Tema 3:

Teoría de la Empresa

OWC Economía para Matemáticos

Fernando Perera Tallo

[*ttp://bit.ly/8l8DDu*](ttp://bit.ly/8l8DDu)

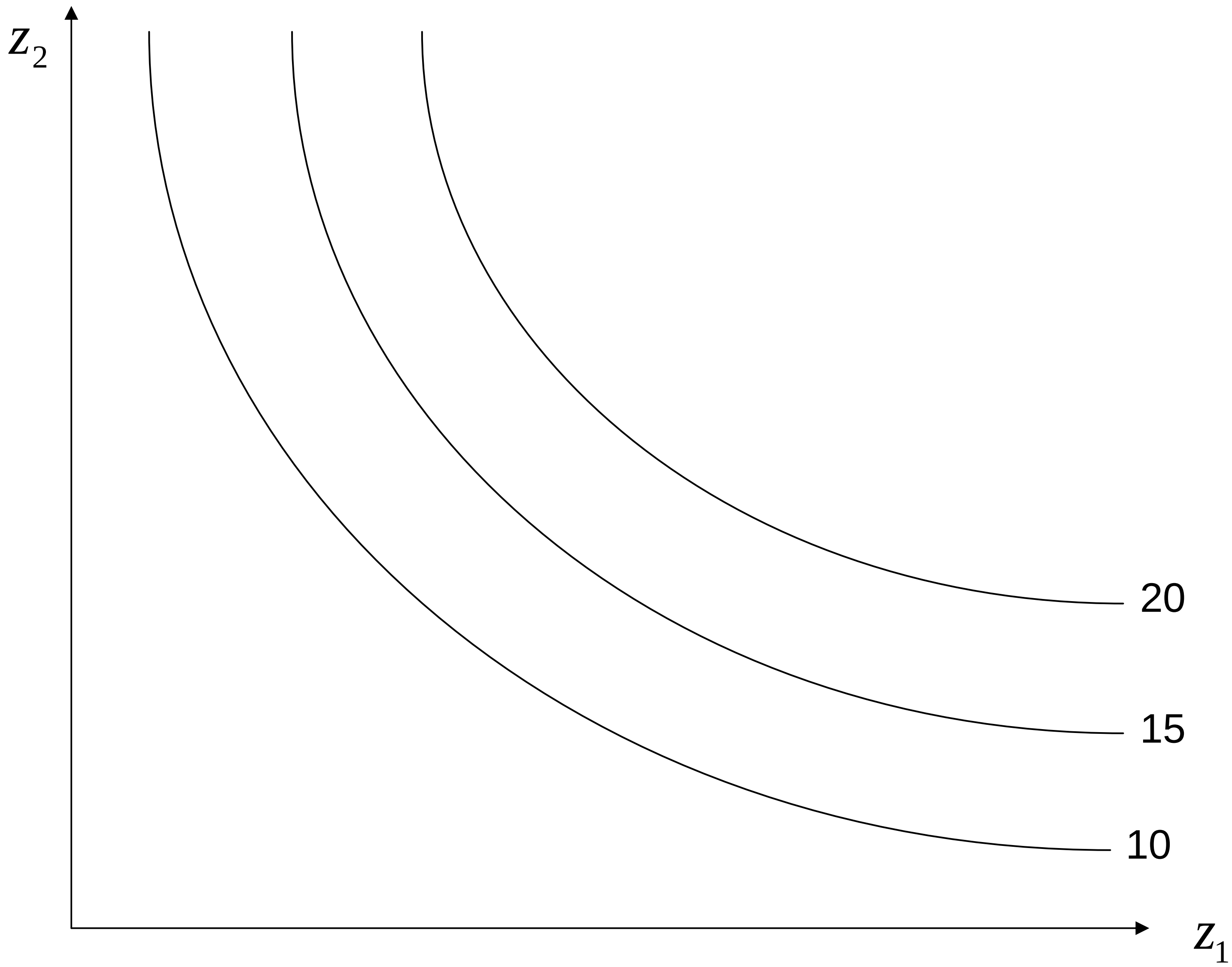
Factor de Producción: Factores que intervienen en la producción: trabajo, capital, tierra,… etc.
Vamos a considerar que existen m factores
z_k: cantidad utilizada del factor $k \in \{1,2,...,m\}$
$z = (z_1, z_2, ..., z_m) \in \Re^m_+$: vector de factores utilizados por la empresa.

Función de Producción: nos da la producción máxima para una combinación de factores. Se denota por $f : \Re^m_+ \to \Re_+$

Supuesto: la función de producción es continua y diferenciable de segundo orden, creciente, estrictamente creciente en $\Re^m_{++}$, estrictamente cuasicóncava y $f(0) = 0$.

Isocuanta: combinaciones de factores de producción que producen el mismo nivel de producción.

Isocuantas



Rendimientos a escala:

Rendimientos constantes a escala: cuando se duplican los factores se duplica la producción:

$$\forall \lambda > 0 \quad f(\lambda z) = \lambda f(z)$$

Rendimientos decrecientes a escala: cuando se duplican los factores la producción aumenta menos del doble

$$\forall z \in \Re^m_{++}, \forall \lambda > 1 \quad f(\lambda z) < \lambda f(z) \Leftrightarrow$$

$$\forall z \in \Re^m_{++}, \forall \lambda \in (0,1) \quad f(\lambda z) > \lambda f(z)$$

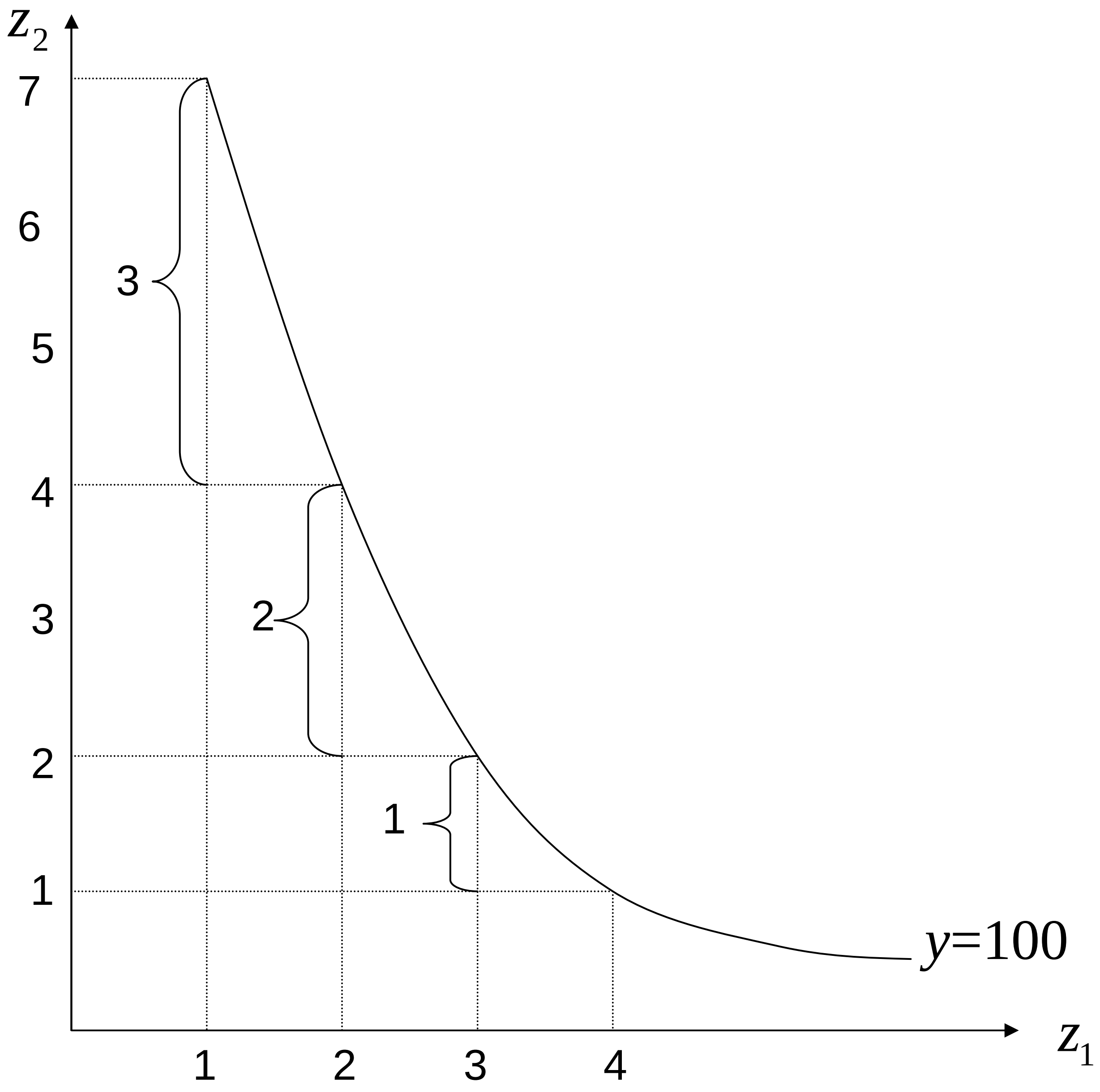
Rendimientos crecientes a escala: cuando se duplican los factores la producción aumenta más del doble

$$\forall z \in \Re^m_{++}, \forall \lambda > 1 \quad f(\lambda z) > \lambda f(z) \Leftrightarrow$$

$$\forall z \in \Re^m_{++}, \forall \lambda \in (0,1) \quad f(\lambda z) < \lambda f(z)$$

Relación Marginal de Substitución Técnica de factor j por factor k ($RMST_{k,j}(z)$**):** la cantidad que puede reducirse de factor j cuando se utiliza una unidad adicional de factor k, de tal manera que la producción permanezca constante.

$$RMST_{k,j}(z) = \frac{\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_k}}{\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_j}} = \text{- Pendiente Isocuanta (espacio k-j)}$$


z_2
7
6
5
4
3
2
1
3
2
1
y=100
z_1
1
2
3
4

Costes

- **Costes Contables:** sólo incluyen los costes asociados a *factores de producción ajenos a la empresa.*

- **Costes Económicos:** incluye los coste de todos los factores de producción, incluido el *coste de oportunidad* de los factores de producción propios.

- **Coste de oportunidad:** ganancia que se ha dejado de obtener por no utilizar los recursos propios en el mejor uso alternativo.

Vector de precios de los factores: vector que indica el precio de utilización de cada uno de los factores $w = (w_1, w_2, ..., w_m) \in \Re_+^m$. En operaciones algebraicas se le considera un vector fila mientras que al vector de factores z se le considera un vector columna.

