

Probabilidad: problemas propuestos

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)

DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)

MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)

M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)

ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

6. Problemas propuestos	1
6.1. Probabilidad	1
6.2. Teorema de Bayes	4

ULL

Universidad
de La Laguna



6. Problemas propuestos

6.1. Probabilidad

1. Un tetrapéptido bioactivo (compuesto formado por cuatro aminoácidos ligados en cadena) tiene la siguiente dotación de aminoácidos: a = alamina, g = ácido glutámico, l = lisina, h = histidina.

a) Determinar el espacio muestral de todas las cadenas posibles de cuatro aminoácidos en base a los compuestos citados.

b) Determinar los sucesos siguientes:

$A = \{ \text{el ácido glutámico se encuentra en uno de los extremos de la cadena} \}$,

$B = \{ \text{la lisina se encuentra en el extremo izquierdo de la cadena} \}$.

c) Si suponemos que cada uno de los elementos son equiprobables, calcular $P(A)$ y $P(B)$.

Solución. a) El espacio muestral consta de:

$(a, g, l, h), (a, g, h, l), (a, l, g, h), (a, l, h, g), (a, h, l, g), (a, h, g, l),$

$(g, a, l, h), (g, a, h, l), (g, l, a, h), (g, l, h, a), (g, h, a, l), (g, h, l, a),$

$(l, a, g, h), (l, a, h, g), (l, g, a, h), (l, g, h, a), (l, h, a, g), (l, h, g, a),$

$(h, a, g, l), (h, a, l, g), (h, l, a, g), (h, l, g, a), (h, g, a, l), (h, g, l, a);$

b) A consta de:

$(g, a, l, h), (g, a, h, l), (g, l, a, h), (g, l, h, a), (g, h, a, l), (g, h, l, a),$

$(a, l, h, g), (a, h, l, g), (l, a, h, g), (l, h, a, g), (h, a, l, g), (h, l, a, g);$

B consta de:

$(l, a, g, h), (l, a, h, g), (l, g, a, h), (l, g, h, a), (l, h, a, g), (l, h, g, a);$

c) $P(A) = 1/2, P(B) = 1/4$.

2. El código DNA-RNA es un código molecular en el que el orden secuencial de las moléculas proporciona una información genética importante. Cada segmento del RNA está compuesto por «palabras»; cada palabra es específica para un determinado aminoácido, y está formada por una cadena de tres ribonu-

cleótidos, no necesariamente distintos. Estos ribonucleótidos son: a = adenina, u = uracilo, g = guanina, c = citosina.

- a) Consideremos el experimento consistente en formar una palabra de RNA. ¿Cuántas palabras pueden formarse?
- b) ¿Cuántas palabras tienen al menos dos nucleótidos idénticos?
- c) Si se forma una palabra aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que contenga alguna repetición de nucleótidos?
- d) Consideremos el suceso B , compuesto por palabras formadas aleatoriamente que terminen en u y que no contengan repeticiones. Hallar $P(B)$.
- e) ¿Cuántas palabras RNA que empiecen con u y terminen con a ó g pueden formarse? ¿Cuántas de estas palabras no contienen ninguna repetición?
- f) Una palabra es código para la treonina, si y sólo si, empieza por ac . ¿Cuántos sinónimos existen para la treonina?

Solución. a) 64; b) 40; c) 5/8; d) 3/32; e) 8, 4; f) 4.

3. Un médico puede elegir entre cinco fármacos diferentes, dos de los cuales son experimentales, para tratar a un paciente afectado de hipertensión arterial. También puede optar por uno de entre cuatro programas, de los que dos implican el desarrollo de actividades domiciliarias y los otros dos son relativos a actividades externas. Hay tres dietas posibles, una de ellas totalmente desprovista de sal.

