Tema 5:

Equilibrio General

Parte I

OWC Economía para Matemáticos

Fernando Perera Tallo
ttp://bit.ly/8l8DDu

Conceptos Básicos, Teoremas del Bienestar, Cálculo del Equilibrio General

http://bit.ly/8l8DDu
Fernando Perera-Tallo

Equilibrio General con Producción

- n bienes $x_i \quad i \in \{1,2,...,n\}$
- m factores $z_k \quad k \in \{1,2,...,m\}$
- H economías domésticas con función de utilidad $u^h\left(x^h\right)$, donde $x^h = \left(x_1^h, x_2^h,..., x_n^h\right) \in \Re_+^n$ es el vector de bienes consumidos por la economía doméstica h.
- J_i empresas del sector i que producen el bien i de acuerdo con la función de producción $f^{ji}(z^{ji})$, donde z^{ji} es el vector de factores que utiliza la empresa j del sector i: $z^{ji} = \left(z_1^{ji}, z_2^{ji},..., z_m^{ji}\right) \in \Re_+^m$. La producción de la empresa j de sector i se denota por y^{ji}.

- $p \in \Re_{+}^{n}$ es vector de precios de los bienes y $w \in \Re_{+}^{m}$ el vector de precios de los factores.
- Cada economía doméstica posee un vector de factores $e^{h} = \left(e_{1}^{h}, e_{2}^{h}, \ldots, e_{m}^{h}\right) \in \Re_{+}^{m}$ y la fracción θ^{hji} de los beneficios de la empresa j del sector i, que se denotan por $\pi^{ji} = p_{i} y^{ji} - w z^{ji}$. Obviamente $\sum_{h=1}^{H} \theta^{hji} = 1$.

- $e=(e_1,e_2,...,e_m)=\left(\sum_{h=1}^{H}e_1^h,\sum_{h=1}^{H}e_2^h,...,\sum_{h=1}^{H}e_m^h\right)=\sum_{h=1}^{H}e^h$ es el

vector de dotaciones de factores de la economía.

- $y=(y_1,y_2,...,y_n)=\left(\sum_{j=1}^{J_1}y^{j1},\sum_{j=1}^{J_2}y^{j2},,...,\sum_{j=1}^{J_n}y^{jn},\right)$ es el

vector de producciones de la economía.

- $x=(x_1,x_2,...,x_n)=\left(\sum_{h=1}^{H}x_1^h,\sum_{h=1}^{H}x_2^h,...,\sum_{h=1}^{H}x_n^h\right)=\sum_{h=1}^{H}x^h$ es

el vector de consumos agregados de la economía.

Supuesto 1.1: $u^h\left(x^h\right)$ es una función continua y creciente (en todos sus argumentos) en $\Re^n_+$. Además es estrictamente creciente en todos sus argumentos y estrictamente cuasicóncava en $\Re^n_{++}$.

Supuesto 1.2: $f^{ji}(z^{ji})$ es una función continua, creciente (en todos sus argumentos) y cóncava en $\Re^n_+$, y $f^{ji}(0)=0$. Además es estrictamente creciente en todos sus argumentos y estrictamente cuasicóncava en $\Re^n_{++}$. Además el vector de dotaciones de factores es estrictamente positivo e»0.

Asignación: es un vector que especifica la cantidad de bien consumido por cada economía doméstica, la cantidad de bien producido por cada empresa y la cantidad de factor utilizado por cada empresa: $\left(\left(x^h\right)_{h=1}^{H}, \left(\left(y^{ji}, z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i} \right)_{i=1}^{n} \right) \in \Re_+^A$,

donde $A \equiv n \times H + (1+m) \times \sum_{i=1}^{n} J_i$.

Asignación factible: $\left(\left(x^h\right)_{h=1}^{H}, \left(\left(y^{ji}, z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^{n} \right) \in \Re_+^A$ es factible si y sólo si se cumplen las siguientes restricciones:

- Se consume menos o igual a lo que se produce: $\forall i \quad \sum_{h=1}^{H} x_i^h \leq \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji}$;

- Cada empresa produce de acuerdo con su tecnología: $\forall j \quad y^{ji} \leq f^{ji}(z^{ji})$

- No se usan más factores que los existentes en la economía: $\forall k \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} \leq e_k$

Conjunto factible: conjunto de asignaciones factibles:

$$F(e)=\left\{\left(\left(x^{h}\right)_{h=1}^{H},\left(\left(y^{ji},z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^{n}\right)\in\Re_{+}^{A}\ /\quad \sum_{h=1}^{H}x_i^h\leq\sum_{j=1}^{J_i}y^{ji},\right.$$

$$\left. y^{ji}\leq f^{ji}(z^{ji}),\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i}z_k^{ji}\leq e_k\right\}$$