Función de costes: mínimo coste necesario para poducir una deteminada cantidad y, dado el precio de los factores:

$$c(w,y) = \begin{array}{ll} \min\limits_{z} & wz \\ s.a & f(z) \geq y \\ & z \geq 0 \end{array}$$

Demanda condicionada de factores: combinaciones de factores que minimiza el coste para un nivel de producción:

$$z(w,y) = \begin{array}{ll} \min\limits_{z} & wz \\ s.a & f(z) \geq y \\ & z \geq 0 \end{array}$$

Note que el problema de minimización del coste se puede reescribir de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\min_{z} \quad & wz \\
s.a: \quad & f(z) \geq y \\
& wz^{*} \geq wz \\
& z \geq 0
\end{aligned}
$$

donde z^{*} es tal que $f(z^{*}) \geq y$. Por tanto el problema de minimización del coste se define en un conjunto compacto. Esto implica, según el Teorema de Weierstrass, que este problema de optimización tiene solución.

$$
\begin{aligned}
c(w,y) = \quad & \min_{z} \quad wz \\
& s.a \quad f(z) \geq y \\
& \qquad\quad z \geq 0
\end{aligned}
$$

Función Lagrangiana:

$$
L = wz + \lambda[y - f(z)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k z_k =
$$

$$
\sum_{k=1}^{m} w_k z_k + \lambda[y - f(z_1, z_2, ..., z_m)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k z_k
$$

Condiciones de 1er orden solución interior:

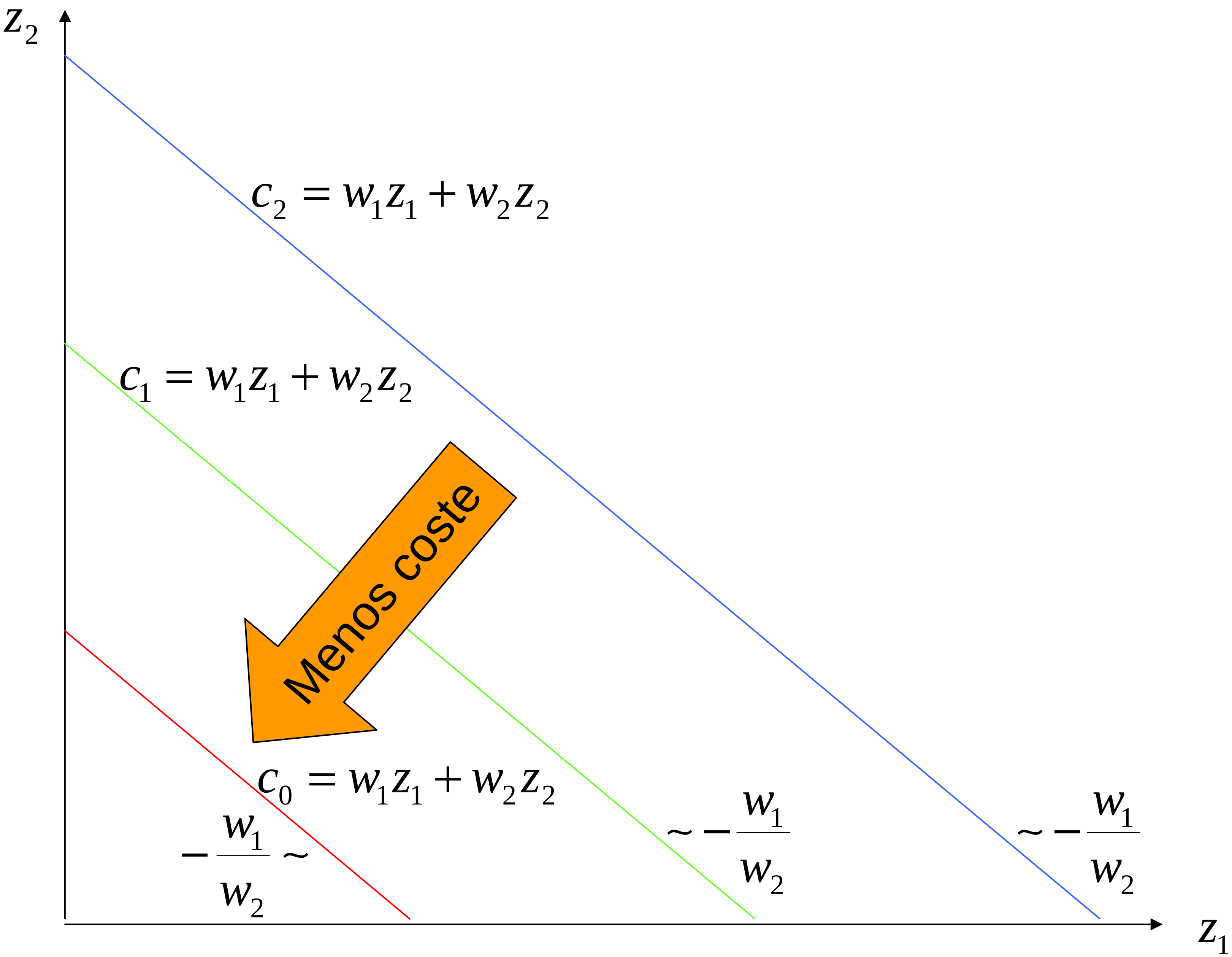
$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial z_k} = w_k - \lambda \frac{\partial f(z)}{\partial z_k} \\
\frac{\partial L}{\partial z_j} = w_j - \lambda \frac{\partial f(z)}{\partial z_j}
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow RMST_{k,j}(z) = \frac{\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_k}}{\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_j}} = \frac{w_k}{w_j}
$$

Caso de dos factores:

Recta Isocoste: combinaciones de factor 1 y 2 tales que el coste de contratarlas suponen el mismo coste para la empresa:

$$c_0 = w_1 z_1 + w_2 z_2 \Leftrightarrow z_2 = \frac{c_0}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} z_1$$

Pendiente: $-\frac{w_1}{w_2}$

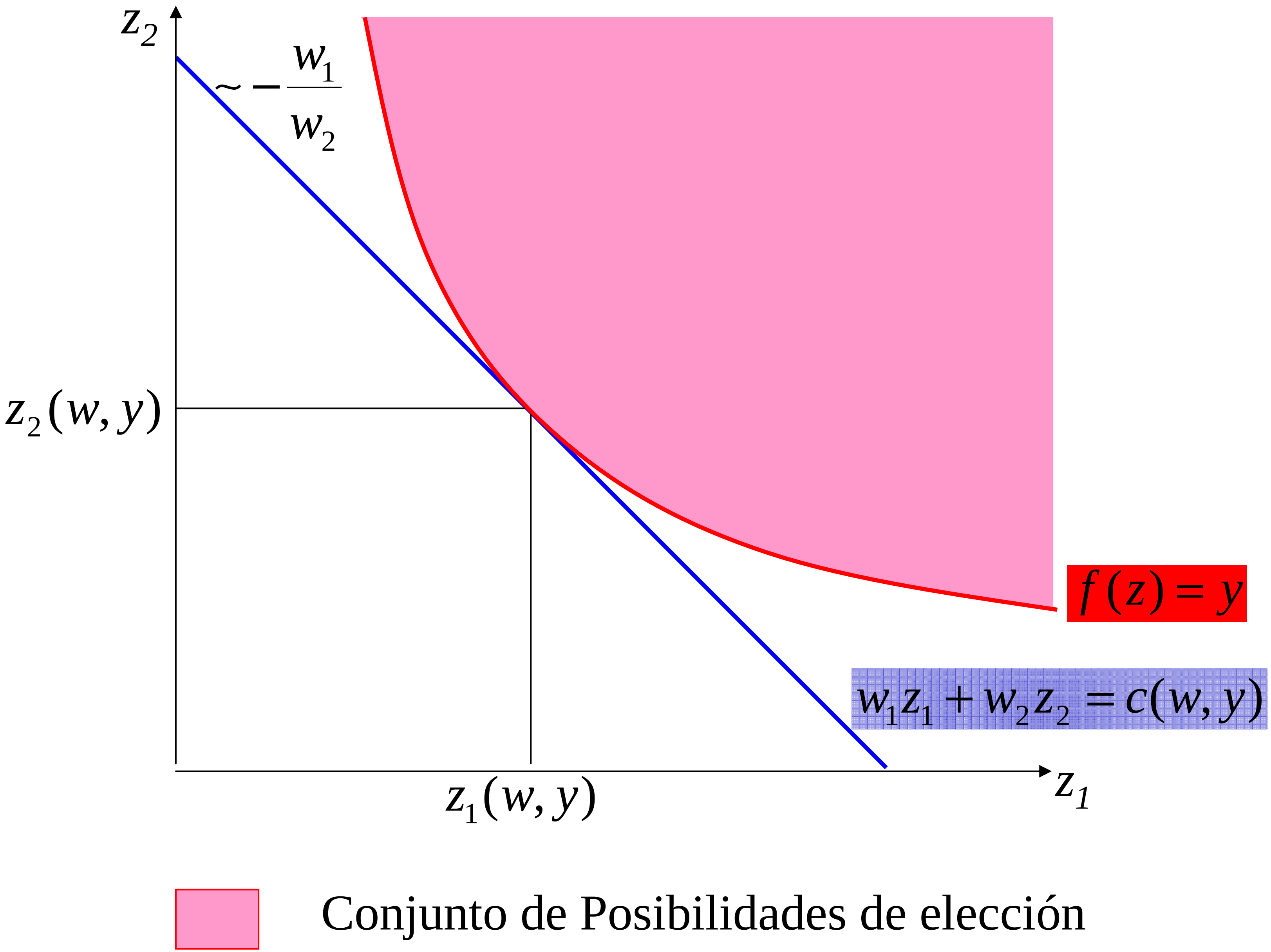

z_2
$c_2 = w_1 z_1 + w_2 z_2$
$c_1 = w_1 z_1 + w_2 z_2$
Menos coste
$c_0 = w_1 z_1 + w_2 z_2$
$-\frac{w_1}{w_2} \sim$
$\sim -\frac{w_1}{w_2}$
$\sim -\frac{w_1}{w_2}$
z_1

Minimización del Coste

- Dado un nivel de producción ¿cuál es la combinación de factores que minimiza el coste?

- Punto de vista gráfico: dada una isocuanta ¿cuál es la recta isocoste más hacia la izquierda que intersecta con esa isocuanta?

