Variables aleatorias

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

Universidad
de La Laguna

1. Introducción

La variable aleatoria es la herramienta matemática que permite modelizar un fenómeno incierto. La idea consiste en asociar a cada suceso un valor o un intervalo de valores reales, de manera que el problema probabilístico se traslade del álgebra de sucesos al marco, más manejable, de los números reales.

1.1. Variables aleatorias

Llamamos variables aleatorias a aquellas funciones cuyos valores dependen de los resultados de un experimento aleatorio. Más precisamente:

Definición 1.1. *Dado un espacio probabilístico* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *asociado a un experimento aleatorio, una* variable aleatoria ξ *es una función real definida sobre el espacio muestral* Ω *tal que* $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathscr{A}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Nótese que la suma, diferencia y producto de variables aleatorias, así como el cociente de dos variables aleatorias en el que el denominador no se anule, vuelven a ser variables aleatorias.

Emplearemos una notación consistente con la que sigue:

- ξ, $\xi(\omega)$ denotará una variable aleatoria.
- $P(\xi \leq x)$ será la probabilidad del suceso $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\}$.
- $P(a < \xi \leq b)$ denotará la probabilidad del suceso $\{\omega \in \Omega : a < \xi(\omega) \leq b\}$.
- ...

Ejemplo 1.2. *Son ejemplos de variables aleatorias:*

- *Número de vertidos accidentales de petróleo al año en las costas de Tenerife.*
- *Cantidad de centímetros cúbicos de un fármaco prescrita para controlar determinada enfermedad.*
- *Peso de las personas de una cierta edad.*
- *Número de niños nacidos en una determinada maternidad antes del nacimiento de los primeros gemelos siameses.*
- *En el experimento de lanzar dos veces una moneda, con espacio muestral*

$$\Omega = \{(C,C), (C,X), (X,C), (X,X)\}:$$

- $\xi(\omega) =$ *'número de caras';*
- $\xi(\omega) =$ *'1 si los dos resultados son iguales, 0 si son distintos'.*

- *En el experimento de lanzar dos dados:*
  - $\xi(\omega) =$ *'suma de los dados';*
  - $\xi(\omega) =$ *'número de pares'.*

1.2. Función de distribución

Dado que la variable aleatoria trata de ser un modelo matemático para fenómenos cuyo desarrollo es incierto, será lógico suponer que cada situación concreta que se estudie lleva asociado un conjunto de valores posibles, siendo la variable aleatoria susceptible de tomar cada uno de ellos con una cierta probabilidad. Surge así la necesidad de introducir una función que indique cómo se reparten las probabilidades entre los distintos valores de la variable. Una tal función, definida sobre la recta real, se denomina función de distribución asociada a la variable aleatoria ξ.

Definición 1.3. *La* función de distribución *asociada a la variable aleatoria ξ viene dada por la fórmula*

$$F(x) = P(\xi \leq x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Entre las propiedades de esta función destacamos las siguientes:

- $0 \leq F(x) \leq 1$ $(-\infty < x < \infty)$.
- $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
- $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$.
- $\lim_{x\to a+} F(x) = F(a)$.

2. Variables aleatorias discretas

Definición 2.1. *Una variable aleatoria* ξ *es* discreta *si el conjunto* $\{x_i\}$ *de valores que toma con probabilidad no nula es finito o infinito numerable:*

$$P(\xi = x) = \begin{cases} p_i \neq 0, & si\ x = x_i\ para\ algún\ i \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

2.1. Función de densidad

Definición 2.2. *En la notación de la Definición 2.1, se define la* función de densidad, distribución de probabilidad *o* función de probabilidad *de la variable aleatoria discreta* ξ *por:*

$$f(x) = \begin{cases} p_i, & si\ x = x_i\ para\ algún\ i \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Claramente, esta función es no negativa y tiene la propiedad de que

$$\sum_i f(x_i) = 1.$$

Ejemplo 2.3. *Determinar la función de densidad de la variable aleatoria* $\xi =$ *'número de caras' en el experimento consistente en lanzar una moneda dos veces.*

RESOLUCIÓN.

$$\begin{aligned}
&f(x) = P(\xi = x) = 0 \text{ si } x \notin \{0,1,2\}, \\
&f(0) = P(\xi = 0) = P\{\omega :\ \xi(\omega) = 0\} = P\{(X,X)\} = \frac{1}{4}, \\
&f(1) = P(\xi = 1) = P\{\omega :\ \xi(\omega) = 1\} = P\{(C,X),(X,C)\} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \\
&f(2) = P(\xi = 2) = P\{\omega :\ \xi(\omega) = 2\} = P\{(C,C)\} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.4. *Determinar la función de densidad de la variable aleatoria* $\xi =$ *'*1 *si los resultados son iguales,* 0 *si son distintos' en el experimento consistente en lanzar una moneda dos veces.*

RESOLUCIÓN.

$$f(x) = P(\xi = x) = 0 \text{ si } x \notin \{0,1\},$$

$$f(0) = P(\xi = 0) = P\{(C,X),(X,C)\} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$
$$f(1) = P(\xi = 1) = P\{(C,C),(X,X)\} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$
□

Ejemplo 2.5. *Se considera el experimento consistente en lanzar dos dados, cuyo espacio muestral es*

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

Hallar la distribución de probabilidad de la variable $\xi =$'suma de los resultados'.

RESOLUCIÓN. Nótese que $\xi(\omega) \in \{2,\ldots,12\}$. La distribución de probabilidad de esta variable es:

$f(x) = 0$ si $x \notin \{2,3,\ldots,12\}$,

$$f(2) = f(12) = \frac{1}{36}, \qquad f(3) = f(11) = \frac{1}{18},$$
$$f(4) = f(10) = \frac{1}{12}, \qquad f(5) = f(9) = \frac{1}{9},$$
$$f(6) = f(8) = \frac{5}{36}, \qquad f(7) = \frac{1}{6}.$$
□

Ejemplo 2.6. *Hallar el valor de la constante k de manera que*

$$f(x) = \frac{k}{n}(x-1)$$

sea la función de densidad de una variable aleatoria discreta susceptible de tomar los valores $1,2,\ldots,n$.