Fernando Perera-Tallo

Una asignación factible $\left(\left(\tilde{x}^h\right)_{h=1}^H,\left(\left(\tilde{y}^{ji},\tilde{z}^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^n\right)\in F(e)$ se dice que es **superior en el sentido de Pareto** a otra asignación factible $\left(\left(\hat{x}^h\right)_{h=1}^H,\left(\left(\hat{y}^{ji},\hat{z}^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^n\right)\in F(e)$, si en la primera asignación ninguna economía doméstica está peor que en la segunda asignación y al menos una economía domestica esta (estrictamente) mejor. Es decir, $\forall h \quad u^h(\tilde{x}^h)\geq u^h(\hat{x}^h)$ y $\exists h^* \quad u^{h^*}(\tilde{x}^{h^*})>u^{h^*}(\hat{x}^{h^*})$.

Asignación eficiente en el sentido de Pareto: Una asignación factible $\left(\left(x^h\right)_{h=1}^{H}, \left(\left(y^{ji}, z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^{n}\right) \in F(e)$ se dice que es eficiente en el sentido de Pareto si no existe ninguna asignación factible superior en el sentido de Pareto a dicha asignación.

Vector de producciones agregada: vector $y \in \Re_{+}^{n}$ que especifica la cantidad de cada uno de los bienes que se producen en la economía por todas las empresas:

$$y = (y_1, y_2, ..., y_n) = \left(\sum_{j=1}^{J_1} y^{j1}, \sum_{j=1}^{J_2} y^{j2}, ..., \sum_{j=1}^{J_n} y^{jn} \right)$$

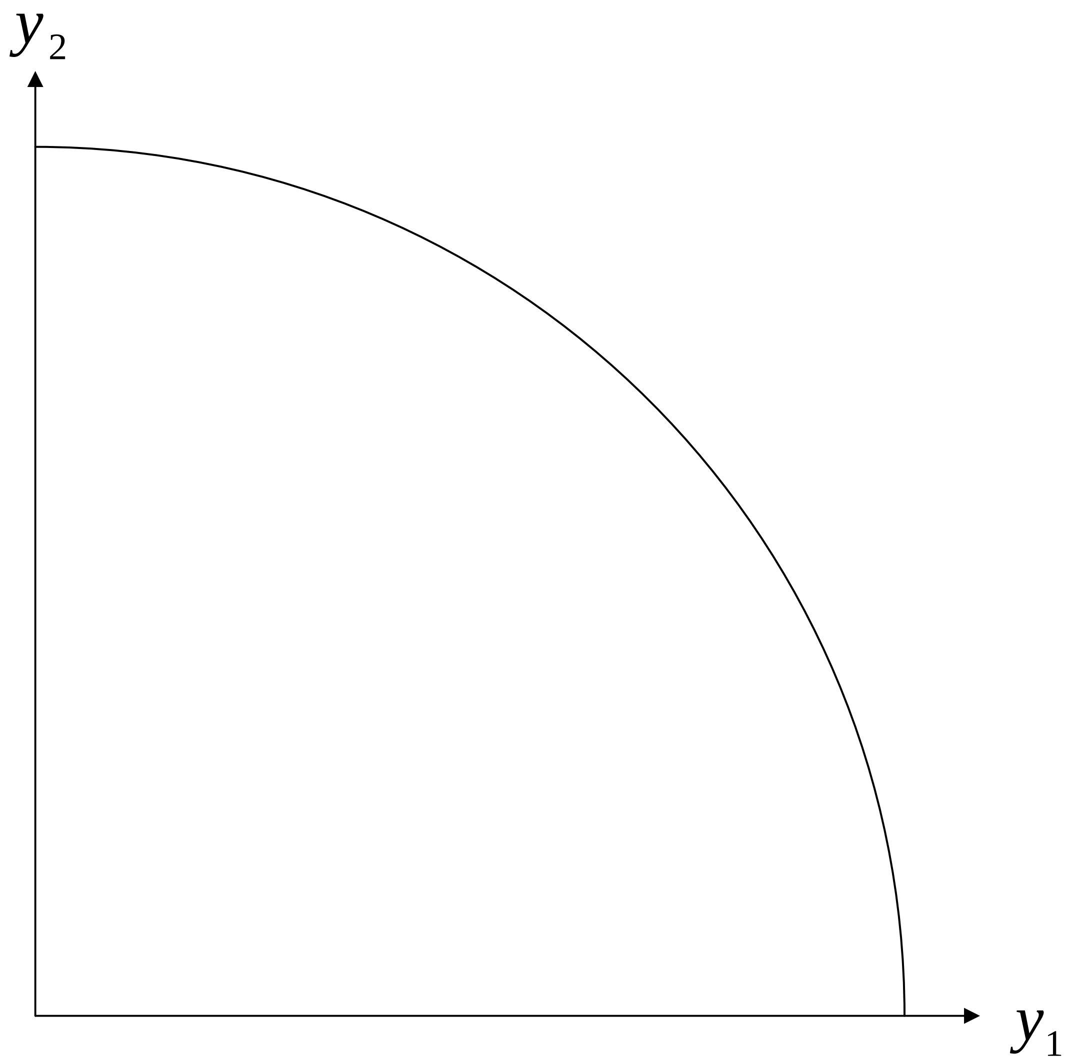
Conjunto de posibilidades de producción: conjunto de todas las posibles vectores de producciones agregadas que se pueden producir en una economía dada su tecnología y sus recursos:

