Teoría de errores: problemas propuestos

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

6. Problemas propuestos

6.1. Error absoluto y error relativo

1. Acotar A sabiendo que $a = 42.56$ es una aproximación con error relativo $\delta_a < 0.01$.

   Solución. $42.13 \leq A \leq 42.99$.

2. Encontrar una aproximación de A por defecto y otra por exceso, sabiendo que $a = 0.0039848$ es una aproximación de A con $\delta_a < \dfrac{43}{8} \cdot 10^{-3}$.

   Solución. $396.33 \cdot 10^{-5} \leq A \leq 400.63 \cdot 10^{-5}$.

3. Encontrar el error absoluto Δ_x de los siguientes números aproximados a partir de su error relativo:

   a) $x = 2.52, \quad \delta_x = 0.7\,\%$; *b*) $x = 0.986, \quad \delta_x = 10\,\%$;

   c) $x = 46.75, \quad \delta_x = 1\,\%$; *d*) $x = 199.1, \quad \delta_x = 0.01$.

   Solución. *a*) $\Delta_x = 0.01764$; *b*) $\Delta_x = 0.0986$; *c*) $\Delta_x = 0.4675$; *d*) $\Delta_x = 1.991$.

4. Determinar cuál de las dos medidas siguientes tiene mejor precisión:

   a) $36/25 \simeq 1.4$ ó $1/3 \simeq 0.333$; *b*) $1/9 \simeq 0.1$ ó $1/3 \simeq 0.33$;

   c) $15/7 \simeq 2.14$ ó $1/9 \simeq 0.11$; *d*) $6/7 \simeq 0.86$ ó $\pi \simeq 22/7$;

   e) $\pi \simeq 3.142$ ó $\sqrt{10} \simeq 3.1623$.

   Solución. *a*) 1/3; *b*) 1/3; *c*) 15/7; *d*) π; *e*) $\sqrt{10}$.

6.2. Cifras significativas válidas

5. Encontrar el número de cifras significativas válidas de los siguientes números aproximados:

   a) 39.285 ± 0.034; *b*) 1.2785 ± 0.0007; *c*) 183.3 ± 0.1;

   d) 0.056 ± 0.0003; *e*) 84.17 ± 0.0073; *f*) 37.4153 ± 0.000083;

   g) $0.3341 \pm 3 \cdot 10^{-5}$; *h*) 3.217210 ± 0.0037.

   Solución. *a*) $n = 3$; *b*) $n = 3$; *c*) $n = 3$; *d*) $n = 2$; *e*) $n = 3$; *f*) $n = 5$; *g*) $n = 4$; *h*) $n = 3$.

6. Indicar el número de cifras válidas de cada una de las aproximaciones siguientes:

   a) $\Delta_{37.4153} < 0.000083$; *b*) $\Delta_{0.3341} < 0.00003$; *c*) $\Delta_{3.217210} < 0.0037$.

   Solución. *a*) $n = 5$; *b*) $n = 4$; *c*) $n = 3$.

7. Redondear los siguientes números aproximados dejando sólo cifras válidas y un dígito más de reserva:

a) $A = 47.453 \pm 0.024$; *b*) $B = 46.3852 \pm 0.0031$; *c*) $a = 3.2873$, si $\delta_a = 0.1\,\%$.

Solución. *a*) $a = 47.45$; *b*) $b = 46.385$; *c*) $\widetilde{a} = 3.287$.

8. Sabiendo que a aproxima a A con n cifras válidas, ¿con cuántas cifras válidas aproxima $a/10$ a $A/10$?

   Solución. Con n cifras.

9. Dar cotas de los errores absoluto y relativo de los siguientes números aproximados, si todas las cifras son válidas: *a*) $a = 0.7538$; *b*) $b = 17.354$.

   Solución. *a*) $\Delta_a \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$, $\delta_a \leq 0.072 \cdot 10^{-3}$; *b*) $\Delta_b \leq 0.5 \cdot 10^{-3}$, $\delta_b \leq 0.3 \cdot 10^{-4}$.

10. Sabiendo que $a = 1.7342$ es una aproximación de A con $\delta_a < 10^{-4}$, se pide:

    a) Acotar Δ_a.

    b) Dar un intervalo donde se encuentra A.

    c) Encontrar las cifras válidas de a.

    Solución. *a*) $\Delta_a \leq 1.74 \cdot 10^{-4}$; *b*) $A = 1.7342 \pm 1.74 \cdot 10^{-4}$; *c*) $n = 4$.

11. Sabiendo que $a = 14.273$ es una aproximación de A con $\delta_a < 5 \cdot 10^{-3}$, se pide:

    a) Estimar Δ_a.

    b) Estimar entre qué valores está comprendido A.

    c) ¿Es posible obtener una aproximación de A con dos cifras decimales válidas? Justificar la respuesta.

    d) Acotar los errores relativo y absoluto de a^2.

    Solución. *a*) $\Delta_a \leq 0.0714$; *b*) $A = 14.273 \pm 0.0714$; *c*) no; *d*) $\delta_{a^2} \leq 0.01$, $\Delta_{a^2} \leq 2.038$.