RESOLUCIÓN. Para que sea una función de densidad, $f(x)$ debe ser no negativa y verificar

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = 1.$$

La primera de estas condiciones obliga a que $k \geq 0$, y la segunda a que se tenga

$$\frac{k}{n}[0+1+2+\cdots+(n-1)] = 1.$$

De aquí, necesariamente $n \geq 2$. Por otra parte, puesto que

$$1+2+\cdots+(n-1)=(n-1)\,\frac{1+(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2},$$

se debe cumplir:

$$\frac{k}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=1.$$

Despejando la constante k en la ecuación anterior concluimos que

$$k=\frac{2}{n-1},$$

con $n \geq 2$. □

2.2. Función de distribución

La *función de distribución* $F(x)$ de una variable discreta ξ se calcula a partir de su función de densidad $f(x)$ mediante la fórmula

$$F(x)=P(\xi \leq x)=\sum_{x_i\leq x} P(\xi = x_i)=\sum_{x_i\leq x} f(x_i).$$

Ejemplo 2.7. *Se lanzan al aire tres monedas (lo que equivale a lanzar una moneda tres veces) y se considera la variable aleatoria ξ='número de caras que aparecen'. Hallar la función de distribución asociada.*

RESOLUCIÓN. En primer lugar, nótese que el espacio muestral asociado al experimento considerado es

$$\Omega=\{(\mathrm{C},\mathrm{C},\mathrm{C}),(\mathrm{C},\mathrm{C},X),(\mathrm{C},X,\mathrm{C}),(X,\mathrm{C},\mathrm{C}),(\mathrm{C},X,X),(X,\mathrm{C},X),(X,X,\mathrm{C}),(X,X,X)\},$$

con sucesos elementales equiprobables.

Por otra parte, ξ toma solamente los valores 0, 1, 2 y 3, por lo que se trata de una variable aleatoria discreta. En virtud de la Ley de Laplace, la probabilidad con que ξ toma cada uno de estos valores es:

$$P(\xi=0)=\frac{1}{8},\qquad P(\xi=1)=\frac{3}{8},$$

$$P(\xi=2)=\frac{3}{8},\qquad P(\xi=3)=\frac{1}{8}.$$

En consecuencia, la correspondiente función de densidad de probabilidad será:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{si } x = 0 \text{ ó } x = 3 \\ \frac{3}{8}, & \text{si } x = 1 \text{ ó } x = 2 \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

La función de distribución satisface:

- Si $x < 0$ entonces $F(x) = 0$.
- Si $0 \leq x < 1$ entonces $F(x) = f(0) = \frac{1}{8}$.
- Si $1 \leq x < 2$ entonces $F(x) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$.
- Si $2 \leq x < 3$ entonces $F(x) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$.
- Si $x \geq 3$ entonces $F(x) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1$.

En definitiva, la función de distribución de la variable ξ es:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8}, & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

□

La probabilidad de algunos sucesos puede ser obtenida fácilmente mediante la función de distribución:

- $P(\xi > x) = 1 - P(\xi \leq x) = 1 - F(x)$.
- $P(x_j < \xi \leq x_k) = P(\xi \leq x_k) - P(\xi \leq x_j) = F(x_k) - F(x_j)$.
- $P(\xi < x_k) = F(x_{k-1})$.
- $P(x_j \leq \xi \leq x_k) = F(x_k) - F(x_{j-1})$.

- $P(x_j < \xi < x_k) = F(x_{k-1}) - F(x_j)$.
- ....

Ejemplo 2.8. *La siguiente tabla muestra la distribución de probabilidad para la variable aleatoria ξ ='número de personas que solicitan innecesariamente los servicios de urgencias de un pequeño hospital':*

$\xi = x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(\xi = x_i)$	0.01	0.1	0.3	0.4	0.1	0.09

a) *Determinar la función de distribución.*

b) *Calcular:* $P(\xi \leq 2)$, $P(\xi < 2)$, $P(\xi > 3)$, $P(\xi \leq 6)$, $P(\xi = 3)$, $P(2 \leq \xi \leq 4)$, $P(\xi > 2)$.

RESOLUCIÓN. *a*) La función de distribución satisface:

- Si $x < 0$ entonces $F(x) = P(\xi \leq x) = 0$.
- Si $0 \leq x < 1$ entonces $F(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi = 0) = 0.01$.
- Si $1 \leq x < 2$ entonces $F(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi \leq 0) + P(\xi = 1) = 0.01 + 0.1 = 0.11$.
- Si $2 \leq x < 3$ entonces $F(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi \leq 1) + P(\xi = 2) = 0.11 + 0.3 = 0.41$.
- Si $3 \leq x < 4$ entonces $F(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi \leq 2) + P(\xi = 3) = 0.41 + 0.4 = 0.81$.
- Si $4 \leq x < 5$ entonces $F(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi \leq 3) + P(\xi = 4) = 0.81 + 0.1 = 0.91$.
- Si $x \geq 5$ entonces $F(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi \leq 4) + P(\xi = 5) = 0.91 + 0.09 = 1$.

Es decir, la función de distribución de la variable ξ es:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 0.01, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0.11, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0.41, & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0.81, & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0.91, & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1, & \text{si } x \geq 5. \end{cases}$$

b) Usando la función de distribución, las probabilidades pedidas vienen dadas por:

$P(\xi \leq 2) = F(2) = 0.41,$

$P(\xi < 2) = P(\xi \leq 1) = F(1) = 0.11,$

$P(\xi > 3) = 1 - P(\xi \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - 0.81 = 0.19,$

$P(\xi \leq 6) = F(6) = 1,$

$P(\xi = 3) = F(3) - F(2) = 0.81 - 0.41 = 0.40,$

$P(2 \leq \xi \leq 4) = F(4) - F(1) = 0.91 - 0.11 = 0.80,$

$P(\xi > 2) = 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - 0.41 = 0.59.$

□

2.3. Media o esperanza matemática

Definición 2.9. *La* media *o* esperanza matemática μ_ξ *de una variable aleatoria discreta* ξ *se define por la expresión*

$$\mu_\xi = E[\xi] = \sum_i x_i \cdot f(x_i) = \sum_i x_i \cdot P(\xi = x_i). \tag{2.1}$$

Esta definición se fundamenta en el concepto de media aritmética estudiado en el tema de Estadística Descriptiva. Recordemos que si $x_1, \ldots, x_n$ son los posibles valores de una variable estadística obtenidos en N observaciones, se define la media aritmética de dichos valores mediante

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{n_i}{N} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i, \tag{2.2}$$

donde n_i (respectivamente, f_i) denota la frecuencia absoluta (respectivamente, relativa) de x_i, para $1 \leq i \leq n$. Como la frecuencia relativa define una probabilidad sobre el espacio muestral $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$, resulta que (2.1) es una generalización natural de (2.2).

La media o esperanza matemática se interpreta como el valor esperado para la variable ξ*,* es decir, el que se obtiene por término medio al realizar el experimento.