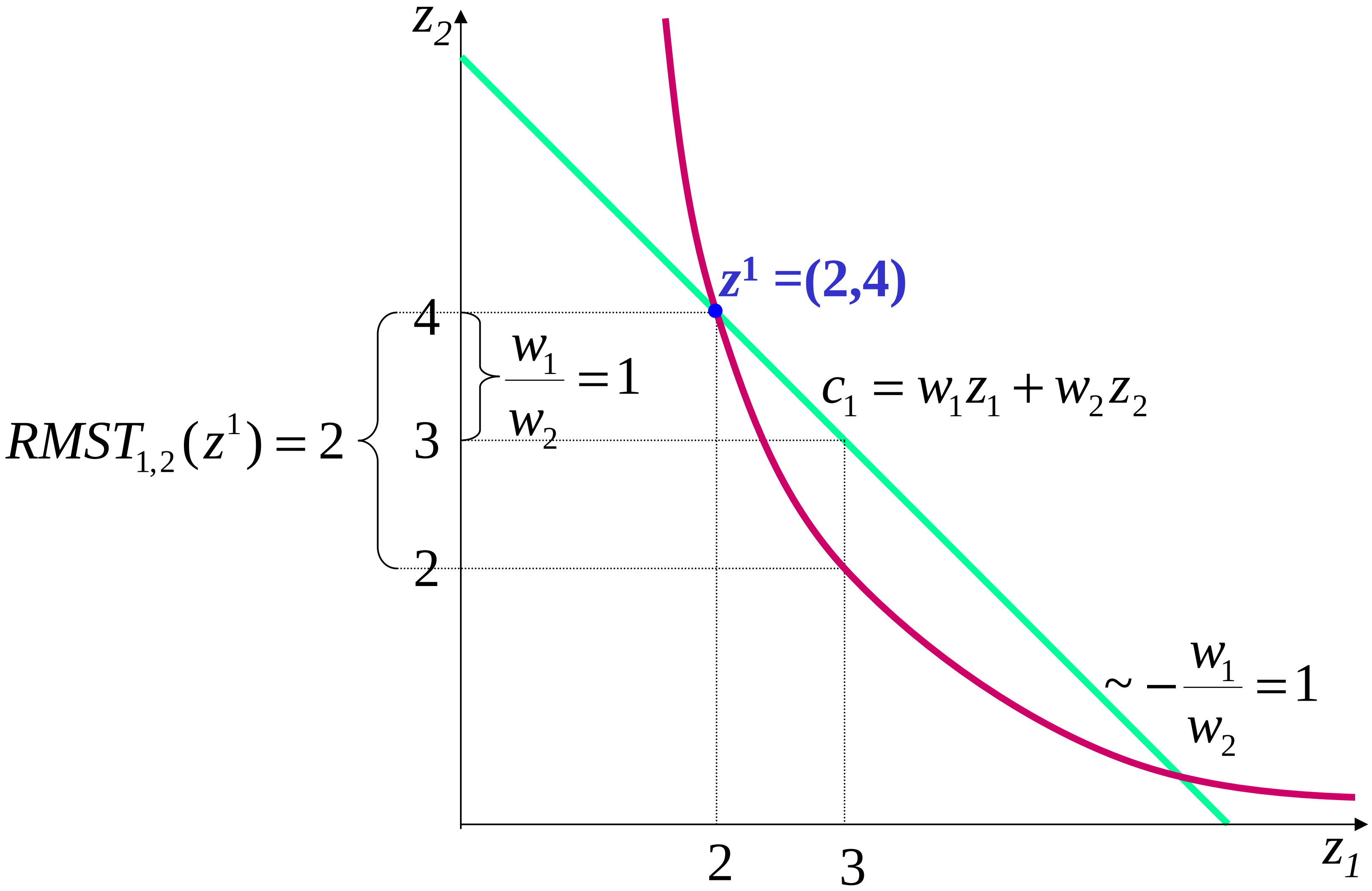
Minimización del coste



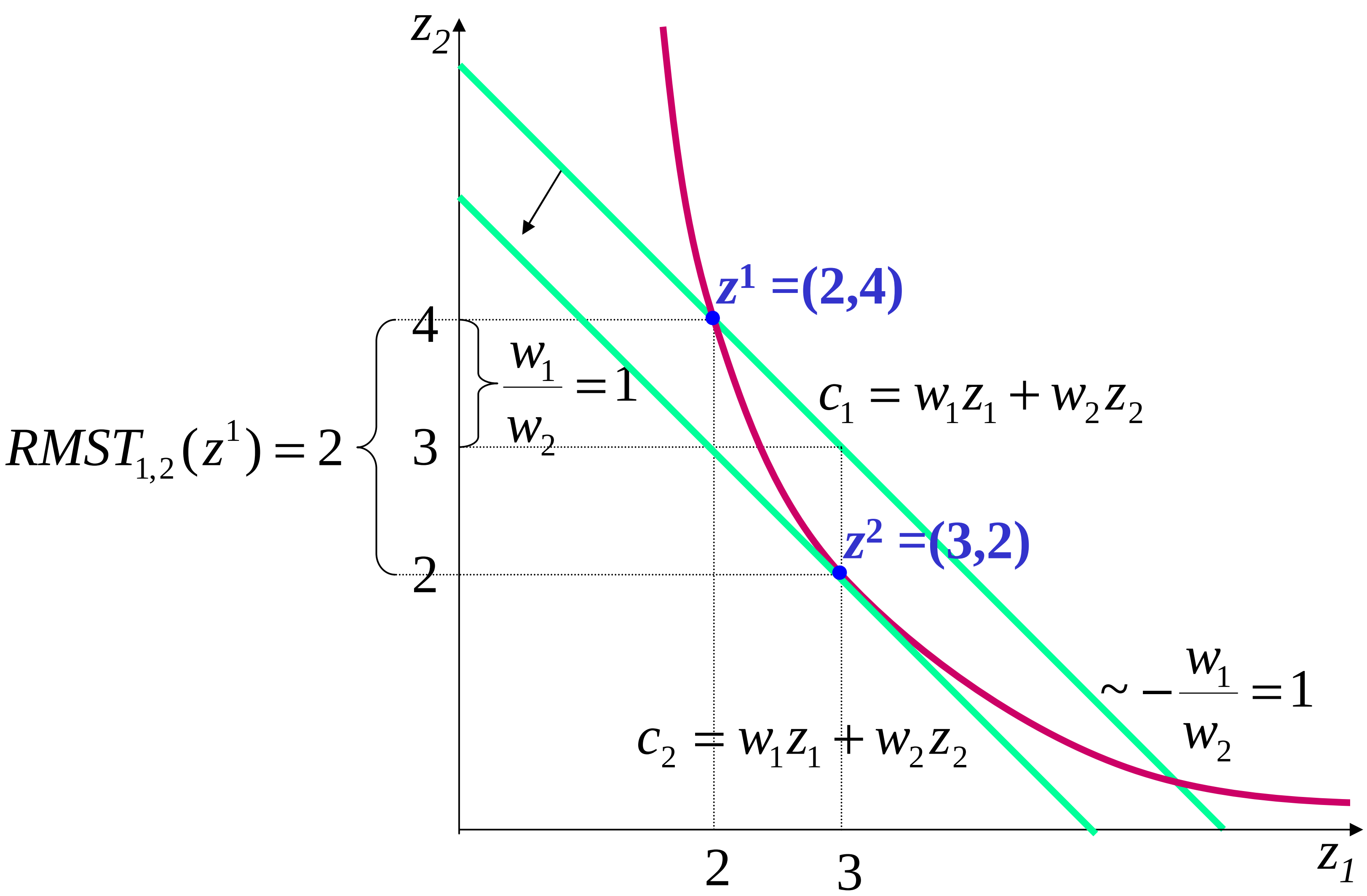
Si la RMST es mayor que el precio relativo de los factores: si se reduce el factor 2 en una cuantía igual al precio relativo del factor 1 con respecto al factor 2, y se contrata una unidad adicional del factor 1, los costes no varían. Por tanto, si se reduce el factor 2 en RMST unidades (que es mayor que el precio relativo) y se contrata una unidad adicional de factor 1, se reducen los costes, sin que se vea afectada la producción.

Por tanto, si la RMST es mayor que el precio relativo de los factores, aumentando en una unidad el factor 1 se reducirán los costes.

Si la RMST es mayor que el precio relativo, aumentando en una unidad el factor 1 se reducen los costes.



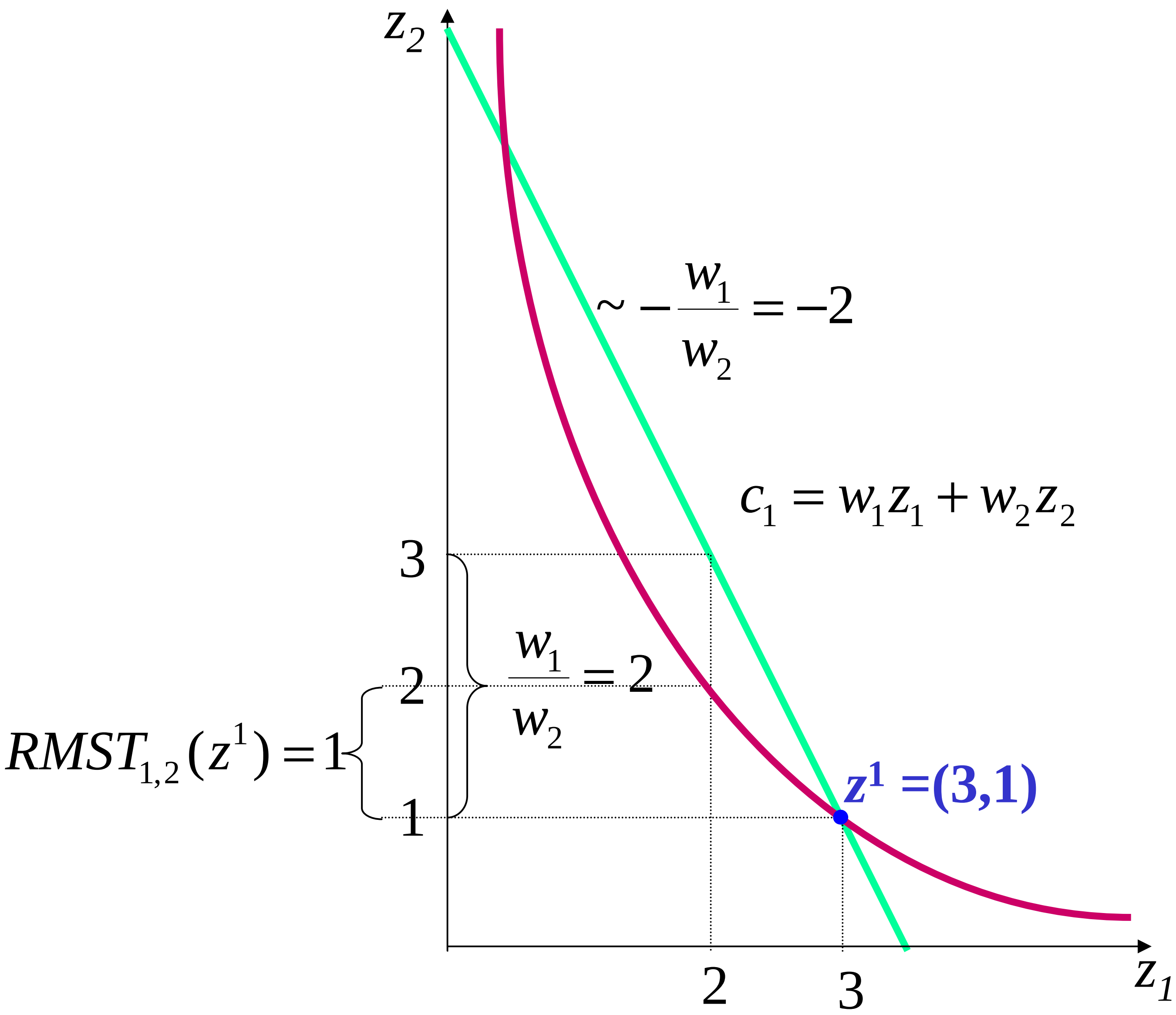
Si la RMST es mayor que el precio relativo, aumentando en una unidad el factor 1 se reducen los costes.