$$CPP(e) = \left\{ y \in \Re_{+}^{n} / y_i \leq \sum_{j=1}^{J_i} f^{ji}(z^{ji}) \text{ y } e_k \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} \right\}$$

Eficiencia productiva: Se dice que un vector de bienes $\hat{y} \in CPP$ es eficiente desde el punto productivo si no existe $\tilde{y} \in CPP$ tal que $\forall i \quad \tilde{y}_i \geq \hat{y}_i$ y $\exists i^* \quad \tilde{y}_{i^*} > \hat{y}_{i^*}$.

Obviamente, la eficiencia Paretiana implica la eficiencia productiva, pero no a la inversa.

Frontera de Posibilidades de producción: $FPP(e)$ conjunto de vectores de bienes pertenecientes al conjunto de posibilidades de producción que son eficientes desde el punto de vista productivo.



y_2
y_1

Relación Marginal de Transformación de bien 1 por bien 2 o coste de oportunidad del bien 1 en términos del bien 2: Número de unidades de bien 2 a las que hay que renuncier para producir una unidad adicional de bien 1.

Un **equilibrio Walrasiano** es una asignación $\left(\left(x^h\right)_{h=1}^{H}, \left(\left(y^{ji}, z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^{n} \right)$, llamada **asignación de equilibrio,** y un vector de precios (p, w), llamado **vector de precios de equilibrio**, tal que:

- Las economías domésticas maximizan su utilidad:

$$x^h \in Arg \max_{x^h} \quad u^h(x^h)$$

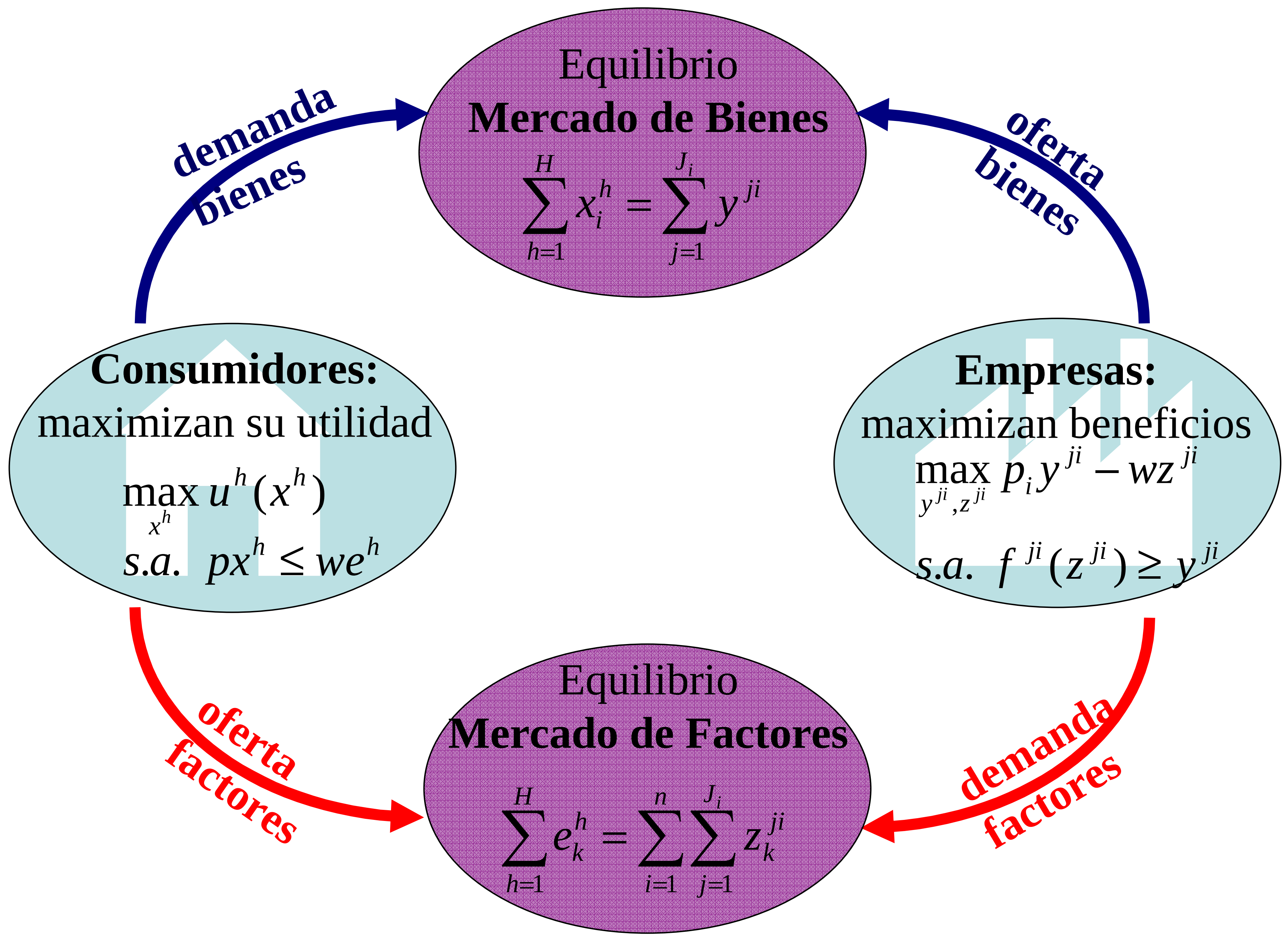
$$s.a. \quad px^h \leq we^h + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \theta^{hji} \pi^{ji}$$