Ejemplo 2.10. *Calcular la media de la variable aleatoria que da el número de caras en el lanzamiento de dos monedas.*

RESOLUCIÓN. Los experimentos aleatorios 'lanzar dos monedas' y 'lanzar una moneda dos veces' (Ejemplo 2.3) son equivalentes. Así pues,

$$\mu_\xi = 0 \cdot P(\xi = 0) + 1 \cdot P(\xi = 1) + 2 \cdot P(\xi = 2) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

□

2.4. Varianza y desviación típica

Definición 2.11. *La* varianza *de una variable aleatoria discreta ξ es la esperanza de la variable $(\xi - \mu_\xi)^2$:*

$$\sigma_\xi^2 = Var[\xi] = E[(\xi - \mu_\xi)^2] = E[\xi^2] - \mu_\xi^2.$$

Definición 2.12. *La* desviación típica *es la raíz cuadrada positiva de la varianza y viene dada por*

$$\sigma_\xi = \sqrt{E[(\xi - \mu_\xi)^2]} = \sqrt{E[\xi^2] - \mu_\xi^2}.$$

Respecto a la relación entre estos conceptos y sus homónimos introducidos en Estadística Descriptiva cabe hacer el mismo comentario que en el caso de la media.

Ejemplo 2.13. *Calcular la varianza y la desviación típica para la variable aleatoria del Ejemplo 2.10.*

RESOLUCIÓN. Sabemos que $\xi(\omega) \in \{0, 1, 2\}$ y que $\mu_\xi = 1$, por lo que $(\xi - \mu_\xi)(\omega) \in \{-1, 0, 1\}$ y $(\xi - \mu_\xi)^2(\omega) \in \{0, 1\}$. Ahora,

$$\begin{aligned}\sigma_\xi^2 &= 0 \cdot P((\xi - \mu_\xi)^2 = 0) + 1 \cdot P((\xi - \mu_\xi)^2 = 1) = P((\xi - \mu_\xi)^2 = 1) \\ &= P(\xi - \mu_\xi = -1) + P(\xi - \mu_\xi = 1) = P(\xi = 0) + P(\xi = 2) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

□

3. Dos modelos de variables aleatorias discretas: distribuciones binomial y de Poisson

A continuación estudiaremos dos modelos de variables aleatorias discretas de gran importancia práctica: el modelo *binomial* y el modelo de *Poisson*. Su utilidad radica en que permiten describir fenómenos físicos en casi todas las áreas de la investigación científica y social. Para cada una de ellas indicaremos qué tipo de fenómenos aleatorios modelizan, dando seguidamente su función de probabilidad, su esperanza y su varianza.

3.1. Modelo binomial

Un experimento que puede dar lugar únicamente a dos resultados: A (denominado *éxito*), con probabilidad p, y A^c (denominado *fracaso*), con probabilidad $q = 1 - p$, se denomina *prueba de Bernoulli*, y la variable aleatoria que lo representa, *modelo de Bernoulli*, en honor al matemático suizo Jacob Bernoulli (1654-1705). Esta variable depende de un único parámetro p, y asigna al éxito el valor 1 y al fracaso el valor 0. Su función de probabilidad se reduce entonces a

$$f(k) = p^k q^{1-k} \quad (k = 0, 1).$$

Una sucesión de n pruebas de Bernoulli independientes da lugar al denominado *modelo binomial*, el cual depende de dos parámetros, n y p, y se representa $B(n, p)$. Así pues:

Definición 3.1. *Decimos que ξ es una* variable aleatoria binomial con parámetros n y p, *y escribimos $\xi \sim B(n, p)$, si ξ es una variable aleatoria que representa el número total de éxitos en n pruebas de Bernoulli idénticas e independientes, con probabilidad de éxito p constante de una prueba a otra.*

Obsérvese que en el modelo binomial subyacen los cuatro supuestos generales siguientes:

1. El experimento en estudio se puede considerar compuesto por un número fijo n de pruebas idénticas.

2. El resultado de cada prueba puede calificarse como «éxito» o «fracaso».

3. El resultado de una prueba no tiene efecto sobre el de ninguna otra prueba, de modo que la probabilidad p de éxito es la misma de una prueba a otra.

4. La variable de interés es el número total de éxitos en las n pruebas.

La distribución de probabilidad (no nula) correspondiente a una variable aleatoria binomial ξ=‘número de veces que ocurre el suceso «éxito» en las n pruebas’ es la siguiente:

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, ..., n),$$

ya que los k sucesos pueden presentarse de $\binom{n}{k}$ formas en el total de n pruebas. Aquí

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

donde $0! = 1$ y $r! = r\,(r-1)\,(r-2)\cdots 1$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$.

Además, se tiene:

$$\mu_\xi = np,$$

$$\sigma_\xi^2 = npq,$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{npq}.$$

La distribución de probabilidad es simétrica si $p = q$. Si $p < q$ presenta asimetría a la derecha; si $p > q$, asimetría a la izquierda. Cuando $n \to \infty$ la distribución tiende a una distribución normal (Sección 5), que es simétrica.

Observación 3.2. *Para el cómputo de los coeficientes binomiales* $\binom{n}{k}$ *resulta útil el llamado* triángulo de Tartaglia*, cuya ley de formación es la siguiente: en una misma fila, los términos extremos valen* 1 *y cada uno de los intermedios se obtiene sumando los dos contiguos inmediatamente superiores a él.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

El valor de $\binom{n}{k}$ *se corresponde con el término que ocupa la posición* $(k+1)$*-ésima dentro de la fila* $(n+1)$*-ésima, contando de izquierda a derecha y de arriba a abajo.*

Ejemplo 3.3. *Lanzar dos veces una moneda es un experimento de Bernoulli de dos pruebas ($n = 2$), donde $A =$'C', $A^c =$'X'. Hallar la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\xi =$'número de caras'.*

RESOLUCIÓN. Se tiene:

$$\begin{aligned}
P(\xi = 0) &= \binom{2}{0} \cdot p^0 \cdot q^{2-0} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},\\
P(\xi = 1) &= \binom{2}{1} \cdot p^1 \cdot q^{2-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2},\\
P(\xi = 2) &= \binom{2}{2} \cdot p^2 \cdot q^{2-2} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Compárese con los resultados del Ejemplo 2.3. □

Ejemplo 3.4. *Un equipo de fútbol tiene $2/3$ de probabilidad de ganar cuando juega en casa. Calcular la probabilidad de que gane más de dos partidos de un total de cuatro que disputa en casa.*