- a) ¿Cuántos tratamientos formados por un fármaco, un programa y una dieta son posibles?
- b) ¿Cuántos tratamientos implican el uso de un fármaco experimental?
- c) Suponiendo que todos los tratamientos tienen la misma posibilidad de ser elegidos, determinar la probabilidad de que el tratamiento elegido implique el uso de un fármaco experimental y un programa de actividades externas.
- d) Si se da el hecho de que un determinado fármaco de entre los de carácter experimental es peligroso cuando se combina con una dieta sin sal, determinar la probabilidad de que sea prescrito uno de estos tratamientos.

Solución. a) 60; b) 24; c) 1/5; d) 1/15.

4. Estudios sobre la depresión muestran que la aplicación de un determinado tratamiento mejora el estado del 72% de las personas sobre las que se aplica, no produce efecto alguno en un 10% y empeora el estado del resto. Si se trata un paciente que sufre de depresión, determinar la probabilidad de que empeore. Calcular también la probabilidad de que el tratamiento no vaya en detrimento de su estado.

Solución. 0.18; 0.82.

5. Si a ratones de una cierta raza suiza se les suministra 1 miligramo de cierto compuesto por kilogramo de peso muere el 50% de los animales (una dosis que mata a un 50% de los animales puestos a prueba se conoce como la LD_{50} del fármaco o veneno), mientras que el 40% de los animales tratados, supervivientes o no, quedan cianóticos (su piel adquiere un tono azulado indicativo de una inadecuada oxigenación en la sangre). Una cuarta parte de los animales muere y muestra una evidente cianosis. ¿Cuál es la probabilidad de que un animal al que se le ha administrado el compuesto muera o quede cianótico? ¿Cuál es la probabilidad de que un animal al que se le ha administrado el compuesto viva y esté cianótico?

Solución. 0.65; 0.15.

6. Se estima que el 15% de la población adulta padece de hipertensión, pero que el 75% de todos los adultos creen no tener este problema. Se estima también que el 6% de la población tiene hipertensión aunque no es consciente de padecerla. Si un paciente adulto opina que no tiene hipertensión, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea hipertenso?

Solución. 0.012.

7. Cierta análisis clínico tiene una probabilidad de 0.5 de dar positivo en individuos con determinada enfermedad. Si a un paciente con tal enfermedad se le realizan tres análisis, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los análisis sea positivo?

Solución. 0.875.

8. Dos tratamientos A y B curan una determinada enfermedad en un 20% y en un 30% de los casos, respectivamente. Suponiendo que ambos actúan de modo independiente, ¿cuál de las dos estrategias siguientes es mejor?:

a) Aplicar ambos tratamientos a la vez.

b) Aplicar primero el tratamiento B , y si no surte efecto aplicar el tratamiento A .

Solución. a).

9. El 4% de las personas de una población son daltónicos, el 18% hipertensos, y el 0.5% daltónicos e hipertensos. ¿Cuál es la probabilidad de ser daltónico o hipertenso?

Solución. 0.215.

10. Se consideran familias con dos hijos, y se supone que las cuatro posibles composiciones por sexo: VV , VH , HV , HH , son igualmente probables. Se pide:

- Probabilidad de que una familia tenga un niño y una niña.
- Probabilidad de que tenga como máximo una niña.
- ¿Son independientes los sucesos anteriores?
- Probabilidad de que una familia tenga exactamente dos niñas.
- Responder a los apartados anteriores en el caso de que las familias consideradas tengan tres hijos y las ocho posibles composiciones por sexo sean equiprobables.

Solución. a) $1/2$; b) $3/4$; c) no; d) $1/4$; e) $3/4$, $1/2$, sí, $3/8$.

11. Un científico durante sucesivos experimentos intenta aislar un virus con una probabilidad de éxito de 0.2.

- ¿Cuál es la probabilidad de que en el tercer experimento aísle el virus por primera vez?
- Si sus recursos no le permiten sino la realización de tres experimentos, ¿cuál es la probabilidad de que aísle el virus al menos una vez?

Solución. a) 0.128; b) 0.488.