- Las empresas maximizan beneficios:

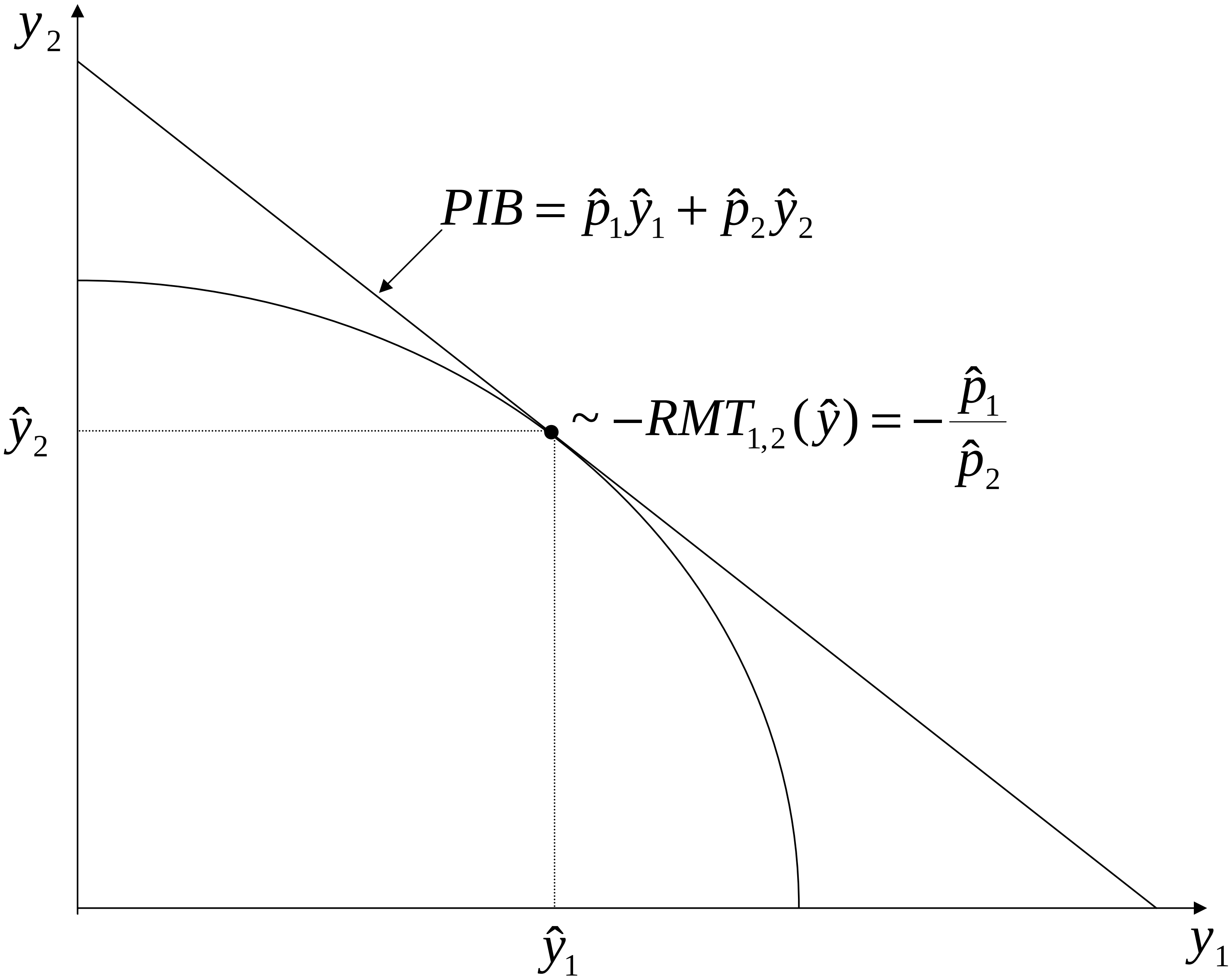
$$(y^{ji}, z^{ji}) \in \quad \arg \max_{y^{ji}, z^{ji}} p_i y^{ji} - wz^{ji}$$