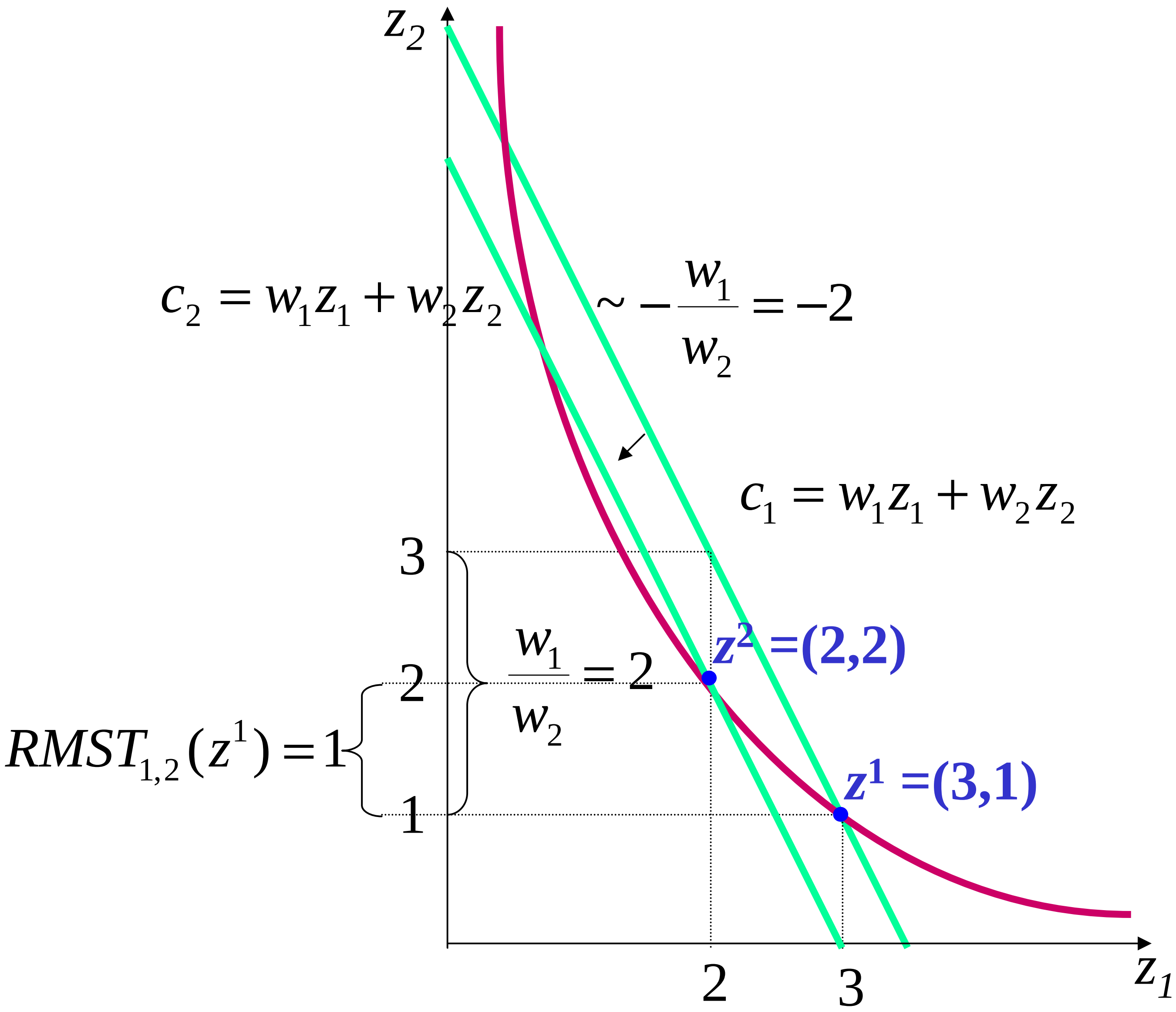
Si la RMST es menor que el precio relativo de los factores: si aumenta el factor 2ven una cuantía igual al precio relativo del factor 1 con respecto al factor 2, y se reduce en una unidad el factor 1, los costes no varían. Por tanto, si el factor 2 aumenta en RMST unidades (que es menor que el precio relativo) y se reduce la contratación del factor 1 en una unidad, se reducen los costes, sin que se vea afectada la producción.

Por tanto, si la RMST es menor que el precio relativo de los factores, reduciendo en una unidad el factor 1 los costes disminuirán.

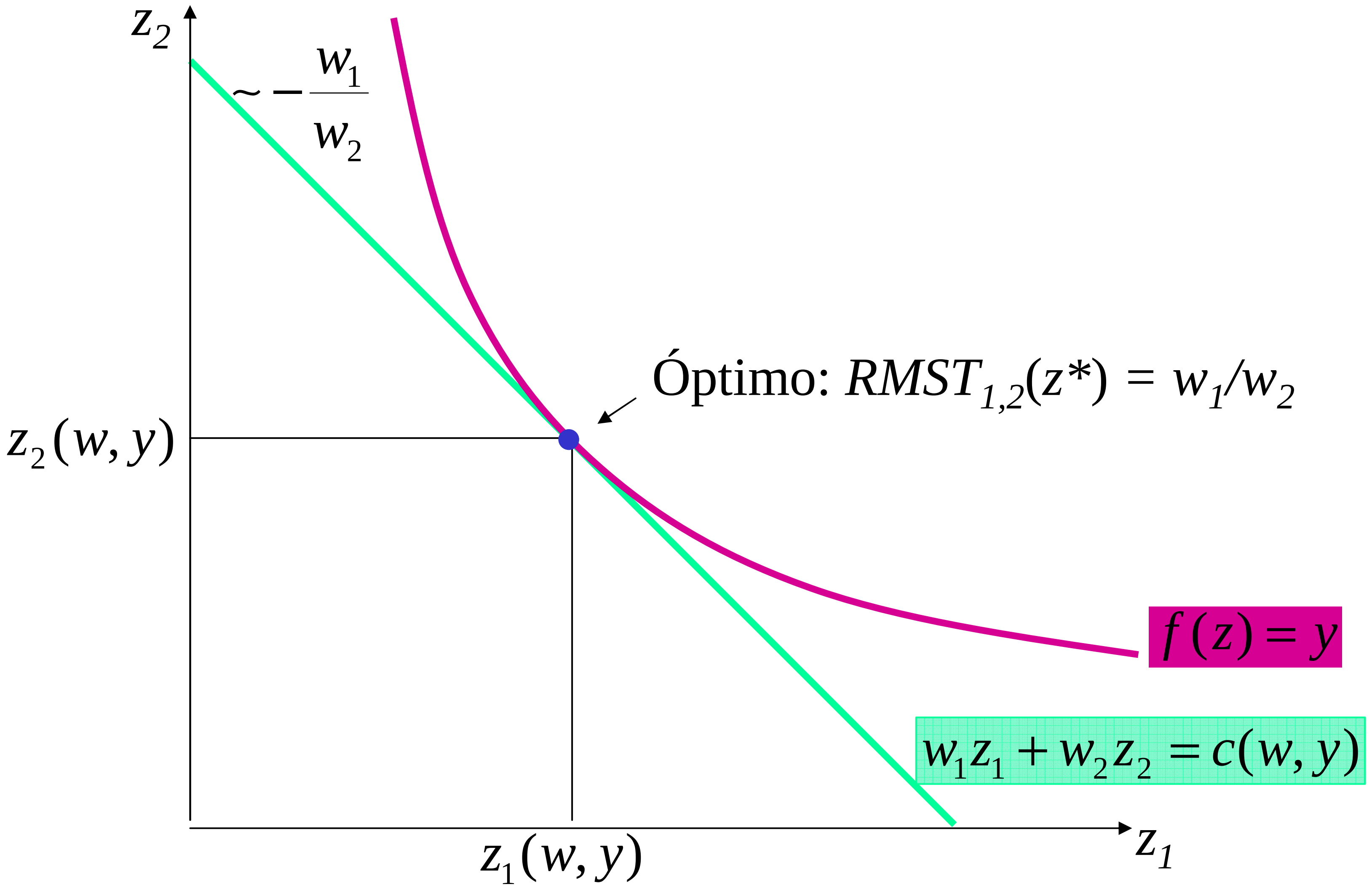
Si la RMST es menor que el precio relativo de los factores, disminuyendo en una unidad el factor 1 los costes se reducen.



Si la RMST es menor que el precio relativo de los factores, disminuyendo en una unidad el factor 1 los costes se reducen.



En el punto donde se minimizan los costes, la RMST se tiene que igualar al precio relativo de los factores



Beneficios Económicos

- **Costes Contables:** sólo incluyen los costes asociados a *factores de producción ajenos a la empresa*.
- **Costes Económicos:** incluye los coste de todos los factores de producción, incluido el *coste de oportunidad* de los factores de producción propios.
- **Coste de oportunidad:** ganancia que se ha dejado de obtener por no utilizar los recursos propios en el mejor uso alternativo.
- **Ingreso total (IT):** Suma de los pagos que recibe la empresa por la venta de su producto.
- **Beneficio contable** = IT- Coste contable (no incluye el coste de oportunidad de los factores propios)
- **Beneficio Económico** π = IT – Coste Económico

Teoría de la Empresa Competitiva:

Agente competitivo: Un agente que individualmente no puede afectar al precio del mercado y por tanto maximiza su función objetivo considerando los precios como dados (son precio aceptantes).

Empresa competitiva: Una empresa que individualmente no puede afectar al precio del mercado y por tanto maximiza su función objetivo considerando los precios como dados (son precio aceptantes).

Empresa maximiza beneficios:

- Desde el punto de vista de la contratación de factores:

$$\max_{y,z} \quad py - wz$$
$$s.a: \quad y \leq f(z)$$

- Desde el punto de vista de la elección de la cantidad de producción:

$$\max_{y} \; py - c(w, y)$$

Cuando existe solución del problema de maximización de beneficios a la función que relaciona el precio del producto y de los factores con los beneficios de la empresa se les denomina **función de beneficios**:

$$\pi(p,w) = \quad \arg\max_{y,z} \quad py - wz$$
$$s.a: \quad y \leq f(z)$$

Cuando existe solución del problema de maximización de beneficios y es única, se denomina **función de oferta** de la empresa $y(p,w)$ a la cantidad de producto que desea vender esa empresa por unidad de tiempo, dado el precio del bien y el precio de los factores. Se denomina **función de demanda de factores** por parte de una empresa $z(p,w)$ a la cantidad de factores que desea contratar esa empresa por unidad de tiempo, dado el precio del bien y el precio de los factores.

$$\big(y(p,w), z(p,w)\big) = \arg\max_{y,z} \quad py - wz$$
$$s.a: \quad y \le f(z)$$

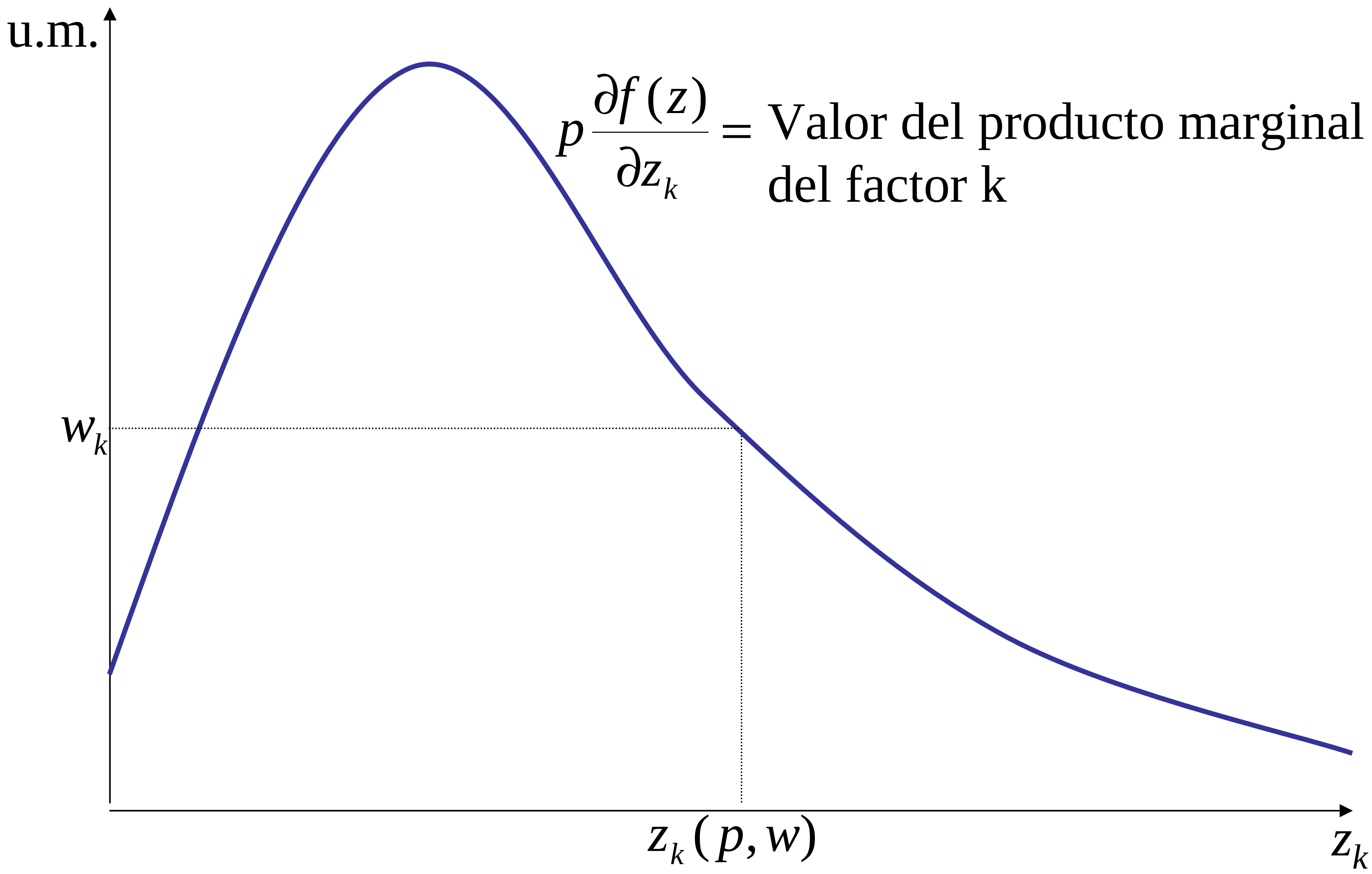
$$\max_{y,z} \quad py - wz$$
$$s.a: \quad y \leq f(z)$$