6.3. Operaciones con números aproximados: problema directo

12. Calcular una cota del error absoluto de $S = A + B + C - D - E$ tomando como aproximaciones respectivas $a = 3.145$, $b = 15.813$, $c = 17.24$, $d = 0.002$, $e = 5.4$, si todas ellas tienen todos sus dígitos válidos.

    Solución. $\Delta_s \leq 0.0565$.

13. Se consideran las aproximaciones $a = 2.794$ de $\sqrt{7.81}$, y $b = 2.796$ de $\sqrt{7.82}$. Dar un valor aproximado de $\sqrt{7.82} - \sqrt{7.81}$ y una cota del error relativo. Repetir el cálculo teniendo en cuenta que

$$\sqrt{7.82} - \sqrt{7.81} = \frac{0.01}{\sqrt{7.81} + \sqrt{7.82}}.$$

¿A qué se debe la diferencia en los errores de ambos procedimientos?.

Solución. $b - a = 0.002$, $\delta_{b-a} \leq 0.6$; $\delta_{b-a} \leq 2.15 \cdot 10^{-4}$.

14. Calcular el error relativo de la operación $P = \dfrac{A \cdot B}{C}$, donde $A = 3.1528 \pm 0.004$, $B = 3142.7 \pm 0.4$, y $C = 15 \pm 0.003$.

Solución. $\delta_p \leq 1.6 \cdot 10^{-3}$.

15. Hallar con todas sus cifras válidas el resultado de la operación $P = \dfrac{A \cdot B}{C}$, siendo las aproximaciones de A, B y C las siguientes: $a = 4.2073$, con $\Delta_a < 0.005$; $b = 3.421$, con $\Delta_b < 0.003$; y $c = 17.256$, con $\Delta_c < 0.008$.

Solución. $p = 0.83$.

16. Calcular con todas sus cifras válidas la intensidad $I = V/R$ de una corriente si la fuerza electromotriz V es igual a 221 ± 1 voltios y la resistencia R es igual a 809 ± 1 ohmios.

Solución. $i = 0.27$ A.

17. Un aparato eléctrico se somete a una diferencia de potencial $V = 221 \pm 0.5$ voltios. Se sabe que la intensidad de corriente que pasa por él es $I = 5.4 \pm 2 \cdot 10^{-2}$ amperios. Estimar la resistencia $R = V/I$ del aparato con todas sus cifras válidas más una de reserva, y acotar el error.

Solución. $r = 40.9\ \Omega$, $\Delta_r \leq 0.28\ \Omega$.

18. Calcular el valor de las siguientes operaciones con todas sus cifras válidas, sabiendo que todos los números que aparecen tienen todas sus cifras válidas.

   a) $s = \dfrac{h^2}{18} \cdot \dfrac{a^2 + 4a \cdot b + b^2}{(a+b)^2}$, donde $h = 2.73$, $a = 0.152$, $b = 0.328$.

   b) $s = \dfrac{\pi}{4} \cdot (a^2 - b^2)$, donde $\pi = 3.1415$, $a = 0.937$, $b = 0.063$.

Solución. *a*) $s = 0.5$; *b*) $s = 0.68$.

19. Calcular el valor numérico de los siguientes cocientes con todas sus cifras válidas y un dígito más de reserva, si todos los números tienen todas sus cifras válidas.

a) $y = \dfrac{3.07 \cdot 326}{36.4 \cdot 323}$; *b*) $y = \dfrac{36245 \cdot 85}{975 \cdot 642}$;

c) $y = \dfrac{37.2 + 458.67}{36.5 \cdot 24.6}$; *d*) $y = \dfrac{96.891 - 4.25}{33.3 + 0.426}$.

Solución. *a*) $y = 0.085$; *b*) $y = 4.92$; *c*) $y = 0.552$; *d*) $y = 2.746$.

20. Calcular el error relativo de la operación $P = \sqrt[5]{\dfrac{A \cdot B}{C}}$, donde $A = 32.15 \pm 0.008$, $B = 15.2373 \pm 0.007$, y $C = 47.20 \pm 0.06$.

    Solución. $\delta_p \leq 3.96 \cdot 10^{-4}$.

21. Calcular el error relativo de la operación $P = A\sqrt[7]{\dfrac{2B}{\sqrt{CD}}}$ si $A = 0.0283$, $B = 2.57$, $C = 27.3485$, $D = 0.34$, y todas las cifras son válidas.

    Solución. $\delta_p \leq 3.10 \cdot 10^{-3}$.

22. Calcular con la mayor aproximación posible $P = \dfrac{A\sqrt[3]{B}}{C}$, tomando como aproximaciones de A, B y C las siguientes: $a = 0.221091$, con $\Delta_a < 6 \cdot 10^{-6}$; $b = 31.44509$, con $\Delta_b < 72 \cdot 10^{-5}$; y $c = 3.214$, con $\Delta_c < 0.001$.

    Solución. $p = 0.217$.