$$s.a. \ f^{ji}(z^{ji}) \geq y^{ji}$$

- Los mercados de bienes se vacían: $\sum_{h=1}^{H} x_i^h = \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji} \quad \forall i \in \{1,2,...,n\}$
- Mercados de factores se vacían: $\sum_{h=1}^{H} e_k^h = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} \quad \forall k \in \{1,2,...,m\}$


Equilibrio
Mercado de Bienes
$\sum_{h=1}^{H} x_i^h = \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji}$
demanda bienes
oferta bienes
Consumidores:
maximizan su utilidad
$\max_{x^h} u^h(x^h)$
$s.a.\ \ px^h \leq we^h$
Empresas:
maximizan beneficios
$\max_{y^{ji}, z^{ji}} p_i y^{ji} - wz^{ji}$
$s.a.\ \ f^{ji}(z^{ji}) \geq y^{ji}$
oferta factores
demanda factores
Equilibrio
Mercado de Factores
$\sum_{h=1}^{H} e_k^h = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji}$

Proposición 1: Sea $\left\{\left(\left(\hat{x}^h\right)_{h=1}^{H},\left(\left(\hat{y}^{ji},\hat{z}^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^{n}\right),\left(\hat{p},\hat{w}\right)\right\}$ un equilibrio Walrasiano, entonces $\hat{y}\in \arg\max_{y\in CPP} \hat{p}\,y$, donde $\hat{y}_i=\sum_{j=1}^{J_i}\hat{y}^{ji}$.


y_2
$PIB = \hat{p}_1\hat{y}_1 + \hat{p}_2\hat{y}_2$
$\hat{y}_2$
$\sim -RMT_{1,2}(\hat{y}) = -\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_2}$
$\hat{y}_1$
y_1

Corolario: Sea $\left\{\left(\left(\hat{x}^{h}\right)_{h=1}^{H},\left(\left(\hat{y}^{ji},\hat{z}^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^{n}\right),\left(\hat{p},\hat{w}\right)\right\}$ un equilibrio Walrasiano y sea $\hat{y}$ el vector de producciones agregadas asociado a dicho equilibrio, entonces $\hat{y}$ es eficiente desde el punto de vista productivo (está en la FPP).

Proposición (1er Teorema del Bienestar): toda asignación de equilibrio es eficiente en el sentido de Pareto

Proposición (2º Teorema del Bienestar): toda asignación eficiente en el sentido de Pareto se puede implementar como un Equilibrio Walrasiano

Equilibrio General: Enfoque Diferencial

Supuestos:

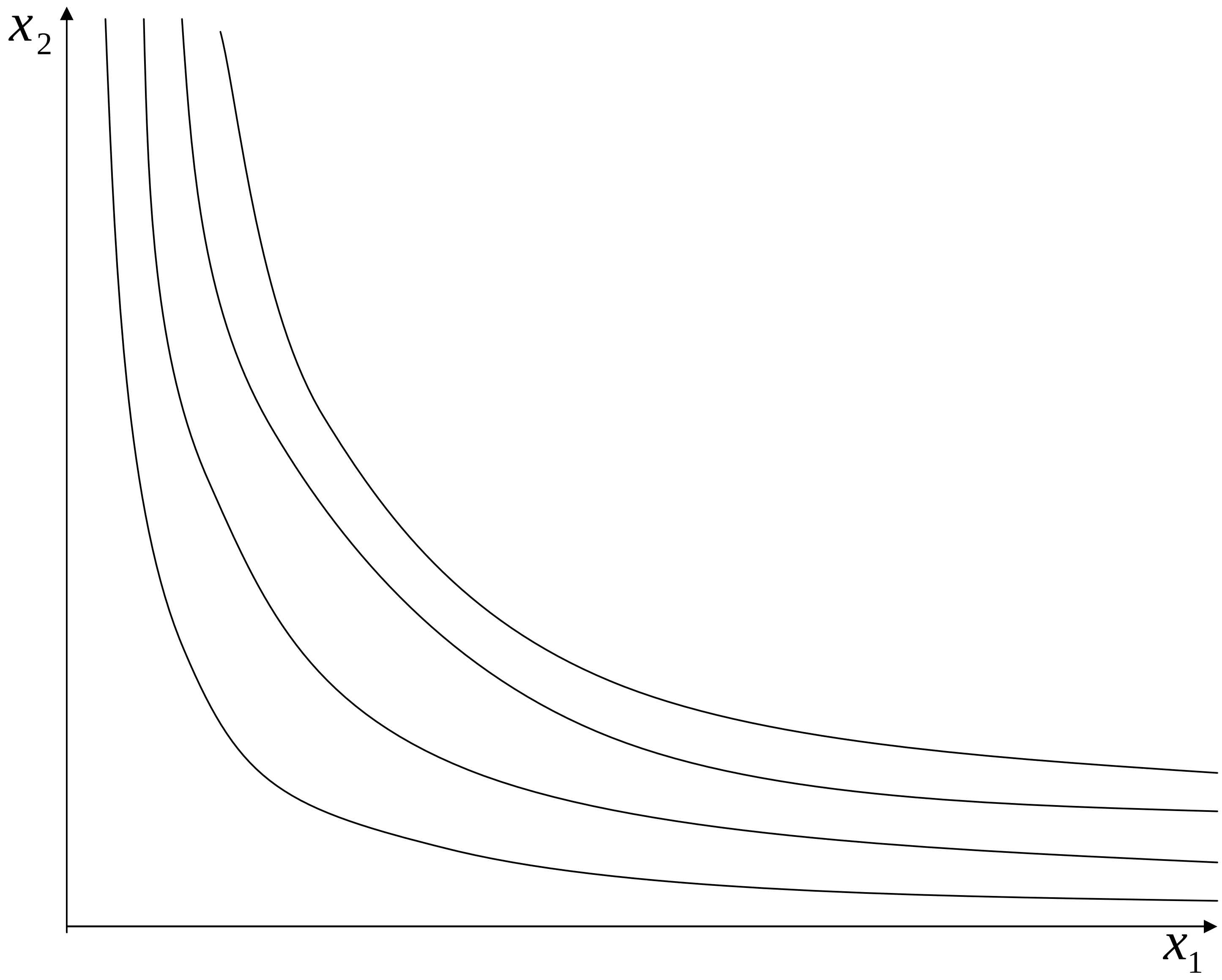
- Las funciones de utilidad y de producción son continuas y diferenciables de segundo orden.

- $\forall h, i, i^* \quad i \neq i^* \quad \forall x^h_{-i^*} \gg 0 \quad \lim\limits_{x^h_{i^*} \to 0} RMS^h_{i^*,i}(x^h_{i^*}, x^h_{-i^*}) = +\infty,$

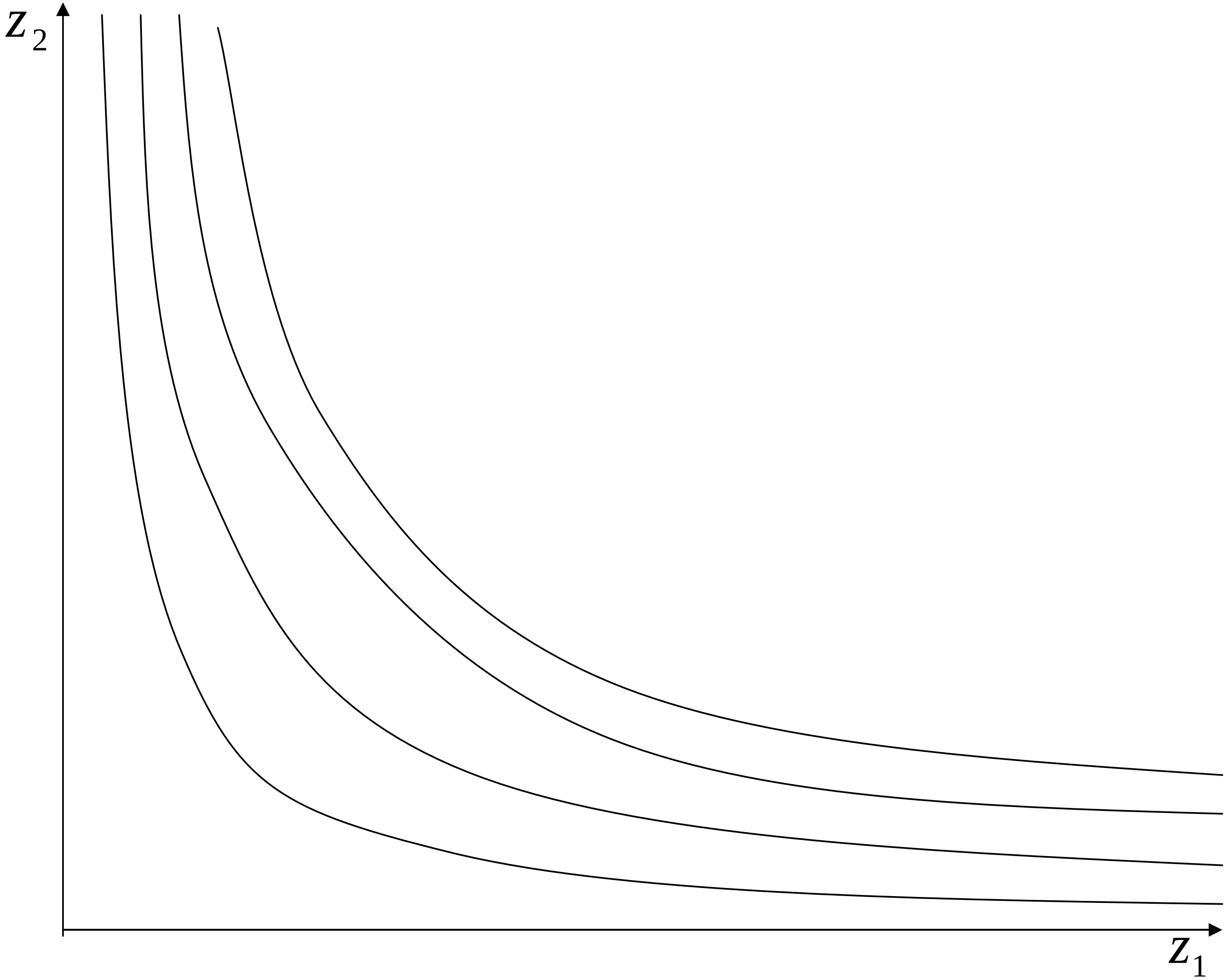
donde $x^h_{-i} \in \Re^{n-1}_+$ es el vector de consumo de la economía doméstica *h* de todos los bienes excepto del bien *i*.