RESOLUCIÓN. Consideramos la variable aleatoria

$$\xi = \text{'número de partidos ganados sobre los cuatro jugados en casa'}.$$

La probabilidad que tiene el equipo de ganar en casa, es decir, la probabilidad de éxito, es $p = 2/3$. Los resultados de los partidos son independientes entre sí. Por tanto, la variable aleatoria ξ sigue una distribución binomial de parámetros $n = 4$ y $p = 2/3$. Su función de densidad es entonces:

$$f(x) = \binom{4}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{4-x} = \binom{4}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{4-x} = \binom{4}{x} \frac{2^x}{81}.$$

La probabilidad que tiene el equipo de ganar más de dos partidos de los cuatro jugados en casa viene dada por:

$$\begin{aligned}
P(\xi > 2) &= 1 - P(\xi \leq 2)\\
&= 1 - [f(0) + f(1) + f(2)] = f(3) + f(4)\\
&= 4 \cdot \frac{2^3}{81} + \frac{2^4}{81} = (2+1)\frac{16}{81} = \frac{16}{27} \simeq 0.5926.
\end{aligned}$$

□

3.2. Modelo de Poisson

El segundo modelo discreto considerado es el de *Poisson*, llamado así en honor al matemático francés Simeon Denis Poisson (1781-1840). Las variables aleatorias de Poisson surgen en conexión con los llamados *procesos de Poisson*.

Un *proceso de Poisson con parámetro* $s > 0$ es un experimento en el cual se observa un conjunto discreto de sucesos en un intervalo continuo de tiempo o espacio, de tal modo que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Existe un intervalo de tamaño h lo suficientemente pequeño como para que:
   - la probabilidad de que el suceso ocurra únicamente una vez en cualquier intervalo de tamaño h es, aproximadamente, sh;
   - a efectos prácticos, la probabilidad de que el suceso ocurra más de una vez en cualquier intervalo de longitud h es nula.
2. El que se dé un suceso en un intervalo de longitud h no tiene influencia alguna sobre el que se dé el mismo suceso en cualquier otro intervalo de longitud h no solapado con el anterior.

La variable de interés en un modelo de Poisson se denomina *variable de Poisson*.

Definición 3.5. *Una* variable aleatoria de Poisson *es el número de veces que ocurre un suceso cuando se observa un proceso de Poisson con parámetro s en un intervalo de amplitud t.*

Obsérvese que una variable de Poisson puede tomar todos los valores enteros no negativos.

Se demuestra que la *distribución de probabilidad* de una variable aleatoria de Poisson ξ viene dada por

$$f(k) = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

donde $e = 2.71828\ldots$ y $\lambda = st$.

La notación $\xi \sim P(\lambda)$ simboliza que ξ es una variable aleatoria de Poisson con parámetro λ. Este parámetro coincide con la esperanza matemática de la variable de Poisson. En efecto, obsérvese que si h es suficientemente pequeño el suceso ocurre con probabilidad $p = sh$, ó no ocurre con probabilidad $1 - p = 1 - sh$. En tal caso la variable $\xi =$'número de ocurrencias del suceso' toma sólo los valores 0 ó 1, luego su media es

$$1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p = sh.$$

Si la media de ocurrencias en un intervalo de amplitud h es sh, la media correspondiente a un intervalo de amplitud t es $\lambda = st$. En definitiva:

$$\mu_\xi = \lambda.$$

Operando convenientemente se obtiene:

$$\sigma_\xi^2 = \lambda,$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{\lambda}.$$

Ejemplo 3.6. *Son variables de Poisson:*

- *el número de piezas defectuosas en una gran muestra tomada de un lote en que la proporción de piezas defectuosas es pequeña,*
- *el número de llamadas recibidas en una central durante un cierto tiempo,*
- *el número de partos triples por año en un país determinado,*
- *el número de átomos desintegrados por segundo en cierta cantidad de material radiactivo,*
- *el número de individuos albinos nacidos durante un año,*
- *el número de electrones emitidos por un cátodo excitado en cierto intervalo de tiempo,*
- *el número de individuos centenarios,*
- *el número de bacterias de determinada especie contenidas en un centímetro cúbico de cultivo,*
- *el número de personas que fallecen diariamente por infarto de miocardio.*

3.3. Aproximación de Poisson a la binomial

La distribución de Poisson es una buena aproximación de la distribución binomial cuando n es grande y p pequeña, ya que

$$\text{si} \quad \begin{cases} n \to \infty \\ p \to 0 \\ np \to \lambda < \infty \end{cases} \qquad \text{entonces} \qquad \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

En general, *cuando* $n > 50$ *y* $p < 0.1$*, ó bien* $np < 5$*, la distribución de Poisson* $P(np)$ *es una buena aproximación a la distribución binomial* $B(n,p)$.

La implicación práctica de este hecho es que, informalmente hablando, si un experimento responde a un modelo binomial en el que la probabilidad p de éxito en cada prueba de Bernoulli es muy pequeña y el número n de repeticiones de esta prueba es muy grande, entonces la variable

$$\xi = \text{'número de éxitos durante una gran número de pruebas'}$$

sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = np$.

El hecho de que la distribución de Poisson se encuentra en casos de probabilidad pequeña motiva su denominación de *Ley de los Casos Raros*.

Ejemplo 3.7. *La probabilidad de reacción negativa ante un fármaco de un individuo internado en un hospital es* 0.05. *Se administra dicho fármaco a cien individuos. ¿Cuál es el número de reacciones negativas esperadas? Calcular la probabilidad de que se presente reacción en:*

a) *tres individuos;*

b) *ninguno;*

c) *más de dos.*

RESOLUCIÓN. Sea la variable aleatoria

$$\xi = \text{'número de casos que presentan reacción negativa ante el fármaco de un total de 100'}.$$

Sabemos que se administra el fármaco a una población de 100 individuos de un determinado hospital, y que la probabilidad de que un individuo presente reacción negativa es $p = 0.05$. Además, las reacciones de un individuo son independientes de las de cualquier otro. Luego, la variable ξ sigue una distribución binomial de parámetros $n = 100$ y $p = 0.05$; su función de densidad es:

$$f(x) = P(\xi = x) = \binom{100}{x} \cdot 0.05^x \cdot (1 - 0.05)^{100-x} = \binom{100}{x} \cdot 0.05^x \cdot 0.95^{100-x}.$$

