Probabilidad

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

1. Introducción

En la naturaleza podemos distinguir dos tipos de fenómenos:

- *Fenómenos deterministas*. Son aquellos que se rigen por alguna fórmula, de modo que siempre se puede predecir su resultado mediante la aplicación de dicha fórmula. Además, siempre que se repita el experimento en idénticas condiciones se obtendrá el mismo resultado. Ejemplo: velocidad al llegar al suelo de un cuerpo en caída libre desde una altura dada.
- *Fenómenos aleatorios*. Son aquellos cuyo resultado no se puede predecir mediante una fórmula. Además, la repetición del experimento en condiciones similares puede dar lugar a resultados muy distintos. Ejemplos: lanzar una moneda, lanzar un dado, hereditariedad de determinadas características de los progenitores, tiempo de efectividad de un medicamento.

Los fenómenos aleatorios se clasifican en *estáticos* y *dinámicos*; los primeros representan una situación real en un instante determinado, y los segundos estudian la evolución de dicha situación en el transcurso del tiempo. La herramienta matemática básica para la modelización de los fenómenos aleatorios estáticos es la variable aleatoria. El tratamiento de los fenómenos aleatorios dinámicos corresponde a la teoría de procesos estocásticos, cuyo desarrollo excede el alcance de este curso.

2. Espacio muestral y álgebra de sucesos

Al describir un experimento aleatorio es esencial precisar qué aspecto del resultado nos interesa observar, a fin de disponer de un criterio que nos permita considerar dos resultados como diferentes. Esta especificación se logra mediante la introducción del espacio muestral.

2.1. Espacio muestral y sucesos

Definición 2.1. Espacio muestral Ω *asociado a un experimento aleatorio es el conjunto formado por los posibles resultados (considerados como) diferentes del mismo.*

Un espacio muestral puede ser finito o infinito (numerable o no).

Ejemplo 2.2. *Describir los espacios muestrales asociados a distintos experimentos aleatorios.*

RESOLUCIÓN.

- Lanzar un dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- Lanzar una moneda: $\Omega = \{C, X\}$.
- Número de coches que pasan por un puente en un determinado lapso de tiempo: $\Omega = \{0,1,2,...\}$.
- Elegir al azar un número real en el intervalo $[0,1]$: $\Omega = [0,1]$.

□

En lo que sigue nos restringiremos a espacios muestrales finitos.

Definición 2.3. *Supongamos que se realiza un experimento aleatorio.*

- Suceso *del experimento aleatorio es cualquier subconjunto del espacio muestral asociado.*
- Suceso elemental *es cada uno de los elementos del espacio muestral.*
- Suceso compuesto *es cualquier unión de sucesos elementales.*

Destacamos dos sucesos especiales:

- Suceso seguro *es todo el espacio muestral,* Ω.
- Suceso imposible *es el conjunto vacío,* $\emptyset$.

Definición 2.4. *Al realizar un experimento aleatorio, diremos que* se ha verificado *o que* ha ocurrido *el suceso A, si el resultado del experimento es un elemento de A.*

Ejemplo 2.5. *Se considera el experimento aleatorio «tirar un dado». Describir el espacio muestral y dar ejemplos de sucesos.*

RESOLUCIÓN.

- Experimento aleatorio: tirar un dado.
- Espacio muestral: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- Sucesos:
  - $S_1 = \{\text{sacar par}\} = \{2,4,6\}$.
  - $S_2 = \{\text{sacar impar}\} = \{1,3,5\}$.

- $S_3 = \{\text{sacar} < 4\} = \{1,2,3\}$.
- $S_4 = \{\text{sacar negativo}\} = \emptyset$.
- $S_5 = \{\text{sacar} \leq 6\} = \Omega$.

□

2.2. Operaciones con sucesos

A fin de dotar al espacio muestral de una estructura matemática sobre la que definir una medida de la incertidumbre del fenómeno aleatorio bajo estudio, introducimos las siguientes operaciones con los sucesos.

Definición 2.6. *Sean A y B dos sucesos de un cierto experimento aleatorio.*

- Unión *de los sucesos A y B es el suceso $A \cup B$ que ocurre siempre que ocurren A, B ó ambos.*
- Intersección *de los sucesos A y B es el suceso $A \cap B$ que ocurre siempre que ocurran A y B simultáneamente.*
- Suceso complementario *o* contrario *de A es el suceso que ocurre siempre que no ocurre A; se denota A^c ó $\overline{A}$.*

Nótese que $\Omega^c = \emptyset$ y $\emptyset^c = \Omega$.