6.2. Teorema de Bayes

12. Al analizar la normalidad de los valores de las transaminasas de cierta población infantil se obtiene la siguiente tabla. Calcular las probabilidades de algunos sucesos posibles.

	niños	niñas	total
total	160	140	300
anormal	3	2	5

Solución.

$$\begin{aligned}
 P(\text{niño}) &= 0.533; & P(\text{niña}) &= 0.467; \\
 P(\text{normal}) &= 0.983; & P(\text{anormal}) &= 0.017; \\
 P(\text{niño/anormal}) &= 0.600; & P(\text{niña/anormal}) &= 0.400; \\
 P(\text{niño y anormal}) &= 0.010; & P(\text{niña y anormal}) &= 0.007; \\
 P(\text{niño y normal}) &= 0.523; & P(\text{niña y normal}) &= 0.460; \\
 P(\text{anormal/niño}) &= 0.019; & P(\text{anormal/niña}) &= 0.014; \\
 P(\text{niño/normal}) &= 0.532; & P(\text{niña/normal}) &= 0.468; \\
 P(\text{normal/niño}) &= 0.981; & P(\text{normal/niña}) &= 0.986.
 \end{aligned}$$

13. La siguiente tabla de mortalidad indica el número de supervivientes a varias edades, desde el nacimiento, de un grupo de 100000 españoles:

edad	supervivientes
0	100000
10	96403
20	94682
30	92116
40	88376
50	82427
60	69516
70	48712
80	19832
90	2612
100	60

Se pide:

- Estimar la probabilidad de que un recién nacido alcance los 60 años de edad.
- Estimar la probabilidad de que una persona de 20 años viva hasta los 50.

Solución. a) 0.695; b) 0.871.

14. Supongamos que 5 hombres de cada 100 y 25 mujeres de cada 10000 sufren daltonismo. Se elige aleatoriamente una persona daltónica. Suponiendo que una persona es hombre o mujer con igual probabilidad, ¿cuál es la probabilidad de que el daltónico elegido sea hombre?

Solución. 0.95.

15. Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus A , B , C . En un laboratorio se tienen tres tubos con el virus A , dos con el B y cinco con el C . La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es $1/3$, que la produzca B es $2/3$ y que la produzca C es $1/7$. Si se inocula algún virus a un animal, ¿cuál es la probabilidad de que éste contraiga la enfermedad? Si se inocula un virus a un animal y contrae la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que el virus que se ha inyectado fuera C ?

Solución. 0.305; 0.234.

16. En química clínica son particularmente interesantes los llamados *coeficientes falso-positivo* y *falso-negativo* de un test. Tales coeficientes son probabilidades condicionadas. El coeficiente falso-positivo es la probabilidad de que el contraste resulte positivo cuando de hecho el sujeto no padece la dolencia. El coeficiente falso-negativo se define de manera análoga. Es decir:

$$\alpha = \text{coeficiente falso-positivo} = P(\text{el test da } + / \text{ el sujeto es en realidad } -),$$

$$\beta = \text{coeficiente falso-negativo} = P(\text{el test da } - / \text{ el sujeto es en realidad } +).$$

Cada una de estas probabilidades es una probabilidad de error; por tanto, cabe esperar que los valores obtenidos en la práctica sean próximos a cero. Los resultados siguientes se obtuvieron en un estudio diseñado con el fin de averiguar la capacidad de un cirujano patólogo para clasificar correctamente las biopsias quirúrgicas como malignas o benignas. Determinar α y β a partir de estos datos.

	<i>positivo</i> (MALIGNO)	<i>negativo</i> (BENIGNO)
CIERTO MALIGNO	79	19
CIERTO BENIGNO	7	395

Solución. $\alpha = 0.017$, $\beta = 0.194$.

17. Se sometió a un centenar de pacientes y a setenta y cinco sujetos normales a un test de diagnóstico de la orina. En un sesenta por ciento de los casos el diagnóstico fue positivo. Hubo también ocho falsos-negativos. ¿Cuál es el coeficiente falso-positivo?

Solución. 0.17.