El número de reacciones negativas esperadas ante el fármaco en la población estudiada coincide con la media de la variable:

$$E[\xi] = np = 100 \cdot 0.05 = 5 \text{ reacciones}.$$

a) Calculemos la probabilidad de que se presente reacción negativa ante el fármaco en tres de los cien individuos:

$$\begin{aligned} P(\xi = 3) = f(3) &= \binom{100}{3} \cdot 0.05^3 \cdot 0.95^{97} = \frac{100!}{3! \cdot 97!} \cdot 0.05^3 \cdot 0.95^{97} \\ &= \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3 \cdot 2} \cdot 0.05^3 \cdot 0.95^{97} = 100 \cdot 33 \cdot 49 \cdot 0.05^3 \cdot 0.95^{97} \\ &\simeq 0.1396 \simeq 0.14. \end{aligned}$$

b) La probabilidad de que ningún individuo presente reacción negativa ante el fármaco viene dada por:

$$P(\xi = 0) = f(0) = \binom{100}{0} \cdot 0.05^0 \cdot 0.95^{100} = 0.95^{100} \simeq 0.0059 \simeq 0.01.$$

c) Obtengamos finalmente la probabilidad de que más de dos individuos presenten reacción negativa ante el fármaco:

$$\begin{aligned} P(\xi > 2) &= 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - [f(0) + f(1) + f(2)] \\ &= 1 - \left[0.0059 + \binom{100}{1} \cdot 0.05^1 \cdot 0.95^{99} + \binom{100}{2} \cdot 0.05^2 \cdot 0.95^{98}\right] \\ &\simeq 1 - (0.0059 + 0.0312 + 0.0812) = 1 - 0.1183 \\ &= 0.8817 \simeq 0.88. \end{aligned}$$

Alternativamente, nótese que al ser $n = 100$ suficientemente grande y $p = 0.05$ pequeña, el experimento anterior puede ser considerado como un proceso de Poisson donde la variable aleatoria de Poisson es

$$\xi = \text{‘número de reacciones negativas’},$$

con parámetro $\lambda = np = 100 \cdot 0.05 = 5$ y función de probabilidad

$$f(x) = P(\xi = x) = \frac{5^x}{x!} e^{-5} \quad (x \in \{0, 1, 2, \ldots\}).$$

Luego:

a) $P(\xi = 3) = f(3) = \dfrac{5^3}{3!} e^{-5} = \dfrac{125}{6} e^{-5} \simeq 0.1404 \simeq 0.14.$

b) $P(\xi = 0) = f(0) = \dfrac{5^0}{0!} e^{-5} = e^{-5} \simeq 0.0067 \simeq 0.01.$

c) Finalmente:

$$\begin{aligned}
P(\xi > 2) &= 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - [f(0) + f(1) + f(2)] \\
&= 1 - \left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} \right) e^{-5} \\
&= 1 - \left(1 + 5 + \frac{25}{2} \right) e^{-5} = 1 - \frac{37}{2} e^{-5} \simeq 0.8753 \simeq 0.88.
\end{aligned}$$

Como vemos, en los tres casos se obtiene una buena aproximación de los resultados anteriores (de hecho, coinciden si se efectúa un redondeo a dos decimales). □

4. Variables aleatorias continuas

Definición 4.1. *Una variable aleatoria ξ se dice* continua *si el conjunto de valores que toma con probabilidad no nula es infinito no numerable (esto es, un intervalo real de la forma (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,+\infty)$, o uniones de intervalos de este tipo).*

Ejemplo 4.2. *Son ejemplos de variables aleatorias continuas:*

- *El peso.*
- *La estatura.*
- *La cantidad de centímetros cúbicos de un fármaco prescrita para controlar determinada enfermedad.*

Entre las variables aleatorias continuas tienen especial interés las denominadas *absolutamente continuas*.

Definición 4.3. *Una variable aleatoria ξ se dice* absolutamente continua *si existe una función real no negativa $f(x)$, denominada* función de densidad de probabilidad *(o, simplemente,* función de densidad*), tal que:*

i) *el área encerrada entre la gráfica de esta función y el eje OX es igual a la unidad:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1;$$

ii) *si* $x_1 < x_2$ *entonces* $P(x_1 \leq \xi \leq x_2)$ *es igual al área del conjunto de ordenadas correspondiente:*

$$P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt.$$

Teniendo en cuenta la definición de función de distribución se sigue que

$$F(x) = P(\xi \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \quad (-\infty < x < \infty),$$

y, por tanto,

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (-\infty < x < \infty).$$

La probabilidad de que ξ tome un valor particular será entonces

$$P(\xi = a) = P(a \leq \xi \leq a) = \int_{a}^{a} f(t)\, dt = 0.$$

Además:

$$\begin{aligned} P(\xi > x_1) &= 1 - P(\xi \leq x_1) = 1 - F(x_1) = \int_{x_1}^{\infty} f(t)\, dt, \\ P(x_1 < \xi < x_2) &= P(x_1 < \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Observación 4.4. *Si* ξ *toma valores en el intervalo* (a,b) *entonces las integrales infinitas anteriores se reducen a integrales finitas, es decir:*

$$\int_{a}^{b} f(t)\, dt = 1,$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \leq a \\ \int_{a}^{x} f(t)\, dt, & si\ a < x < b \\ 1, & si\ b \leq x. \end{cases}$$

Observación 4.5. *Como vemos, al igual que ocurre con las variables discretas, la ley de probabilidades de una variable aleatoria continua* ξ *está definida, bien si se conoce su función de densidad* $f(x)$*, bien si se conoce su función de distribución* $F(x)$*.*

Ejemplo 4.6. *Una variable aleatoria ξ tiene función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Comprobar que f es efectivamente una función de densidad. Calcular la función de distribución de ξ y la probabilidad $P(0.25 < \xi \leq 0.75)$.

RESOLUCIÓN. La función $f(x)$ es no negativa y satisface:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 2x\, dx = [x^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Por tanto, $f(x)$ es efectivamente una función de densidad de probabilidad. La correspondiente función de distribución viene dada por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Por otra parte,

$$P(0.25 < \xi \leq 0.75) = \int_{0.25}^{0.75} f(x)\, dx = \int_{0.25}^{0.75} 2x\, dx = F(0.75) - F(0.25) = 0.5.$$

□

4.1. Media o esperanza matemática

Definición 4.7. *La* media *o* esperanza matemática *de una variable aleatoria continua ξ viene dada por la expresión*

$$\mu_\xi = E[\xi] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx, & \text{si } \xi \text{ toma valores en } (-\infty, \infty) \\ \displaystyle\int_a^b x f(x)\, dx, & \text{si } \xi \text{ toma valores en } (a,b), \end{cases}$$

supuesta en el primer caso la convergencia absoluta de la integral.