Ejemplo 2.7. *En el lanzamiento de un dado:*

- *Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,4\}$, entonces $A \cup B = \{1,2,3,4\}$.*
- *Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{2,5\}$, entonces $A \cap B = \{2\}$.*
- *Si $A = \{1,3,5\}$, entonces $A^c = \{2,4,6\}$.*

Definición 2.8. *Se dice que A* implica *(o* está contenido en*) B, y se escribe $A \subset B$, si siempre que ocurre A, ocurre B.*

Ejemplo 2.9. *En el lanzamiento de un dado, si $A = \{4\}$ y $B = \{\text{sacar par}\}$, entonces $A \subset B$.*

Definición 2.10. *Los sucesos A y B son* incompatibles *si no se pueden verificar a la vez:* $A \cap B = \emptyset$.

Definición 2.11. Diferencia *entre el suceso B y el suceso A es el suceso* $B \setminus A = B \cap A^c$, *que ocurre cuando se verifica B, pero no A.*

El siguiente ejemplo muestra que la diferencia de sucesos no es conmutativa.

Ejemplo 2.12. *En el lanzamiento de un dado, si* $A = \{4\}$ *y* $B = \{sacar\ par\}$, *entonces*

$$B \setminus A = \{2,6\}, \quad A \setminus B = \emptyset.$$

2.3. Álgebra de sucesos

Definición 2.13. *Sea $\mathscr{A}$ cualquier familia de sucesos del espacio muestral Ω que verifica los siguientes axiomas:*

i) $\Omega \in \mathscr{A}$.

ii) $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$.

iii) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$.

Se dice entonces que $\mathscr{A}$ tiene estructura de álgebra de Boole, *y la denominaremos un* álgebra de sucesos.

Ejemplo 2.14. *El conjunto de todos los sucesos de un espacio muestral es un álgebra de sucesos. Otro ejemplo de álgebra de sucesos es* $\mathscr{A} = \{\Omega, \emptyset\}$, *y, más en general,* $\mathscr{A} = \{\Omega, \emptyset, E, E^c\}$, *donde E es cualquier suceso del espacio muestral.*

Ejemplo 2.15. *En el experimento de lanzar un dado, con* $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, *sean* $A = \{sacar\ par\}$, $B = \{sacar \geq 3\}$, $C = \{sacar\ 1\ ó\ 5\}$. *Calcular* $A \cup B$, $A \cap B$, A^c, B^c, $A \setminus B$, $A \cap C$.

RESOLUCIÓN. Nótese que

$$A = \{2,4,6\}, \quad B = \{3,4,5,6\}, \quad C = \{1,5\}.$$

Ahora:

$$A \cup B = \{2,3,4,5,6\}, \qquad A^c = \{1,3,5\}, \qquad A \setminus B = \{2\},$$
$$A \cap B = \{4,6\}, \qquad B^c = \{1,2\}, \qquad A \cap C = \emptyset.$$

□

Ejemplo 2.16. *Una mujer portadora de hemofilia clásica da a luz tres hijos. Determinar el espacio muestral y los siguientes sucesos:*

$$A = \{\textit{ninguno hemofílico}\},$$
$$B = \{\textit{al menos dos hemofílicos}\}, \quad C = \{\textit{sólo dos hemofílicos}\},$$
$$D = \{\textit{al menos uno hemofílico}\}, \quad E = \{\textit{sólo uno hemofílico}\}.$$

RESOLUCIÓN. Representamos por s la ocurrencia de hemofilia y por n la no ocurrencia de la misma. Se tiene:

$$\Omega = \{sss, ssn, sns, snn, nss, nsn, nns, nnn\}, \qquad A = \{nnn\},$$
$$B = \{sss, ssn, sns, nss\}, \qquad C = \{ssn, sns, nss\},$$
$$D = \{sss, ssn, sns, snn, nss, nsn, nns\}, \qquad E = \{snn, nsn, nns\}.$$

□

3. Probabilidad

Nuestro objetivo es definir una función sobre un álgebra de sucesos que permita medir el grado de incertidumbre en la ocurrencia cada uno de ellos.