Función Lagrangiana

$$py - wz + \lambda\left[f(z) - y\right] = py - \sum_{k=1}^{m} w_k z_k + \lambda\left[f(z_1, z_2, \ldots, z_m) - y\right]$$

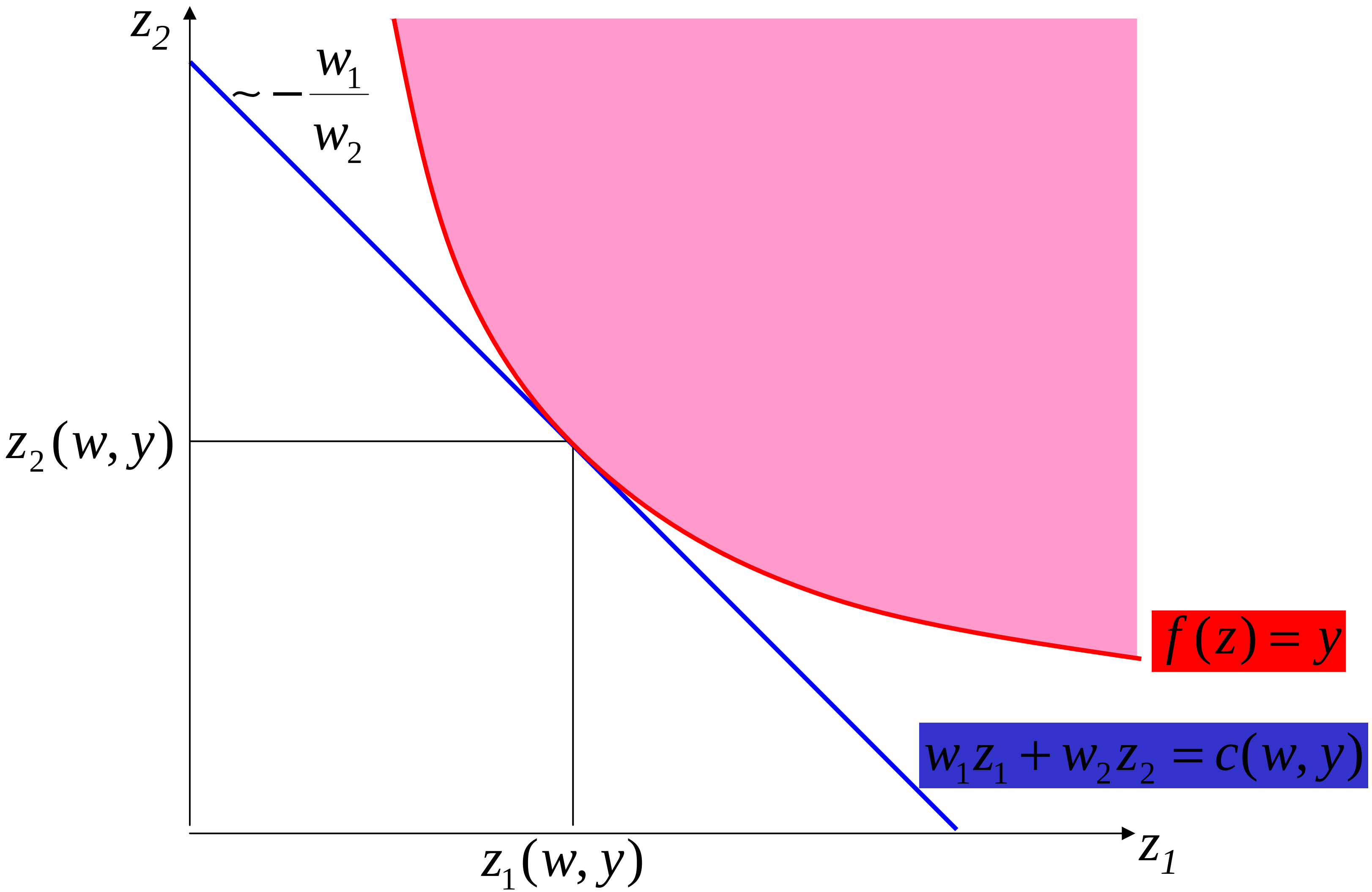
Condiciones de primer orden para solución interior:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial y} = p - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z_k} = -w_k + \lambda \dfrac{\partial f(z)}{\partial z_k} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p \frac{\partial f(z)}{\partial z_k} = w_k$$


u.m.
$p\frac{\partial f(z)}{\partial z_k}$ = Valor del producto marginal del factor k
w_k
$z_k(p,w)$
z_k

$$\left.\begin{array}{l} p\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_k} = w_k \\ p\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_j} = w_j \end{array}\right\} \Rightarrow RMST_{k,j}(z) = \dfrac{\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_k}}{\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_j}} = \dfrac{w_k}{w_j}$$

La maximización de los beneficios implica la minimización del coste



Conjunto de Posibilidades de elección

Maximización del beneficio desde el punto de vista de la elección de la cantidad de producción:

$$\max_{y}\ py - c(w,y)$$

Condiciones de primer orden para solución interior:

$$p - \frac{\partial c(w,y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow p = \frac{\partial c(w,y)}{\partial y}$$

Otra condición necesaria:

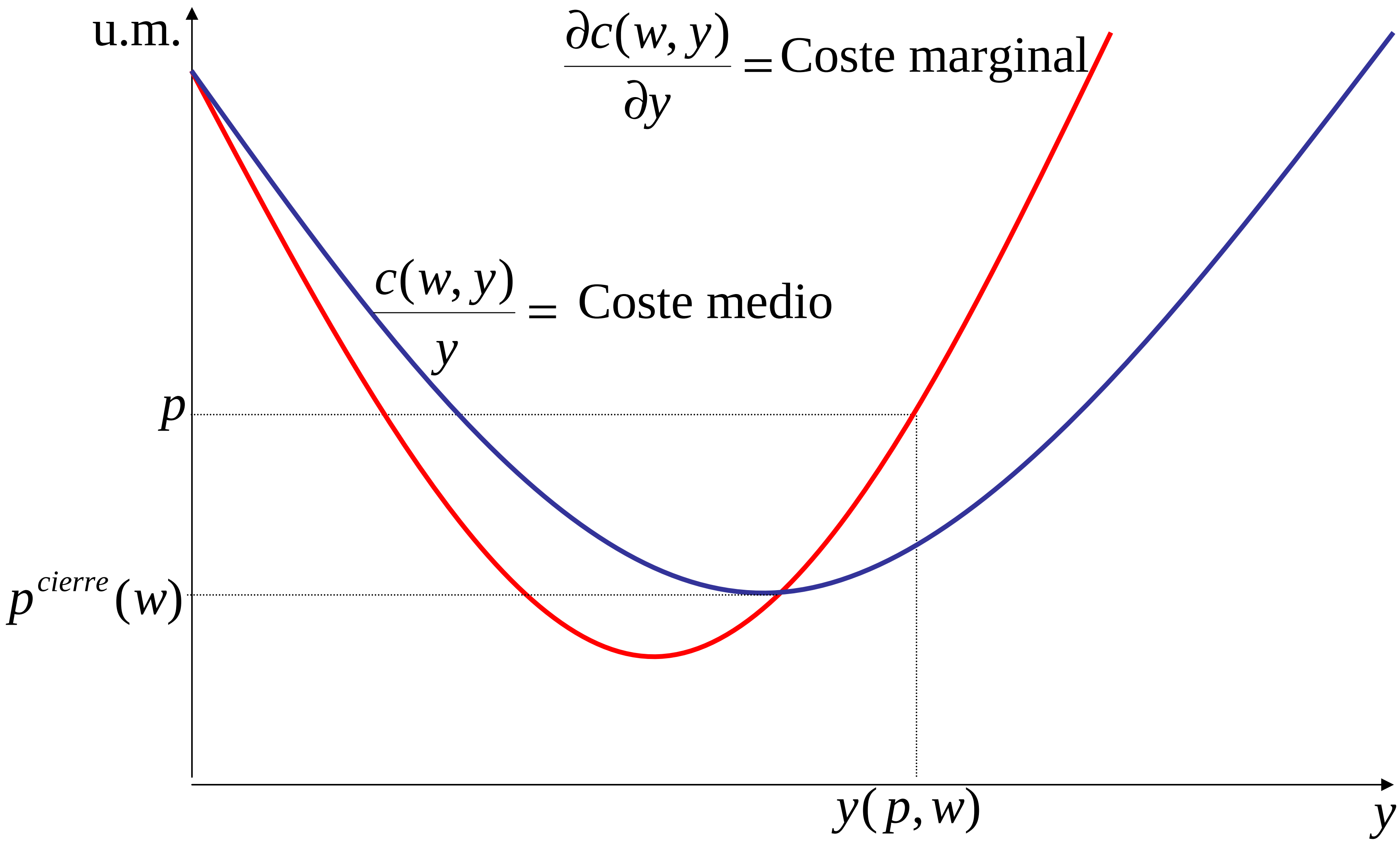
$$y^* \in \arg\max_y \, py - c(w, y) \Rightarrow$$

$$py^* - c(w, y^*) \geq p0 - c(w,0) = 0 \Rightarrow$$

$$p \geq \frac{c(w, y^*)}{y^*}$$

Precio de cierre: mínimo precio al cual la empresa estaría dispuesta a producir cantidades positivas:

$$p^{cierre}(w) = \min_y \frac{c(w, y)}{y}$$



u.m.
$\frac{\partial c(w,y)}{\partial y}$ = Coste marginal
$\frac{c(w,y)}{y}$ = Coste medio
p
$p^{cierre}(w)$
$y(p,w)$
y

Proposición: Sea:

$$\left(y^1, z^1\right) \in \quad \arg\max_{y,z} \quad p^1 y - wz$$
$$s.a: \quad y \leq f(z)$$

$$\left(y^2, z^2\right) \in \quad \arg\max_{y,z} \quad p^2 y - wz$$
$$s.a: \quad y \leq f(z)$$