Ejemplo 4.8. *Dada una variable aleatoria continua ξ cuya función de densidad es*

$$g(x) = \begin{cases} x - \dfrac{1}{2}, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

calcular su función de distribución y su media.

RESOLUCIÓN. Se tiene:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2}, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{si } x > 2; \end{cases}$$

$$\mu_\xi = \int_1^2 x\left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{19}{12} = 1.5833.$$

□

4.2. Varianza y desviación típica

Definición 4.9. *La* varianza *de una variable aleatoria continua ξ viene dada por*

$$\sigma_\xi^2 = E[(\xi - \mu_\xi)^2] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_\xi)^2 f(x)\, dx, & \text{si } \xi \text{ toma valores en } (-\infty, \infty) \\ \displaystyle\int_a^b (x - \mu_\xi)^2 f(x)\, dx, & \text{si } \xi \text{ toma valores en } (a, b), \end{cases}$$

supuesta en el primer caso la convergencia absoluta de la integral.

Adviértase que

$$\sigma_\xi^2 = E[\xi^2] - \mu_\xi^2.$$

Definición 4.10. *La* desviación típica *es la raíz cuadrada positiva de la varianza:*

$$\sigma_\xi = \sqrt{\sigma_\xi^2} = \begin{cases} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_\xi)^2 f(x)\, dx}, & \text{si } \xi \text{ toma valores en } (-\infty, \infty) \\ \sqrt{\int_a^b (x - \mu_\xi)^2 f(x)\, dx}, & \text{si } \xi \text{ toma valores en } (a, b). \end{cases}$$

5. Un modelo de variable aleatoria continua: distribución normal

5.1. La distribución normal

A continuación vamos a estudiar el más importante de los modelos aleatorios continuos: la *distribución normal* o *de Laplace-Gauss*, llamada así en honor de los matemáticos Pierre Simon Laplace (1749-1827) y Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

La distribución normal fue descrita por primera vez en 1733 por Abraham De Moivre (1667-1754) como el valor límite de la densidad binomial cuando el número de pruebas se hace infinito. Laplace y Gauss la redescubrieron medio siglo después: ocupados ambos en el estudio de problemas de astronomía, cada uno obtuvo, por separado, la distribución normal como la que aparentemente describe el comportamiento de los errores en las medidas astronómicas.

La distribución normal es de fundamental importancia debido al gran número de fenómenos biológicos, económicos y sociales que se ajustan a ella: pesos, estaturas, coeficientes de inteligencia, puntuaciones en un examen, errores en mediciones .... De hecho, el denominado *Teorema del Límite Central*, resultado fundamental del cálculo de probabilidades, demuestra que otros muchos modelos, tanto discretos como continuos (en particular, las distribuciones binomial y de Poisson) pueden ser aproximados por el modelo normal.

Definición 5.1. *Se dice que una variable aleatoria ξ, que puede tomar cualquier valor en $(-\infty,+\infty)$, se distribuye según una* normal $N(\mu,\sigma)$ de parámetros μ y σ *cuando su función de densidad viene dada por*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

siendo μ la media y σ la desviación típica de la variable ξ. En tal caso, escribimos $\xi \sim N(\mu,\sigma)$.

Se comprueba que la función $f(x)$ así definida es realmente una función de densidad.

5.2. Campana de Gauss

La gráfica para la función de densidad de una normal recibe el nombre de *campana de Gauss* (ver Apéndice). Siguiendo técnicas de cálculo infinitesimal elemental podemos verificar las siguientes propiedades de esta curva:

- Es simétrica respecto a la recta $x = \mu$, en forma de campana (de ahí su nombre), con un máximo en $x = \mu$.

- Tiene dos puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$. La situación de estos puntos determina la forma de la campana. Cuanto mayor es el valor de σ más lejos de μ caen los puntos de inflexión y más plana es la curva.

La *función de distribución* correspondiente a una normal es:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt \quad (-\infty < x < \infty).$$

Su *media*, *varianza* y *desviación típica* son:

$$\mu_\xi = \mu, \qquad \sigma_\xi^2 = \sigma^2, \qquad \sigma_\xi = \sigma.$$

5.3. Tipificación

Hay un número infinito de variables aleatorias normales, cada una de ellas caracterizada únicamente por los parámetros μ y σ. Para calcular las probabilidades asociadas a una curva normal específica se transforma la correspondiente variable normal ξ en una normal $N(0,1)$, de parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, cuyas distribuciones de probabilidad (densidad o función de distribución) se encuentran tabuladas (ver Apéndice). Este proceso recibe el nombre de *tipificación*, y la variable resultante, que se suele representar por Z, se llama *variable aleatoria normal tipificada* o *estándar*. La transformación a realizar es el siguiente cambio lineal de variable:

$$Z = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \quad \Longleftrightarrow \quad \xi = \sigma Z + \mu.$$

Observación 5.2. *La tabla suministrada en el Apéndice proporciona los valores de la función de distribución normal tipificada. En ella sólo figuran valores no negativos de la variable y probabilidades mayores o iguales que* 0.5*. Los valores de la función de distribución tipificada para valores negativos de la variable se calculan por simetría, tal como se explica a continuación.*

5.4. Cálculo de probabilidades

Veamos cómo proceder para obtener las probabilidades de distintos sucesos que pueden ser descritos en términos de la variable aleatoria en estudio.

- *En una distribución* $Z \sim N(0,1)$ (suponemos $a, b \geq 0$):
    - $P(Z \leq a) = F(a)$: buscamos en la tabla.

- $P(Z \geq a) = P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \leq a) = F(-a) = 1 - F(a)$.
- $P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a) = F(b) - F(a)$.

Si a ó b no aparecen en la tabla se procede por interpolación lineal o por aproximación, siendo este último el procedimiento de elección en este curso.

- *En una distribución $\xi \sim N(\mu, \sigma)$:*
$P(\xi \leq a) = P(\sigma Z + \mu \leq a) = P\left(Z \leq \dfrac{a-\mu}{\sigma}\right) = F\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$.