18. Una muestra de suelo contiene tres clases de bacterias A , B y C en proporciones del 10%, 30% y 60%, respectivamente. Las de clase A reaccionan con sulfato en un 80%, las de B en un 60% y las de C en un 40%.

a) Calcular la probabilidad de que una bacteria, aislada de esta muestra, reaccione con sulfato.

- b) Si una bacteria ha sido aislada y se ha comprobado que no reacciona con sulfato, ¿a qué clase es más probable que pertenezca?

Solución. a) 0.5; b) C.

19. Un test detecta la presencia de cierto tipo T de bacterias en el agua con probabilidad 0.9, en caso de haberlas. Si no las hay, detecta la ausencia con probabilidad de 0.8. Sabiendo que la probabilidad de que una muestra de agua contenga bacterias del tipo T es 0.2, calcular la probabilidad de que:

- a) Realmente haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado positivo.
b) Realmente haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado negativo.
c) Haya bacterias y además el test dé positivo.
d) O haya bacterias, o el test dé positivo.

Solución. a) 0.53; b) 0.03; c) 0.18; d) 0.36.

20. Elegido un individuo al azar y observado por rayos X se diagnosticó que padecía tuberculosis. En la población donde fue seleccionado el individuo la probabilidad de que éste sea tuberculoso es 0.01. Por otra parte, la probabilidad de que un aparato de rayos X detecte que un individuo es tuberculoso siéndolo es de 0.97 y no siéndolo es 0.001.

- a) Calcular la probabilidad de que los rayos X diagnostiquen la dolencia en una persona.
b) Calcular la probabilidad de que un paciente diagnosticado por rayos X como tuberculoso realmente padezca la enfermedad.

Solución. a) 0.01; b) 0.91.

21. Se propone una prueba para diagnosticar un tipo particular de cáncer en las mujeres mayores de 40 años. Se sabe que un 1% de tales mujeres sufren de este tipo de cáncer. La prueba se ha ensayado en mujeres de más de 40 años con la enfermedad confirmada, encontrándose positiva en el 95% de los casos. Asimismo se ensayó en mujeres reconocidas como sanas, dando un 3% de resultados positivos. Se desea calcular:

- a) La probabilidad de que cuando el test dé negativo la mujer realmente sufra la enfermedad.
b) La probabilidad de que no tenga la enfermedad y dé negativo.

Solución. a) 0; b) 0.96.

22. En una campaña de erradicación de tuberculosis se somete a la población escolar a una prueba de tuberculina. Se sabe que la probabilidad de acierto sobre personas confirmadas enfermas es del 96% y la probabilidad de que el test falle con personas confirmadas sanas es del 5%. Se sabe también que la dolencia la padece el 0.1% de la población. Se pide:
- Determinar la probabilidad de que el test detecte correctamente la presencia de la enfermedad.
 - Determinar la probabilidad de que el test detecte correctamente que la persona está sana.
 - ¿Cuáles son los coeficientes falso-positivo y falso-negativo del test?

Solución. a) 0.02; b) 1; c) $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.04$.

23. Se sabe que un 12% de los cuadros depresivos en mujeres mayores de 40 años son debidos a procesos hormonales estrechamente ligados con la menopausia. Para tratar este tipo de depresión ha sido recomendado un determinado antidepresivo. Sobre pacientes con la enfermedad confirmada el medicamento ha causado mejoría en un 80% de los casos. Por el contrario, sobre mujeres que no la padecían el medicamento sólo produjo mejoría en un 15% de los casos.
- Determinar la probabilidad de que, habiendo mejorado el estado de la paciente tras administrarle el medicamento, realmente padeciese el tipo de depresión comentado.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que una paciente no experimente mejoría tras la ingestión del medicamento?

Solución. a) 0.42; b) 0.77.