Si $p^2 > p^1 \Rightarrow y^2 \geq y^1$

Demostración

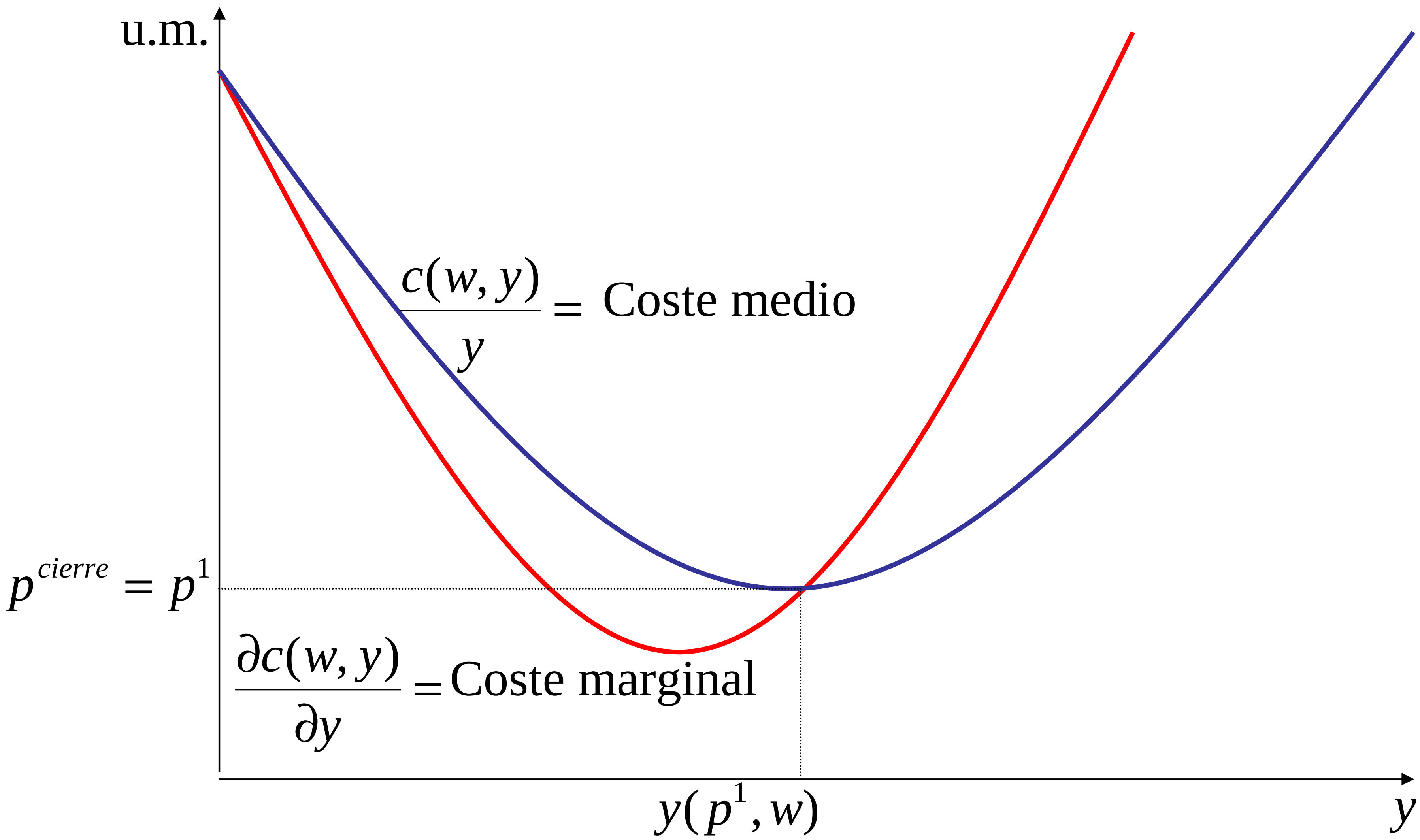
$$p^2 y^2 - wz^2 \geq p^2 y^1 - wz^1$$

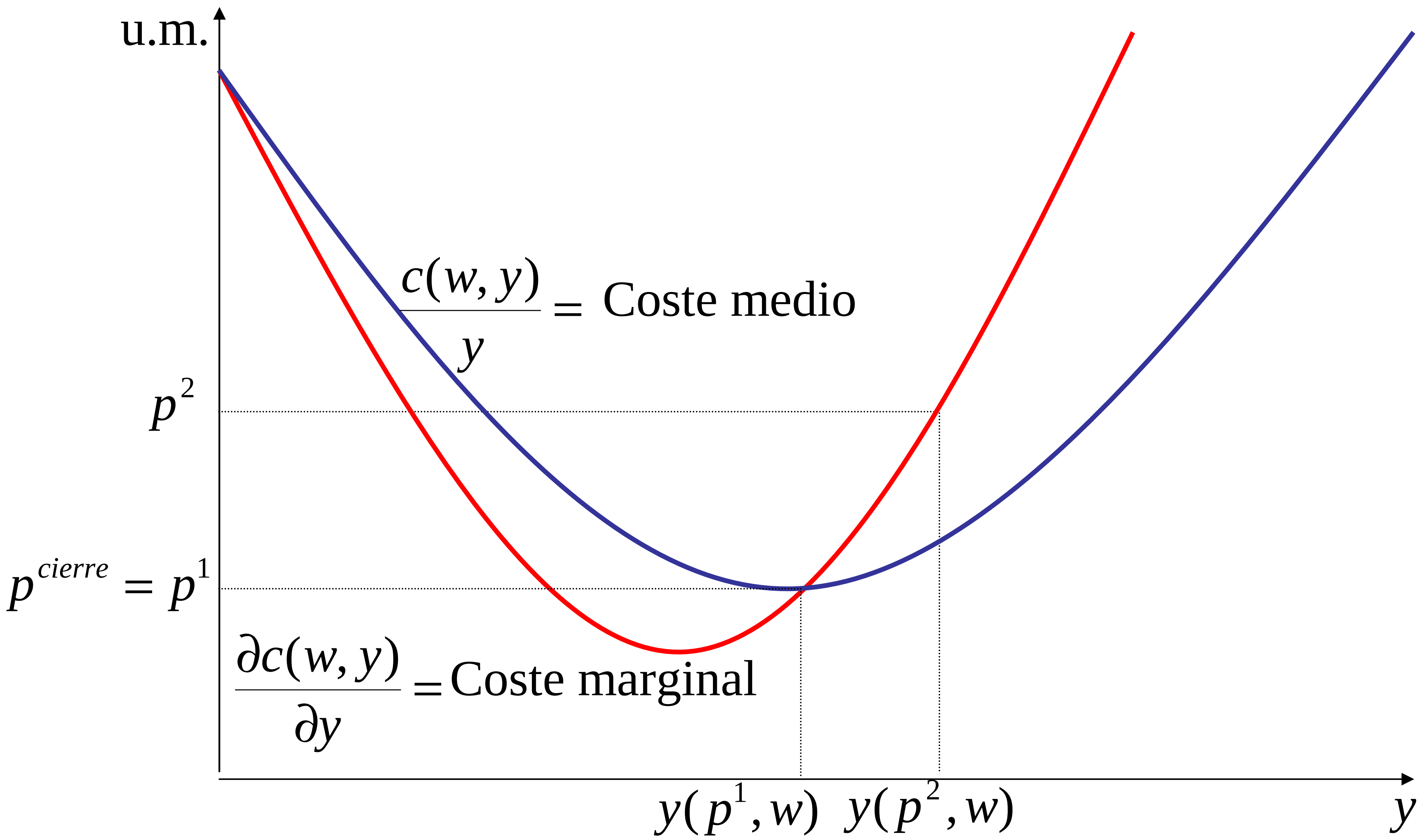
$$\left(p^2 - p^1\right)y^2 + p^1 y^2 - wz^2 \geq \left(p^2 - p^1\right)y^1 + p^1 y^1 - wz^1 \geq$$

$$\left(p^2 - p^1\right)y^1 + p^1 y^2 - wz^2 \Rightarrow \left(p^2 - p^1\right)y^2 \geq \left(p^2 - p^1\right)y^1 \Rightarrow$$

