frac{1}{2}\int [sen(6x+1) + sen(-4x-5)]\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-cos(6x+1)}{6} + \frac{cos(4x+5)}{4}\right] + C$$

$$I = \int cos(3x+3)cos(x+2)\ dx = \frac{1}{2}\int [cos(4x+5) + cos(2x+1)]\ dx =$$

$$= \ = \frac{1}{2}\left[\frac{sen(4x+5)}{4} + \frac{sen(2x+1)}{2}\right] + C$$

9.3. Ejercicios

1. Resolver las siguientes integrales

$a)\ \int \frac{x^3-a^3}{x-a}dx$ $b)\ \int \frac{x}{\sqrt{x}}dx$ $c)\ \int \frac{x^5+x^3+2}{1+x^2}dx$

$d)\ \int (\sqrt{x}+sec\ x\ tg\ x)dx$ $e)\ \int \frac{x+6}{(x+2)^2}dx$ $f)\ \int \frac{1-x^2}{1-x^4}dx$

$g)\ \int \frac{y}{(1+y^2)^4}dy$ $h)\ \int \frac{dx}{e^{-x}+e^x}$ $i)\ \int \frac{x^2ln^3(1+x^3)}{1+x^3}dx$

$j)\ \int tg\ \theta\ ln(cos\ \theta)d\theta$ $k)\ \int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx$ $l)\ \int \frac{dx}{\sqrt{6x-4x^2}}$

$m)\ \int \frac{x}{x^2+x+1}dx$ $n)\ \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$ $o)\ \int \frac{3x-1}{9x^2+6x+26}dx$

$p)\ \int cos^3x\ sen^3x\ dx$ $q)\ \int cos^2x\ sen^2x\ dx$ $r)\ \int tag^3\theta\ sec^4\theta\ d\theta$

$s)\ \int cos\ 2x\ sen\ 3x\ dx$ $t)\ \int cos\ 5x\ cos\ 7x\ dx$ $u)\ \int sen\ 5x\ sen\ 7x\ dx$

2. Aplicar integración por partes para resolver las siguientes integrales:

$a)\ \int x^2sen\ 2x\ dx$ $b)\ \int arctag\ x\ dx$ $c)\ \int ln\ x\ dx$

$d)\ \int xln\ x\ dx$ $e)\ \int 2^x sen\ x\ dx$ $f)\ \int x^3e^{x^2}dx$

$g)\ \int sen\ \theta\ ln(cos\ \theta)d\theta$

3. Resolver las siguientes integrales racionales

$a)\ \int \frac{2x^5-11x^3+17x^2-10x+3}{2x^4-6x^3+7x^2-4x+1}dx$ $b)\ \int \frac{3x^2+1}{x^4-1}dx$ $c)\ \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}dx$

4. Resolver las siguientes integrales

$a)\ \int \frac{cos\ 2x}{cos^2x}dx$ $b)\ \int \frac{x^2}{1+x^2}dx$ $c)\ \int tg^2x\ dx$

$d)\ \int x^2\sqrt{x+1}dx$ $e)\ \int \frac{x^7+3x^3}{1+x^8}dx$ $f)\ \int \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}dx$

$g)\ \int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2}dx$ $h)\ \int \frac{4^x+5\cdot 16^x}{1+16^x}dx$ $i)\ \int \frac{cos^3x}{1+sen^2x}dx$

9.4. Soluciones

1.

a) $\frac{x^3}{3}+a\frac{x^2}{2}+a^2x+C$ *b)* $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$ *c)* $\frac{x^4}{4}+2\ arctg\ x+C$

d) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{cos\ x}+C$ *e)* $ln|x+2|-\frac{4}{x+2}+C$ *f)* $arctg\ x+C$

g) $-\frac{1}{6(1+y^2)^3}+C$ *h)* $arctg(e^x)+C$ *i)* $\frac{1}{12}ln^4(1+x^3)+C$

j) $-\frac{1}{2}ln^2(cos\ \theta)+C$ *k)* $ln\left[\frac{(e^x-1)^2}{e^x}\right]+C$ *l)* $\frac{1}{2}arcsen\left(\frac{4}{3}x-1\right)+C$

m) $ln\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right]+C$ *n)* $arcsen\left(\frac{x+1}{3}\right)+C$

o) $\ln\sqrt[6]{9x^2+6x+26}-\frac{2}{15}\ arctg\left(\frac{3x+1}{5}\right)+C$ *p)* $\frac{sen^4x}{4}-\frac{sen^6x}{6}+C$

q) $\frac{1}{8}\ x-\frac{1}{32}sen^4x+C$ *r)* $\frac{1}{6cos^6\theta}-\frac{1}{4cos^4\theta}+C$

s) $-\frac{1}{2}\left(\frac{cos\ 5x}{5}+cos\ x\right)+C$ *t)* $\frac{1}{2}\left(\frac{sen\ 12x}{12}+\frac{sen\ 2x}{2}\right)+C$

u) $\frac{1}{2}\left(\frac{sen\ 2x}{2}-\frac{sen\ 12x}{12}\right)+C$

2.

a) $-\frac{x^2cos\ 2x}{2}+\frac{x\ sen\ 2x}{2}+\frac{cos\ 2x}{4}+C$ *b)* $x\ arctg\ x-\frac{1}{2}ln(1+x^2)+C$

c) $x\ ln\ x-x+C$ *d)* $\frac{x^2ln\ x}{2}-\frac{x^2}{4}+C$

e) $2^x\ \frac{ln\ 2\ sen\ x-cos\ x}{1+(ln\ 2)^2}+C$ *f)* $\frac{x^2e^{x^2}}{2}-\frac{e^{x^2}}{2}+C$

g) $-\ cos\ \theta\ ln(cos\ \theta)+cos\ \theta+C$

3.

a) $\frac{x^2}{2}+3x-ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}ln(2x^2-2x+1)-arctg(2x-1)+C$

b) $ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\ arctg\ x+C$ *c)* $ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C$

4.

$a)$ $2x - tag\ x + C$

$b)$ $x - arctg\ x + C$

$c)$ $tag\ x - x + C$

$d)$ $\frac{2}{7}\sqrt{(x+1)^7} - \frac{4}{5}\sqrt{(x+1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$

$e)$ $ln\sqrt[8]{1+x^8} + \frac{3}{4}arctg\ x^4 + C$

$f)$ $2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6ln\left|\sqrt[6]{x+2}+1\right| + C$

$g)$ $ln\sqrt[6]{\left|\frac{(e^x-1)^2(e^x+2)}{e^{3x}}\right|} + C$

$h)$ $\frac{5}{2\ ln\ 4}\ ln(1+16^x) + \frac{1}{ln\ 4}\ arctg(4^x) + C$

$i)$ $-\ sen\ x + 2\ arctg(sen\ x) + C$