Ejemplo 5.3. *Calcular $P(Z \leq 2.147) = F(2.147)$.*

RESOLUCIÓN. Observamos que 2.147 no figura en la tabla, así que buscamos el valor de la variable más próximo a éste, el cual resulta ser 2.15. La probabilidad correspondiente es

$$P(Z \leq 2.15) = F(2.15) = 0.9842.$$

Por tanto, aproximadamente,

$$P(Z \leq 2.147) = 0.9842.$$

□

Ejemplo 5.4. *La temperatura T al mediodía en Granada durante el mes de mayo se ajusta a un modelo normal de media 22 °C y desviación típica 6 °C. Hallar el porcentaje de días en que la temperatura está comprendida entre 16 °C y 25 °C.*

RESOLUCIÓN. La variable $T =$'temperatura al mediodía en Granada durante el mes de mayo' sigue un modelo $N(22,6)$. Para obtener el porcentaje requerido hemos de calcular $P(16 < T < 25)$. Denotando por Z la variable tipificada, tenemos que $T = 6Z + 22$; luego:

$$\begin{aligned} P(16 < T < 25) &= P(16 < 6Z + 22 < 25) = P\left(\frac{16-22}{6} < Z < \frac{25-22}{6}\right) \\ &= P(-1 < Z < 0.5) = P(Z < 0.5) - P(Z < -1) = F(0.5) - F(-1) \\ &= F(0.5) - [1 - F(1)] = 0.6915 - (1 - 0.8413) = 0.5328. \end{aligned}$$

Se concluye que la temperatura oscila entre 16 °C y 25 °C el 53.28 % de los días. □

5.5. Cálculo de valores de la variable conociendo probabilidades

Ilustramos el procedimiento mediante ejemplos, distinguiendo nuevamente entre variables tipificadas y no tipificadas.

- *En una distribución* $Z \sim N(0,1)$:

  - $P(Z \leq a) = 0.8508$. Como esta probabilidad está en la tabla, se tiene $a = 1.04$.
  - $P(Z \geq a) = 0.4840$. Puesto que

    $$P(Z \leq a) = 1 - P(Z \geq a) = 1 - 0.4840 = 0.5160$$

    y esta probabilidad está en la tabla, necesariamente $a = 0.04$.
  - $P(Z \leq a) = 0.8930$. Como esta probabilidad no está en la tabla, procedemos por aproximación. Las probabilidades que sí aparecen son

    $$P(Z \leq 1.24) = 0.8925 \qquad \text{y} \qquad P(Z \leq 1.25) = 0.8944,$$

    de las cuales 0.8925 es la más próxima a 0.8930. Por tanto, tomamos $a = 1.24$.
  - $P(Z \leq a) = 0.9950$. Esta probabilidad no está en la tabla y equidista de otras dos que sí están: $P(Z \leq a_1) = 0.9949$ y $P(Z \leq a_2) = 0.9951$, con $a_1 = 2.57$ y $a_2 = 2.58$. Como valor de la variable correspondiente a la probabilidad de interés tomamos el punto medio de a_1 y a_2: $a = 2.575$.
  - $P(Z \leq a) = 0.4840$. Esta probabilidad, que es menor que 0.5 y por lo tanto no aparece en la tabla, entraña que a es un número *negativo*. Ahora bien, si a es negativo entonces

    $$P(Z \leq a) = 1 - P(Z \leq |a|),$$

    donde $|a|$ es positivo. En tal caso:

    $$\begin{aligned} & P(Z \leq a) = 1 - P(Z \leq |a|) = 0.4840 \\ \Rightarrow\ & P(Z \leq |a|) = 0.5160 \\ \Rightarrow\ & |a| = 0.04 \\ \Rightarrow\ & a = -0.04. \end{aligned}$$

- *En una distribución* $\xi \sim N(\mu, \sigma)$:

- $P(\xi \leq a) = 0.8508 \Rightarrow P(\sigma Z + \mu \leq a) = 0.8508 \Rightarrow P\left(Z \leq \dfrac{a-\mu}{\sigma}\right) = 0.8508$. Como este valor está en la tabla, encontramos que $\dfrac{a-\mu}{\sigma} = 1.04$. Por tanto, $a = 1.04\sigma + \mu$.
- $P(\xi \leq a) = 0.8930 \Rightarrow P\left(Z \leq \dfrac{a-\mu}{\sigma}\right) = 0.8930$, que es un valor que no está en la tabla. Procediendo por aproximación, $\dfrac{a-\mu}{\sigma} = 1.24 \Rightarrow a = 1.24\sigma + \mu$.
- En general, $P(\xi \leq a) = x \Rightarrow P\left(Z \leq \dfrac{a-\mu}{\sigma}\right) = x$; si b es el valor de la variable tipificada al que le corresponde esta probabilidad según los criterios que acabamos de exponer, entonces $\dfrac{a-\mu}{\sigma} = b \Rightarrow a = b\sigma + \mu$.

5.6. Áreas notables

Las áreas más importantes por sus aplicaciones en una distribución $N(\mu,\sigma)$ son las comprendidas en el intervalo $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$. Para ellas se tiene la probabilidad siguiente:

$$\begin{aligned} P(\mu - k\sigma \leq \xi \leq \mu + k\sigma) &= P(\mu - k\sigma \leq \sigma Z + \mu \leq \mu + k\sigma) = P(-k\sigma \leq \sigma Z \leq k\sigma) \\ &= P(-k \leq Z \leq k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq -k) \\ &= P(Z \leq k) - [1 - P(Z \leq k)] = 2P(Z \leq k) - 1, \end{aligned} \tag{5.1}$$

siendo $Z \sim N(0,1)$.

Ejemplo 5.5. *Aplicando (5.1) con $k = 1$ resulta*

$$P(\mu - \sigma \leq \xi \leq \mu + \sigma) = 2P(Z \leq 1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826,$$

lo cual indica que el 68.26% de las observaciones en una distribución normal $N(\mu,\sigma)$ se encuentran en el intervalo de extremos $\mu \pm \sigma$.

Ejemplo 5.6. *Una nueva aplicación de (5.1) con $k = 3$ establece que*

$$P(\mu - 3\sigma \leq \xi \leq \mu + 3\sigma) = 2P(Z \leq 3) - 1 = 2 \cdot 0.9987 - 1 = 0.9974,$$

lo cual expresa que el 99.74% (esto es, la práctica totalidad) de las observaciones en una distribución normal $N(\mu,\sigma)$ se encuentran en el intervalo de extremos $\mu \pm 3\sigma$.

Ejemplo 5.7. *La media de las calificaciones obtenidas en un test de aptitud por los alumnos de un centro fue de* 400 *puntos, con desviación típica de* 100*. Si las calificaciones siguen una distribución normal, calcular el porcentaje de alumnos que obtuvieron calificación:*

a) *superior a* 500*;*

b) *inferior a* 300*;*

c) *entre* 300 *y* 500*.*

¿Cuál es la probabilidad de que la calificación de un alumno elegido al azar difiera de la media en menos de 150 *puntos?*

RESOLUCIÓN. Consideramos la variable aleatoria $\xi =$ 'calificaciones obtenidas en el test de aptitud'. Sabemos que la media de las calificaciones es $\mu = 400$ puntos, y la desviación típica, $\sigma = 100$ puntos. Además, las calificaciones siguen una distribución normal. Simbólicamente: $\xi \sim N(400, 100)$.