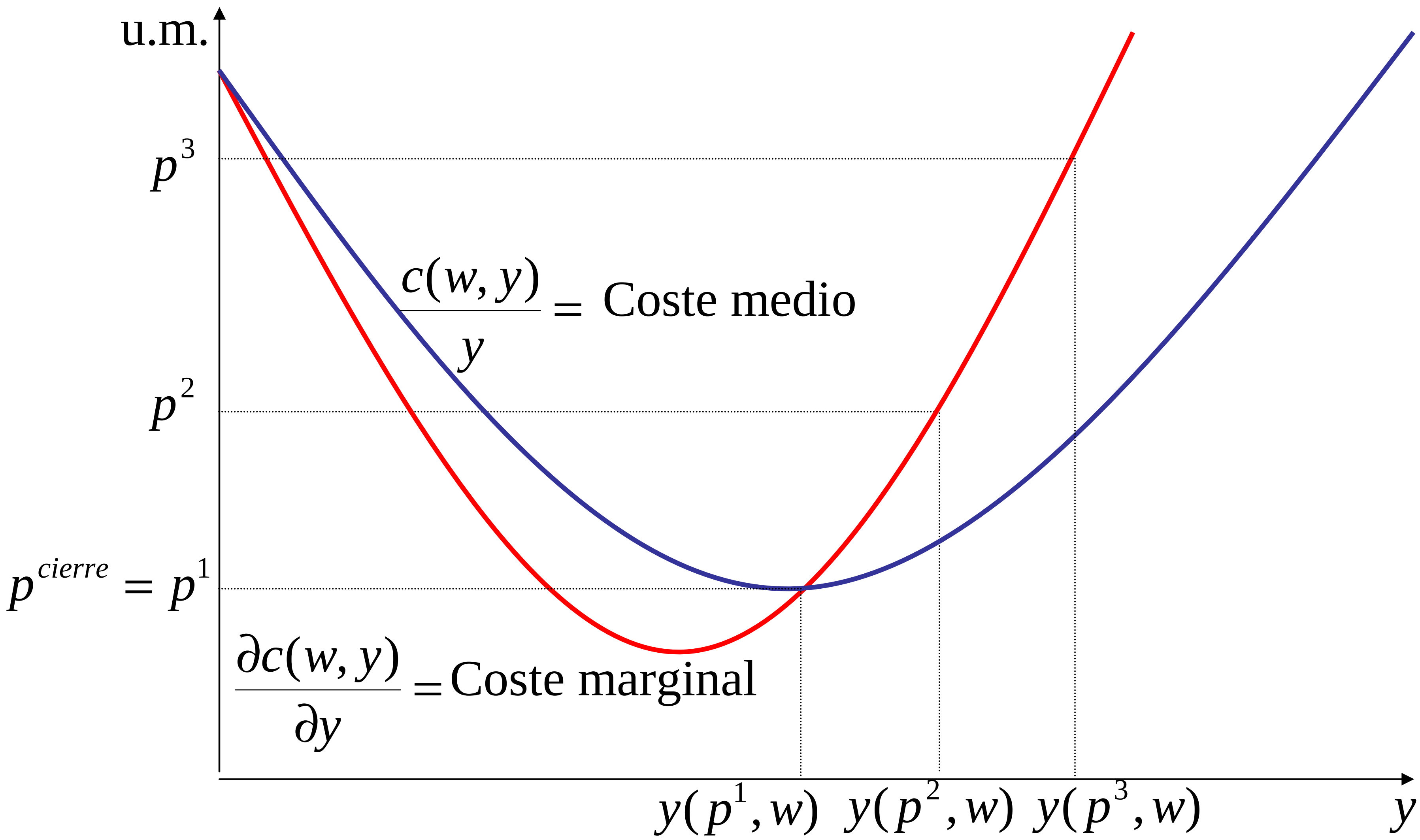
$$y^2 \geq y^1$$

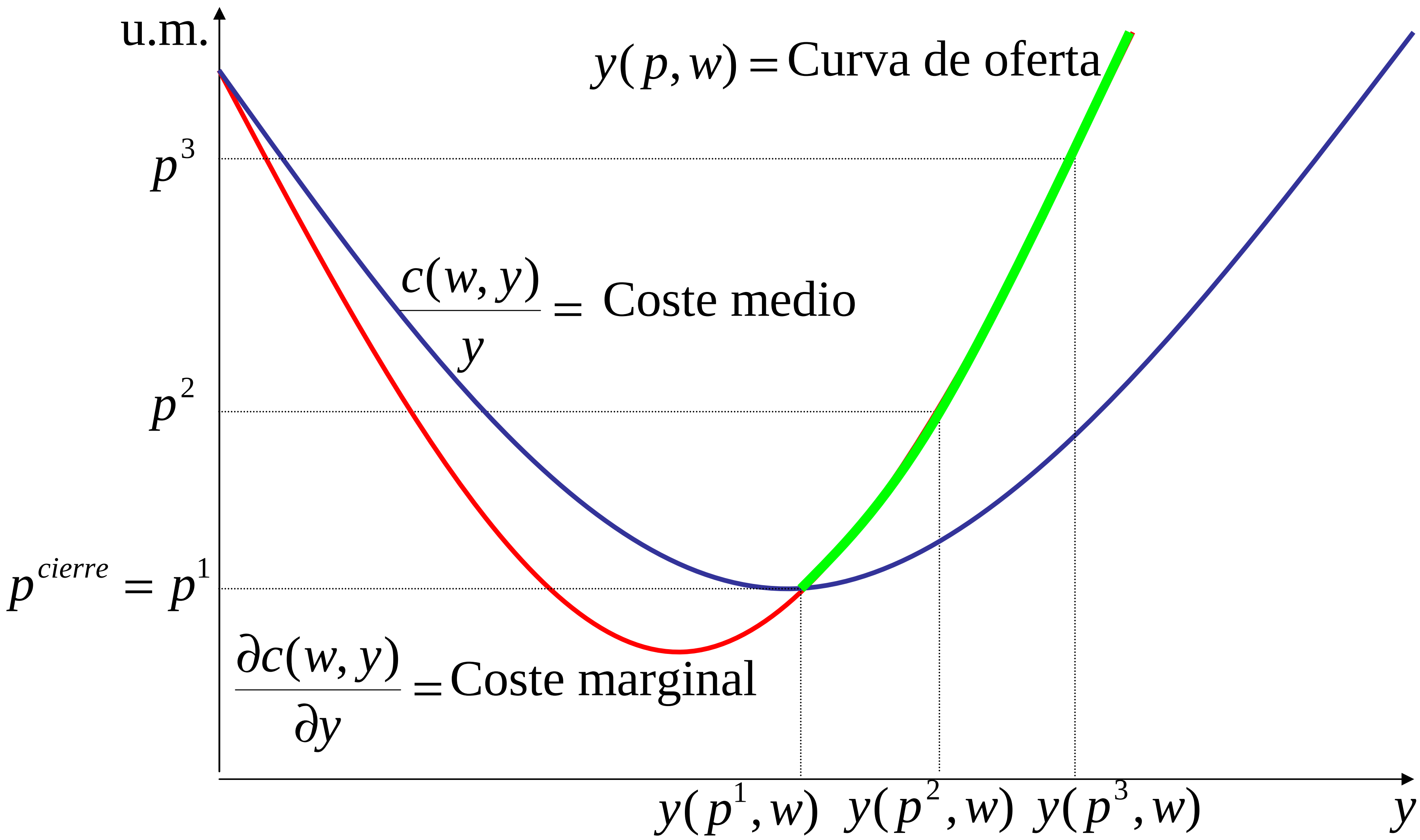
Corolario (Ley de la oferta): Si la función de oferta de una empresa existe $y(p,w)$, entonces es creciente en el precio del producto que vende dicha empresa.


u.m.
$\frac{c(w,y)}{y} =$ Coste medio
$p^{cierre} = p^1$
$\frac{\partial c(w,y)}{\partial y} =$ Coste marginal
$y(p^1, w)$
y



u.m.
$\frac{c(w,y)}{y}$ = Coste medio
p^2
$p^{cierre} = p^1$
$\frac{\partial c(w,y)}{\partial y}$ = Coste marginal
$y(p^1, w)$
$y(p^2, w)$
y


u.m.
p^3
p^2
$p^{cierre} = p^1$
$\frac{c(w,y)}{y}$ = Coste medio
$\frac{\partial c(w,y)}{\partial y}$ = Coste marginal
$y(p^1,w)$ $y(p^2,w)$ $y(p^3,w)$
y


u.m.
$y(p,w) =$ Curva de oferta
p^3
$\frac{c(w,y)}{y} =$ Coste medio
p^2
$p^{cierre} = p^1$
$\frac{\partial c(w,y)}{\partial y} =$ Coste marginal
$y(p^1,w)$ $y(p^2,w)$ $y(p^3,w)$
y

Proposición: Sea:

$$
\begin{aligned}
\left(y^1, z^1\right) \in \quad & \arg\max_{y,z} \quad py - w^1 z \\
& s.a: \quad y \leq f(z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(y^2, z^2\right) \in \quad & \arg\max_{y,z} \quad py - w^2 z \\
& s.a: \quad y \leq f(z)
\end{aligned}
$$

donde $w_k^2 > w_k^1$ y $\forall j \neq k \quad w_j^2 = w_j^1 \Rightarrow z_k^2 \leq z_k^1$

Demostración

$$py^2 - w^2 z^2 \geq py^1 - w^2 z^1$$

$$py^2 - w^1 z^2 - \left(w_k^2 - w_k^1\right) z_k^2 \geq py^1 - w^1 z^1 - \left(w_k^2 - w_k^1\right) z_k^1 \geq$$

$$py^2 - w^1 z^2 - \left(w_k^2 - w_k^1\right) z_k^1 \Rightarrow -\left(w_k^2 - w_k^1\right) z_k^2 \geq -\left(w_k^2 - w_k^1\right) z_k^1$$

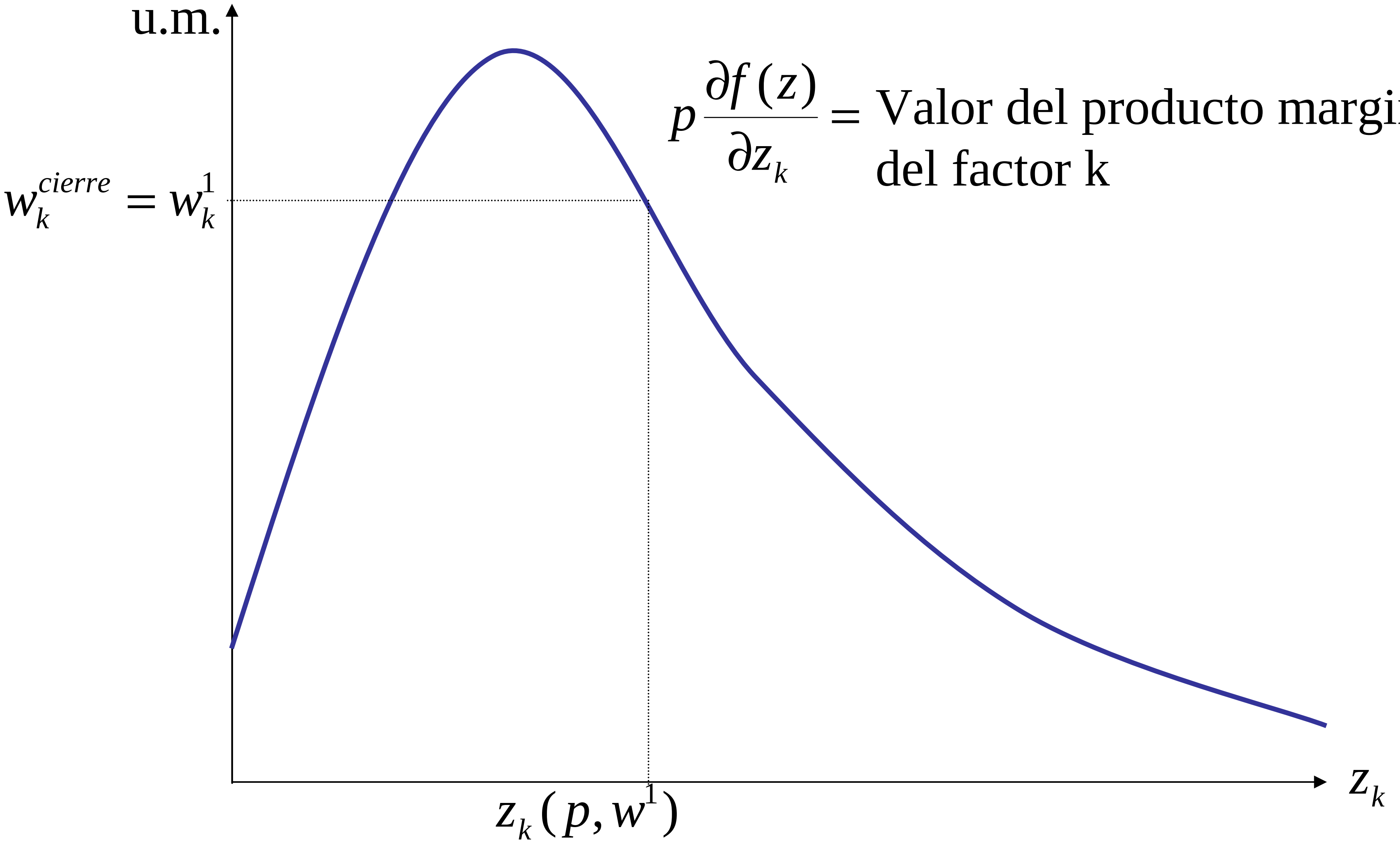
$$\left(w_k^2 - w_k^1\right) z_k^2 \leq \left(w_k^2 - w_k^1\right) z_k^1 \Rightarrow z_k^2 \leq z_k^1$$