3.1. Frecuencia de un suceso

Definición 3.1. *Dado un suceso A, se define la* frecuencia absoluta *de A, n_A, como el número de veces que ocurre A en una serie de n repeticiones del experimento. El cociente*

$$f_A = \frac{n_A}{n}$$

se denomina frecuencia relativa *de A y es un indicador de la proporción de veces que ha ocurrido A en relación al número de veces que se ha repetido el experimento.*

Nótese que:

- $0 \leq f_A \leq 1$.
- $f_\Omega = 1$.
- $f_\emptyset = 0$.
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow n_{A\cup B} = n_A + n_B \Rightarrow f_{A\cup B} = \dfrac{n_{A\cup B}}{n} = \dfrac{n_A + n_B}{n} = \dfrac{n_A}{n} + \dfrac{n_B}{n} = f_A + f_B$.

La abstracción del concepto de frecuencia relativa de un suceso en una larga serie de repeticiones del experimento conduce a la definición que enunciamos a continuación.

3.2. Probabilidad

Definición 3.2. *Dado un experimento aleatorio, con espacio muestral Ω y álgebra de sucesos $\mathscr{A}$, se define la* probabilidad *como una aplicación del álgebra de sucesos $\mathscr{A}$ en el intervalo $[0,1]$ que satisface los axiomas siguientes:*

i) $P(\Omega) = 1$.

ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, *siempre que $A, B \in \mathscr{A}$ y $A \cap B = \emptyset$.*

Son consecuencia de estos axiomas las siguientes *propiedades de la probabilidad*:

- $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- $P(\emptyset) = 0$.
- $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, para cualesquiera $A, B \in \mathscr{A}$.

3.3. Ley de Laplace

Consideremos un espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, donde Ω es finito y todos los sucesos elementales son *equiprobables*: $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, con $P(\{x_i\}) = p$ $(1 \leq i \leq n)$. Como $\Omega = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup ... \cup \{x_n\}$ y los sucesos elementales son incompatibles dos a dos, sigue que

$$1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p = n \cdot p = \operatorname{card}(\Omega) \cdot p \Rightarrow p = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega)},$$

y para cualquier suceso $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$ se tiene

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\{x_{i_j}\}) = \sum_{j=1}^{k} p = k \cdot p = \operatorname{card}(A) \cdot p = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}.$$

Aquí, $\operatorname{card}(E)$ denota el *cardinal* o número de elementos del conjunto E.

En definitiva:

Teorema 3.3 (Ley de Laplace)**.** *Sea $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espacio de probabilidad, donde Ω es finito y todos los sucesos elementales son equiprobables. Para cualquier $A \in \mathscr{A}$, se tiene:*

$$P(A) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\textit{casos favorables}}{\textit{casos posibles}}.$$

Ejemplo 3.4. *Calcular la probabilidad de cada uno de los sucesos considerados en el Ejemplo 2.16.*

RESOLUCIÓN. De acuerdo con la Ley de Laplace la probabilidad de cada suceso elemental es $p = 1/8$, ya que hay 8 casos posibles, todos equiprobables. Ahora:

$A = \{nnn\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{8}$;

$B = \{sss, ssn, sns, nss\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$;

$C = \{ssn, sns, nss\} \Rightarrow P(C) = \frac{3}{8}$;

$D = \{sss, ssn, sns, snn, nss, nsn, nns\} \Rightarrow P(D) = \frac{7}{8}$;

$E = \{snn, nsn, nns\} \Rightarrow P(E) = \frac{3}{8}$. □

4. Teorema de Bayes

4.1. Probabilidad condicionada

Consideremos el experimento de lanzar un dado (espacio muestral finito con sucesos elementales equiprobables). La probabilidad del suceso $A = \{\text{sacar } 1\}$ es $P(A) = 1/6$. Si queremos calcular la probabilidad de sacar 1 conociendo la información adicional de que al realizar el experimento ha salido un número impar, el espacio muestral se ve reducido al conjunto $\{1,3,5\}$, de modo que la probabilidad de sacar 1 habiendo salido impar es de 1/3. Así pues, denotando por $B = \{\text{sacar impar}\}$, la probabilidad del suceso A condicionado a la verificación del suceso B es $P(A/B) = 1/3$.

Más en general:

Definición 4.1. *Dados dos sucesos cualesquiera $A, B \in \mathscr{A}$, con $P(B) > 0$, se define la* probabilidad del suceso A condicionada al suceso B *por*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

lo que mide la probabilidad de que ocurra el suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B.