24. En un hospital especializado ingresan un promedio del 50% de enfermos con afección en el pulmón, 30% con afección en el corazón, y 20% con afección estomacal. La probabilidad de curación completa de la afección de pulmón es igual a 0.7; para las enfermedades del corazón y estomacales estas probabilidades son 0.8 y 0.9, respectivamente.
- Hallar la probabilidad de que un paciente que entre en este hospital no se cure.
 - Si un enfermo internado en el hospital fue dado de alta sano, hallar la probabilidad de que este enfermo sufriera una afección pulmonar.

Solución. a) 0.23; b) 0.45.

25. Un test para la detección de un tipo de anemias infantiles tiene un coeficiente falso-positivo de 0.02 y un coeficiente falso-negativo de 0.05. Si se sabe que el 35% de los niños padece este tipo de anemias,

se pide determinar la probabilidad de que un niño diagnosticado por el test como sano esté en realidad anémico.

Solución. 0.03.

26. Un centro de salud utiliza dos tests distintos para certificar embarazos. La probabilidad de que se use el Test 1 es de 0.55. Aplicado el Test 1, la probabilidad de certificar el embarazo es de 0.9. Si aplicamos el Test 2, la probabilidad de certificarlo es de 0.98. Si se sabe que una mujer ha sido considerada como embarazada, hallar la probabilidad de que haya sido analizada con el Test 2.

Solución. 0.47.

27. El test de la hepatitis-B sirvió en un primer momento como test del SIDA. Su efectividad era del 80% sobre personas infectadas y del 70% sobre personas confirmadas como sanas. Si en una población africana de alto riesgo se ha determinado que la probabilidad de padecer la enfermedad es de 0.1, se pide calcular la probabilidad de que un resultado positivo del test implique realmente que se padece la enfermedad.

Solución. 0.23.

28. Un test de rubeola para adolescentes tiene un coeficiente falso-positivo igual a 0.2 y un coeficiente falso-negativo igual a 0.1. Si se sabe que el 15% de la población femenina adolescente padece esta enfermedad, se pide determinar la probabilidad de que una paciente que haya dado positivo en el test realmente la padezca.

Solución. 0.44.

29. En el almacén de cierto hipermercado se mantiene un stock de botes de crema de belleza elaborados por dos fábricas A y B ; el 70% proviene de A y el resto de B . De los botes que produce la fábrica A , el 15% presenta algún defecto de etiquetado o cierre; y entre los producidos por la fábrica B , es el 20% el que tiene algún defecto.

a) ¿Cuál es el porcentaje de botes del stock que puede ser vendido al consumidor?

b) Se ha encontrado un bote defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido en la fábrica B ?

Solución. a) 83.5%; b) 0.4.

30. En la planta de medicina interna de un hospital ingresan por término medio un 50% de enfermos de hígado, un 35% de enfermos de intestino y un 15% con dolencias estomacales. La probabilidad de

curación completa de cada una de estas enfermedades es respectivamente de 0.6, 0.8 y 0.9. Un enfermo internado en esta planta del hospital ha sido dado de alta completamente sano. Hallar la probabilidad de que el enfermo ingresara con una dolencia hepática.

Solución. 0.42.

31. En la enfermera del doctor Martínez no se puede confiar, pues durante la ausencia del médico la probabilidad de que no le inyecte un suero a un enfermo es de 0.6. Se sabe que si a un enfermo grave se le inyecta el suero tiene igual probabilidad de mejorar que de empeorar, pero si no se le inyecta entonces la probabilidad de que mejore es de 0.25. A su regreso, el Dr. Martínez se encuentra con que un enfermo ha empeorado. ¿Cuál es la probabilidad de que la enfermera olvidara inyectar el suero a este paciente?

Solución. 0.69.

32. Las estadísticas indican que en EEUU la probabilidad de que una madre de raza blanca muera durante el parto es de 0.00017, mientras que si es de raza negra esta probabilidad aumenta hasta 0.00064. Si suponemos que el 10% de los partos corresponden a mujeres negras, ¿cuál es la probabilidad de que una mujer que muere en el parto sea blanca?

Solución. 0.71.