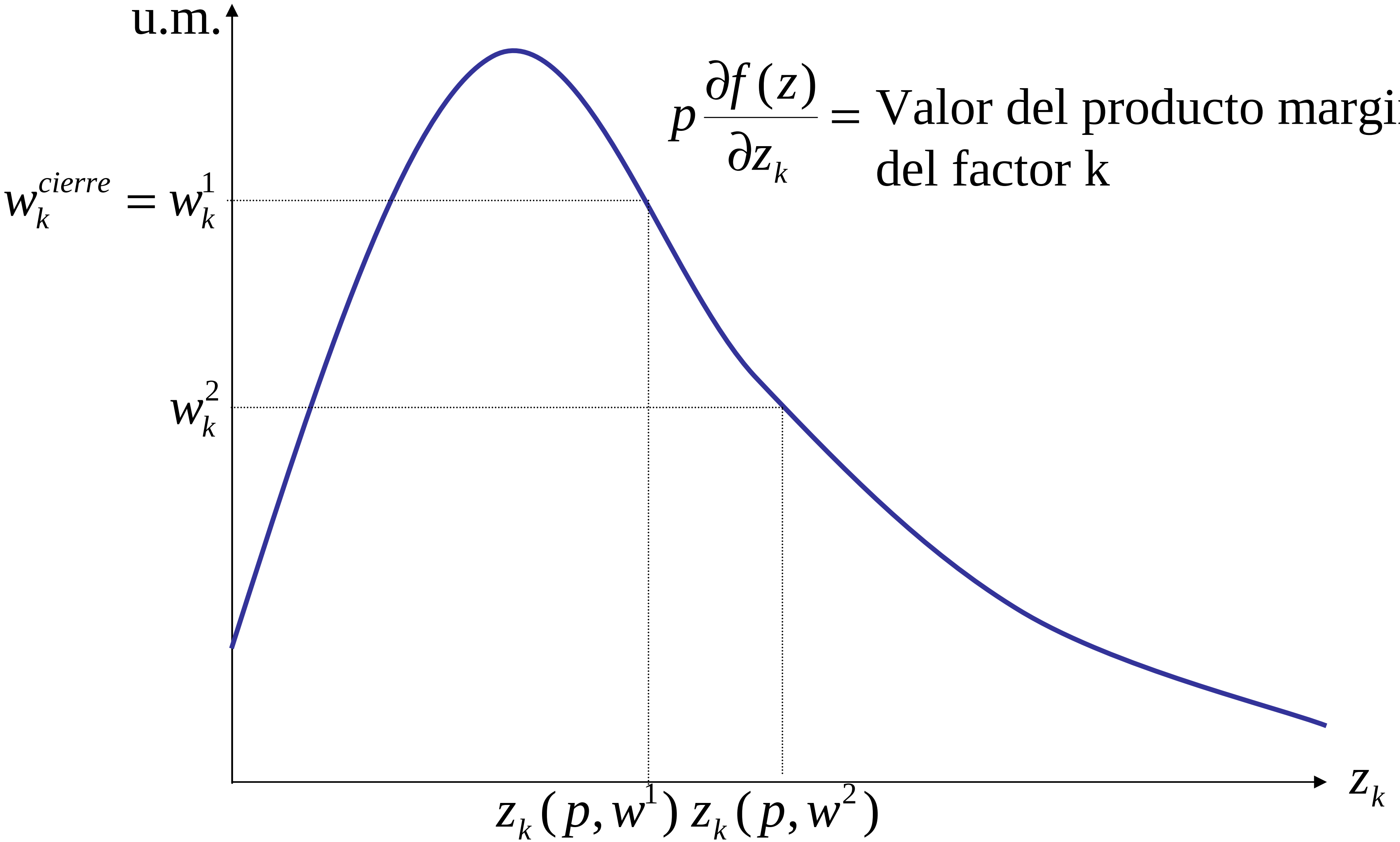
Corolario: Si la función de demanda de un factor por una empresa $z_k(p,w)$ existe, entonces es decreciente en su precio w_k

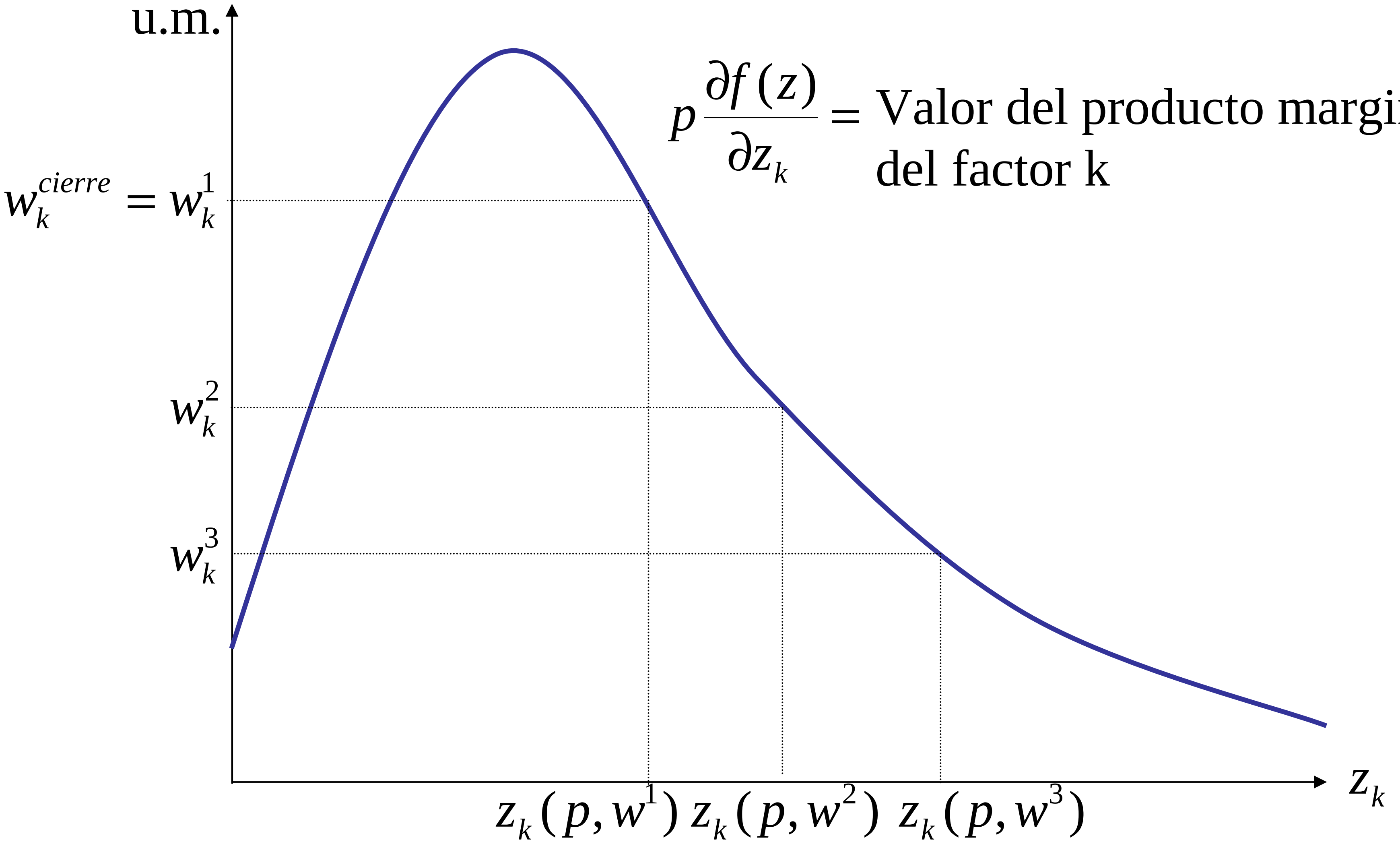
Precio del factor k de cierre: máximo precio que puede tener el factor k para que la empresa decida producir, dado el precio de los demás factores y el precio del producto:

$$w_k^{cierre}(p, w_{-k}) \overset{Def}{\Leftrightarrow} p^{cierre}(w_k^{cierre}(p, w_{-k}), w_{-k}) = p \Leftrightarrow$$

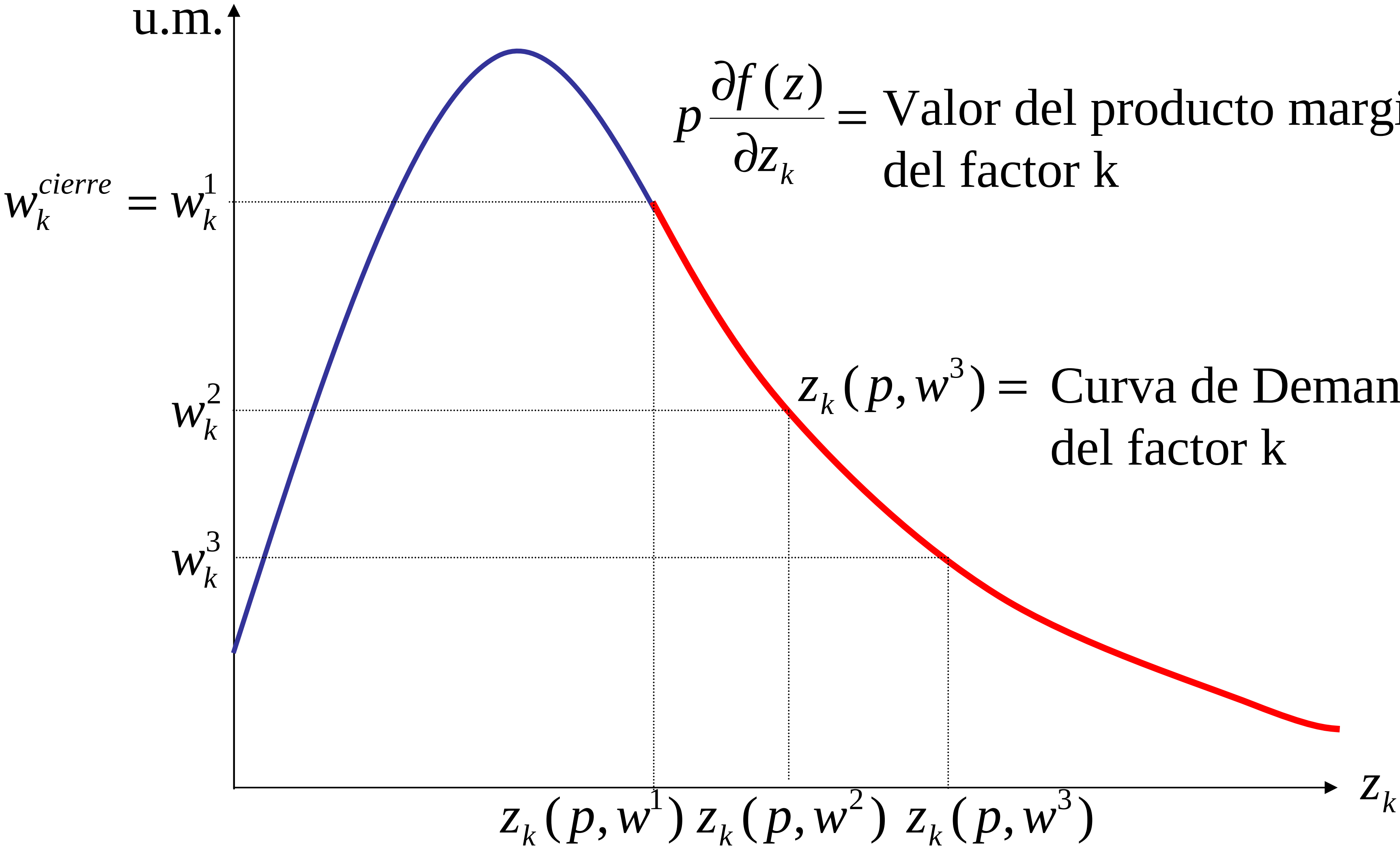
$$p = \min_y \frac{c(w_k^{cierre}(p, w_{-k}), w_{-k}, y)}{y}$$


u.m.
$w_k^{cierre} = w_k^1$
$p\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_k}$ = Valor del producto marginal del factor k
z_k
$z_k(p, w^1)$


u.m.
$p\frac{\partial f(z)}{\partial z_k}$ = Valor del producto marginal del factor k
$w_k^{cierre} = w_k^1$
w_k^2
z_k
$z_k(p, w^1)$ $z_k(p, w^2)$



u.m.
$p\frac{\partial f(z)}{\partial z_k}=$ Valor del producto marginal del factor k
$w_k^{cierre}=w_k^1$
w_k^2
w_k^3
z_k
$z_k(p,w^1)$ $z_k(p,w^2)$ $z_k(p,w^3)$


u.m.
$p\frac{\partial f(z)}{\partial z_k}=$ Valor del producto marginal del factor k
$w_k^{cierre}=w_k^1$
w_k^2
w_k^3
$z_k(p,w^3)=$ Curva de Demanda del factor k
z_k
$z_k(p,w^1)$ $z_k(p,w^2)$ $z_k(p,w^3)$