Ejemplo 4.2. *En el lanzamiento de un dado, si $A = \{1\}$ y $B = \{\text{sacar impar}\} = \{1,3,5\}$, entonces*

$$P(A/B) = \frac{P(\{1\} \cap \{1,3,5\})}{P(\{1,3,5\})} = \frac{P(\{1\})}{P(\{1,3,5\})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}.$$

En el Ejemplo 4.2, $P(A) = 1/6 \neq 1/3 = P(A/B)$. Sin embargo, puede ocurrir que $P(A) = P(A/B)$, lo que intuitivamente parece sugerir que la realización del suceso B no aporta información sobre la ocurrencia del suceso A. Por ejemplo, si lanzamos una moneda dos veces, la probabilidad de que en el segundo lanzamiento salga cara es independiente de lo que haya resultado en el primero.

Definición 4.3. *Diremos que* dos sucesos A, B son independientes *si $P(A/B) = P(A)$. En tal caso,*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

De forma análoga, diremos que tres sucesos A, B, C son independientes *cuando se tenga:*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C),$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C),$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Observación 4.4. *Es importante tener presente que si $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ es un espacio de probabilidad, entonces también lo es $(\Omega, \mathscr{A}, P(\cdot/B))$, para cada $B \in \mathscr{A}$.*

4.2. Teorema de la Probabilidad Total

Definición 4.5. *Una familia de sucesos* $\{A_i\}_{i=1}^n$ *forman un* sistema completo *si*

i) $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

ii) $A_i \cap A_j = \emptyset \quad (1 \le i, j \le n,\ i \ne j)$.

Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ un sistema completo de sucesos, con $P(A_i) > 0$ $(1 \le i \le n)$. Para cada suceso $B \in \mathscr{A}$ se tiene

$$B = B \cap \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i),$$

y como $\{A_i\}_{i=1}^n$ son disjuntos dos a dos, resulta que $\{B \cap A_i\}_{i=1}^n$ también lo son. Surge así el siguiente resultado.

Teorema 4.6 (Teorema de la Probabilidad Total)**.** *Sea* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *un espacio de probabilidad, y sea* $\{A_i\}_{i=1}^n$ *un sistema completo de sucesos en* Ω*. Para cada* $B \in \mathscr{A}$*, se verifica:*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i).$$

Ejemplo 4.7. *Se dispone de dos urnas numeradas. La urna número 1 contiene tres bolas blancas y dos negras. La urna número 2 contiene dos bolas blancas y tres negras. Se elige una urna al azar y se extrae de ella una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?*

RESOLUCIÓN. Sean

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{elegir la urna número } 1\}, \\ A_2 &= \{\text{elegir la urna número } 2\}; \end{aligned}$$

nótese que $A_1 \cup A_2 = \Omega$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Sea también

$$B = \{\text{extraer bola blanca}\}.$$

Ya que $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$, se tiene:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) \\ &= P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2). \end{aligned}$$

Como

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}, \quad P(B/A_1) = \frac{3}{5}, \quad P(B/A_2) = \frac{2}{5},$$

concluimos:

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \right) = \frac{1}{2}.$$

□

4.3. Teorema de Bayes

Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ un sistema completo de sucesos, con $P(A_i) > 0$ $(1 \leq i \leq n)$. Supongamos que estamos interesados en conocer la probabilidad de que, ocurrido el suceso B, la causa que lo haya producido sea A_k, es decir, queremos calcular $P(A_k/B)$. En este caso interviene el teorema siguiente, debido al matemático británico Thomas Bayes (1702-1761).

Teorema 4.8 (Bayes)**.** *Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ un sistema completo de sucesos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, con $P(A_i) > 0$ $(1 \leq i \leq n)$, y sea $B \in \mathscr{A}$, con $P(B) > 0$. Se tiene:*

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B/A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B/A_i) \cdot P(A_i)}.$$

Para escribir la última igualdad, hemos aplicado en el denominador el Teorema de la Probabilidad Total (Teorema 4.6).

Ejemplo 4.9. *En el Ejemplo 4.7 supongamos que, realizada la extracción, la bola que aparece resulta ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna de la cual se haya extraído sea la número 1?*

RESOLUCIÓN. Por el Teorema de Bayes,

$$P(A_1/B) = \frac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{3}{5}.$$

□

Observación 4.10. *Los resultados estudiados en esta sección se interpretan como sigue:*

Teorema de la Probabilidad Total. *La probabilidad de un suceso B puede reconstruirse a partir de las probabilidades de los sucesos de un sistema completo y de las de B condicionadas a los sucesos de dicho sistema.*

Teorema de Bayes. *La* probabilidad a priori *de un suceso* $(P(A_k))$ *puede enriquecerse a partir de datos muestrales* $(P(B))$ *mediante la* verosimilitud $(P(B/A_k))$, *dando lugar a la* probabilidad a posteriori $(P(A_k/B))$.