- $\forall j, k, k^* \quad k \neq k^* \quad \forall z^j_{-k^*} \gg 0 \quad \lim\limits_{z^j_{k^*} \to 0} RMST^j_{k^*,k}(z^j_{k^*}, z^j_{-k^*}) = +\infty,$

donde $z^j_{-k} \in \Re^{m-1}_+$ es el vector de factores utilizados por la empresa *j* de todos los factores excepto del factor *k*.



x_2
x_1


z_2
z_1

Definición 1: Un **equilibrio Walrasiano** es una asignación $\left(\left(x^h\right)_{h=1}^{H}, \left(\left(y^{ji}, z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^{n}\right)$, llamada **asignación de equilibrio,** y un vector de precios (p, w), llamado **vector de precios de equilibrio**, tal que:

- Las economías domésticas maximizan su utilidad:

$$x^h \in Arg\max_{x^h} \quad u^h(x^h)$$

$$s.a. \quad px^h \leq we^h + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\theta^{hji}\pi^{ji}$$

- Las empresas maximizan beneficios:

$$(y^{ji}, z^{ji}) \in \quad \arg\max_{y^{ji}, z^{ji}} p_i y^{ji} - wz^{ji}$$

$$s.a. \;\; f^{ji}(z^{ji}) \geq y^{ji}$$

- Los mercados de bienes se vacían:

$$\sum_{h=1}^{H} x_i^h = \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji} \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$$

- Los mercados de factores se vacían:

$$\sum_{h=1}^{H} e_k^h = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} \quad \forall k \in \{1,2,\ldots,m\}$$

Definición 2: Un **equilibrio Walrasiano (**cuando hay **soluciones interiores)** es una asignación $\left(\left(x^h\right)_{h=1}^H, \left(\left(y^{ji}, z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^n\right)$, llamada **asignación de equilibrio,** y un vector de precios (p, w), llamado **vector de precios de equilibrio**, tal que:

- Las economías domésticas maximizan su utilidad:

$$RMS^{h}_{\tilde{\imath},i}(x^{h}) = \frac{p_{\tilde{\imath}}}{p_i}$$

$$px^{h} = we^{h} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\theta^{hji}\left(p_i y^{ji} - wz^{ji}\right)$$

- Las empresas maximizan beneficios:

$$p_i \frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}} = w_k$$

$$y^{ji} = f^{ji}(z^{ji})$$

- Los mercados de bienes se vacían:

$$\sum_{h=1}^{H} x_i^h = \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji} \quad \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$$

- Los mercados de factores se vacían:

$$\sum_{h=1}^{H} e_k^h = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji} \quad \forall k \in \{1,2,\dots,m\}$$