Ya que $\mu - \sigma = 400 - 100 = 300$ y $\mu + \sigma = 400 + 100 = 500$, como consecuencia inmediata del Ejemplo 5.5 encontramos que $P(300 \leq \xi \leq 500) = 0.6826$. Por tanto, el porcentaje de alumnos que obtuvieron una calificación comprendida entre 300 y 500 puntos (apartado *c*)) es del 68.26 %.

Ahora, razones de simetría y complementación entrañan que

$$P(\xi < 300) = P(\xi > 500) = \frac{1 - 0.6826}{2} = 0.1587,$$

lo que da respuesta a los apartados *a*) y *b*): el porcentaje de alumnos con calificación inferior a 300 puntos coincide con el de aquellos alumnos con calificación superior a 500, y es del 15.87 %.

Finalmente, para determinar la probabilidad de que la calificación de un alumno elegido aleatoriamente difiera de la media en menos de 150 puntos partimos de la relación (5.1). Al imponer que $k\sigma = 100k = 150$ encontramos que $k = 1.5$, de donde resulta la probabilidad pedida:

$$P(-150 < \xi - 400 < 150) = 2P(Z \leq 1.5) - 1 = 2 \cdot 0.9332 - 1 = 0.8664.$$

□

5.7. Intervalos simétricos respecto a la media que concentran determinados porcentajes de observaciones

Otra cuestión de interés es saber en qué intervalo simétrico respecto de la media se encuentra cierto porcentaje de las observaciones. Veremos cómo abordarla con un nuevo ejemplo.

Ejemplo 5.8. *¿Qué intervalo simétrico respecto a la media contiene el 50% de las observaciones en una distribución normal $N(\mu,\sigma)$?*

RESOLUCIÓN. Nótese que, aplicando (5.1),

$$P(\mu - k\sigma \leq \xi \leq \mu + k\sigma) = 0.5 \quad \Rightarrow \quad 2P(Z \leq k) - 1 = 0.5 \quad \Rightarrow \quad P(Z \leq k) = \frac{1.5}{2} = 0.7500.$$

Al inspeccionar la tabla encontramos que $P(Z \leq 0.67) = 0.7486$ y $P(Z \leq 0.68) = 0.7517$; por aproximación, tomamos $k = 0.67$. Se concluye que el intervalo buscado es $(\mu - 0.67\sigma, \mu + 0.67\sigma)$. □

5.8. Aproximación normal a las distribuciones binomial y de Poisson

Introduciendo la oportuna corrección por continuidad, las distribuciones binomial y de Poisson pueden ser aproximadas por una distribución normal con la misma media y desviación típica.

5.8.1. Aproximación normal a la distribución binomial

El resultado que permite esta aproximación es el *Teorema de De Moivre*.

Teorema 5.9 (De Moivre). *Una distribución binomial $X \sim B(n,p)$ es aproximadamente una distribución normal ξ con media np y desviación típica $\sqrt{np(1-p)}$.*

En general, esta aproximación es aceptable si

$$n \text{ es grande y } p \simeq 0.5$$

ó

$$np(1-p) > 5.$$

Ejemplo 5.10. *Sea $X \sim B(30, 0.4)$. Calcular $P(X \leq 3)$.*

RESOLUCIÓN. Procediendo como una binomial,

$$P(X \leq 3) = \binom{30}{3} \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^{27} \simeq 0.0003 \simeq 0.$$

Si ahora interpretamos X como una $N(30 \cdot 0.4, \sqrt{30 \cdot 0.4 \cdot 0.6}) = N(12, 2.68)$, que denotaremos ξ, entonces, introduciendo la corrección de continuidad, encontramos que:

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) \simeq P(\xi \leq 3.5) = P\left(Z \leq \frac{3.5 - 12}{2.68}\right) = P(Z \leq -3.17) \\ = 1 - P(Z \leq 3.17) = 1 - 0.9992 = 0.0008 \simeq 0. \end{aligned}$$

□

5.8.2. Aproximación normal a la distribución de Poisson

Teorema 5.11. *Un modelo de Poisson $P(\lambda)$, con $\lambda > 5$, puede ser aproximado por un modelo normal de parámetros $\mu = \lambda$, $\sigma = \sqrt{\lambda}$.*

Ejemplo 5.12. *En una carretera construida por cierta empresa se observa que cada 20 kilómetros en promedio aparece un defecto grave. Calcular la probabilidad de que haya 6 defectos graves a lo largo de 200 kilómetros de carretera construida.*

RESOLUCIÓN. Sea X =‘número de defectos graves en 200 km de carretera’. Nótese que $X \sim P(\lambda)$, donde $\lambda = 200/20 = 10$. Luego:

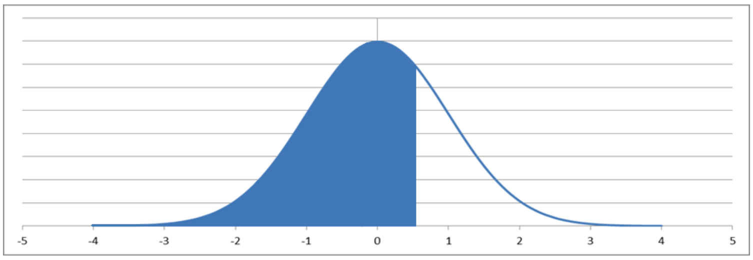
$$P(X = 6) = \frac{10^6}{6!} e^{-10} \simeq 0.0630 \simeq 0.06.$$

Por otra parte, denotando $\xi \sim N(10, \sqrt{10})$ y aplicando la corrección de continuidad, resulta:

$$\begin{aligned} P(X = 6) \simeq P(5.5 < \xi < 6.5) = P\left(\frac{5.5 - 10}{\sqrt{10}} < Z < \frac{6.5 - 10}{\sqrt{10}}\right) = P(-1.42 < Z < -1.11) \\ = P(1.11 < Z < 1.42) = P(Z \leq 1.42) - P(Z \leq 1.11) \\ = 0.9222 - 0.8665 = 0.0557 \simeq 0.06. \end{aligned}$$

□

Apéndice: Tabla de la distribución normal tipificada $N(0,1)$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7258	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7518	0.7549
0.7	0.7580	0.7612	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7996	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Figura 5.1. Distribución normal tipificada $N(0,1)$: $F(a) = P(Z \leq a)$.