6.4. Operaciones con números aproximados: problema inverso

23. Determinar con qué precisión deben ser tomados los datos para calcular $R = \dfrac{\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{2}}}{(\pi - e)^2}$ con un error inferior al 3 %.

    Solución. $n = 4$.

24. El período de oscilación de un péndulo de longitud ℓ es igual a $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$, donde $g = 0.980885$ decámetros por segundo al cuadrado es la aceleración de la gravedad. ¿Con qué precisión debe ser medida la longitud de un péndulo cuyo período de oscilación es, aproximadamente, de 2 segundos, y con qué exactitud deben tomarse los valores de π y de g para conocer dicho período de oscilación con un error relativo del 0.5 %? SUGERENCIA: Despejar el valor de ℓ que hace $T = 2$.

    Solución. $n = 3$.

25. Hallar con un error relativo menor que 0.002 la longitud de una circunferencia de radio $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$.

    Solución. $n = 4$, $\ell = 32.96$.

26. Al pulsar una cuerda de cobre de longitud $\ell = 0.5005$ metros, sometida a una tensión de $T = 28.40287$ kilogramos, se producen $N = 800$ vibraciones por segundo. El peso específico del cobre empleado para la construcción de la cuerda es $d = 8.87132$ kilogramos por metro cúbico, y la aceleración de la gravedad en el lugar en el que se pulsa es $g = 9.80885$ metros por segundo al cuadrado. Conocida la fórmula $R = \dfrac{1}{2\cdot\ell\cdot N}\sqrt{\dfrac{g\cdot T}{\pi\cdot d}}$, que expresa el número de vibraciones transversales en función de los datos anteriormente expuestos, se pide calcular con cuántas cifras hemos de tomar tales datos para obtener el valor del radio R de la cuerda con error relativo menor que $1/48$. Dar este valor con todas sus cifras exactas.

    Solución. $n = 3$, $r = 0.0039$ m $= 3.9$ mm.

27. Determinar con qué precisión deben ser tomados los datos para obtener una aproximación de $R = \dfrac{\sqrt{2}}{(\pi-\sqrt{5})^2}$ con un error inferior al 10 %. Dar una aproximación de R con todas sus cifras válidas más una de reserva.

    Solución. $n = 2$, $r = 1.728$.

28. Determinar el número de cifras significativas válidas con que hay que tomar los datos para obtener $R = \sqrt[3]{\dfrac{\pi+\sqrt{2}}{e^2}}$ con un error inferior al 1 %. Dar una estimación de R con todas sus cifras válidas más un dígito de reserva.

    Solución. $n = 3$, $r = 0.852$.

29. Averiguar con qué precisión deben ser tomados los datos para obtener una aproximación de $R = \sqrt[5]{\dfrac{\pi+e}{\sqrt{5}}}$ con tres cifras válidas.

    Solución. $n = 2$.

30. Obtener la aproximación más simple posible de π y e para que el error absoluto al evaluar $\sqrt{\pi\cdot e}$ sea menor o igual que una milésima.

    Solución. $n = 4$.

31. Calcular el producto $P = (1+\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{5})$ con error absoluto menor que una milésima.

    Solución. $n = 5$, $p = 21.34$.

32. Hallar con error menor que 1 decímetro cuadrado el área de un cuadrado cuya diagonal mide $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ metros.

    Solución. $n = 4$, área $= 15.5$ m^2.

33. Calcular el número de cifras válidas con que se debe tomar $\sqrt{3}$ para obtener $R = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}}$ con error absoluto menor que 0.01. Dar R con todas sus cifras válidas más un dígito de reserva.

    Solución. $n = 3$, $r = 1.929$.

34. Determinar con qué precisión deben ser tomados los datos para obtener una aproximación de $R = \dfrac{(\sqrt{3}-e)^2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ con un error absoluto menor que una milésima. Dar una aproximación de R con todas sus cifras válidas más una de reserva.

    Solución. $n = 4$, $r = 0.78976$.

35. Calcular con cuántas cifras hay que tomar π y e en $R = \dfrac{\pi \cdot e}{1.4142}$ para obtener el resultado con error absoluto menor que una centésima, si el valor aproximado del denominador tiene todas sus cifras válidas. Dar R sólo con cifras válidas y un dígito más de reserva.

    Solución. $n = 4$, $r = 6.036$.

36. Calcular con cuántas cifras válidas hay que tomar π y e para obtener $R = \sqrt{\dfrac{\pi \cdot e}{\pi + e}}$ con error absoluto menor que una milésima. Retener en el resultado sólo sus cifras significativas válidas y un dígito de reserva.

    Solución. $n = 4$, $r = 1.2071$.

37. Determinar con qué precisión han de ser tomados π y e para obtener $R = \sqrt[4]{\dfrac{\pi + e}{1.4142}}$ con un error absoluto menor que una milésima, sabiendo que el valor aproximado del denominador tiene todas sus cifras válidas. Con esta precisión en los datos, dar una aproximación de R con todas sus cifras válidas más una de reserva.

    Solución. $n = 3$, $r = 1.426$.