Cómo calcular un equilibrio Walrasiano

$$RMS^{h}_{\tilde{i},i}(x^{h}) = \frac{p_{\tilde{i}}}{p_i} \qquad (n-1)\times H \qquad (EW1)$$

$$px^{h} = we^{h} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\theta^{hji}\left(p_i y^{ji} - wz^{ji}\right) \qquad H \qquad (EW2)$$

$$p_i \frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z^{ji}_{k}} = w_k \qquad m\times\sum_{i=1}^{n} J_i \qquad (EW3)$$

$$y^{ji} = f^{ji}(z^{ji}) \qquad \sum_{i=1}^{n} J_i \qquad (EW4)$$

$$\sum_{h=1}^{H} x^{h}_{i} = \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji} \qquad n \qquad (EW5)$$

$$\sum_{h=1}^{H} e^{h}_{k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} z^{ji}_{k} \qquad m \qquad (EW6)$$

Tenemos un sistema de $n \times H + (m+1) \times \sum_{i=1}^{n} J_i + n + m$ ecuaciones, con $n \times H + (m+1) \times \sum_{i=1}^{n} J_i + n + m$ incógnitas:

- La asignación de consumo de las economías domésticas $\left(x^h\right)_{h=1}^{H}$ ($n \times H$ incógnitas)
- La asignación de factores a las empresa y la producciones de las empresas $\left(\left(y^{ji}, z^{ji}\right)_{j=1}^{J_i}\right)_{i=1}^{n}$ ($(m+1) \times \sum_{i=1}^{n} J_i$ incógnitas)
- El vector de precios de los bienes p (n incógnitas)
- El vector de precios de los factores w (m incógnitas).

Si (p^*, w^*) es un vector de precios de equilibrio, $(\lambda p^*, \lambda w^*)$

es también un vector de precios de equilibrio (λ>0):

$$RMS^h_{\tilde{i},i}(x^h) = \frac{\lambda p_{\tilde{i}}}{\lambda p_i}$$

$$\lambda p x^h = \lambda w e^h + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\theta^{hji}\left(\lambda p_i y^{ji} - \lambda w z^{ji}\right)$$

$$\lambda p_i \frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}} = \lambda w_k$$

$$y^{ji} = f^{ji}(z^{ji})$$

$$\sum_{h=1}^{H} x_i^h = \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji}$$

$$\sum_{h=1}^{H} e_k^h = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji}$$

Si sumamos las restricciones presupuestarias de todas las economías domésticas obtenemos:

$$p\sum_{h=1}^{H} x^h = w\sum_{h=1}^{H} e^h + \sum_{h=1}^{H}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i}\theta^{hji}\left(p_i y^{ji} - wz^{ji}\right)$$

$$p\sum_{h=1}^{H} x^h = w\sum_{h=1}^{H} e^h + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i}\left(p_i y^{ji} - wz^{ji}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\left(\sum_{h=1}^{H} x_i^h\right) = \sum_{k=1}^{m} w_k\left(\sum_{h=1}^{H} e_k^h\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i}\left(p_i y^{ji} - \sum_{k=1}^{m} w_k z_k^{ji}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\left(\sum_{h=1}^{H} x_i^h - \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji}\right) = \sum_{k=1}^{m} w_k\left(\sum_{h=1}^{H} e_k^h - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji}\right)$$

Ley de Walras: La suma del valor de los excesos de demanda de todos los mercados (bienes y factores) suman zero. Esto implica que si todos los mercados menos uno están en equilibrio (hay $n+m-1$ mercados en equilibrio), entonces el último mercado también está en equilibrio.

Con lo que obtenemos una combinación de las condiciones de vaciado de los mercados de bienes y de factores. Por tanto, podemos eliminar o bien una restricción presupuestaria, o bien una condición de vaciado de un mercado de bienes o de factores: si están en equilibrio $(n+m-1)$ mercados, entonces están en equilibrio el mercado restante.

Resumiendo, tenemos $n \times H + (m+1) \times \sum_{i=1}^{n} J_i + n + m - 1$ incógnitas (normalizando algún precio) y $n \times H + (m+1) \times \sum_{i=1}^{n} J_i + n + m - 1$ ecuaciones (eliminando alguna ecuación de vaciado de mercado o alguna restricción presupuestaria):

$$p_i \frac{\partial f^{ji}(z^{ji})}{\partial z_k^{ji}} = w_k$$

$$y^{ji} = f^{ji}(z^{ji})$$

$$RMS_{\tilde{i},i}^{h}(x^h) = \frac{p_{\tilde{i}}}{p_i}$$

$$px^h = we^h + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\theta^{hji}\left(p_i y^{ji} - wz^{ji}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{H} x_i^h = \sum_{j=1}^{J_i} y^{ji}$$

$$\sum_{h=1}^{H} e_k^h = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} z_k^{ji}$$

$$m \times \sum_{i=1}^{n} J_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} J_i$$

$$(n-1)\times H$$

$$\left.\begin{array}{l} H \\ \\ n \\ \\ m \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} H+n+m-1 \\ \\ \text{ecuaciones} \\ \\ \text{(sobra una)} \end{array}$$

Fernando Perera-Tallo