Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

1. Introducción y conceptos básicos **1**

2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden **2**

2.1. Ecuaciones con variables separadas 4
2.2. Ecuaciones diferenciales homogéneas 6
2.3. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden 8
2.4. Ecuaciones diferenciales exactas 9

3. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden **12**

3.1. Aplicaciones geométricas 12
3.2. Problemas de desintegración radiactiva 14
3.3. Problemas de crecimiento poblacional 16
3.4. Problemas de reacciones químicas 19
3.5. Problemas de mezclas 22
3.6. Problemas de temperatura 25
3.7. Caída de un cuerpo en un medio resistente 27

1. Introducción y conceptos básicos

Definición 1.1. *Una* ecuación diferencial *es aquella que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.*

Ejemplo 1.2. *Son ecuaciones diferenciales:*

$$\frac{dy}{dx} + 5xy = e^x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0,$$

ya que además de la variable independiente x y de la función $y = y(x)$, está presente la derivada primera de ésta, $y'(x)$.

Observación 1.3. *Nótese que la propia ecuación diferencial determina claramente cuál es la variable independiente y cuál la función incógnita.*

Ejemplo 1.4. *En la ecuación diferencial*

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

la variable independiente es t, y las funciones incógnitas, $x(t)$ e $y(t)$.

Definición 1.5. *El* orden *de una ecuación diferencial es el mayor de los órdenes de las derivadas que comparecen en la ecuación.*

Ejemplo 1.6. *La ecuación diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

es de segundo orden. La ecuación diferencial

$$xy'' - e^x y''' + 4\sin xy' = \operatorname{tg} x$$

es de tercer orden.

Definición 1.7. *Una ecuación diferencial se dice* ordinaria *cuando la función incógnita sólo depende de una variable independiente. En contraposición, en las ecuaciones* en derivadas parciales *la función incógnita depende de varias variables independientes.*

Ejemplo 1.8. *Las ecuaciones de los Ejemplos 1.2, 1.4 y 1.6 son ecuaciones diferenciales ordinarias.*

2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

A veces las ecuaciones diferenciales de primer orden se escriben en la forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

Por ejemplo, si suponemos que y representa la variable dependiente en $(y-x)\,dx + 4x\,dy = 0$ entonces $y' = dy/dx$, y al «dividir» ambos miembros de la ecuación por dx obtenemos la expresión equivalente $4xy' + y = x$.

Definición 2.1. *En general, una ecuación diferencial de primer orden adopta la forma*

$$F(x,y,y') = 0, \quad \text{o bien} \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

donde, en ambos casos, $y = y(x)$. La primera de las ecuaciones anteriores denota una ecuación diferencial en forma implícita*, mientras que la segunda se dice que está en forma* explícita.

Observación 2.2. *En las aplicaciones es habitual considerar como variable independiente t en lugar de x. Así, las ecuaciones anteriores toman la forma*

$$F(t,x,x') = 0, \quad \text{o bien} \quad \frac{dx}{dt} = f(t,x),$$

donde $x = x(t)$.

Definición 2.3. *Se llama* solución de una ecuación diferencial de primer orden *a una función derivable con derivada continua, que al ser sustituida en la ecuación*

$$F(x,y,y') = 0, \quad \text{o bien} \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

la convierte en una identidad.

Ejemplo 2.4. *Comprobar que $y = x^4/16$ es una solución de $y' = x\sqrt{y}$.*

RESOLUCIÓN. En efecto:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{4} = x\,\frac{x^2}{4} = x\sqrt{\frac{x^4}{16}} = x\sqrt{y}.$$

□

Definición 2.5. *Se denomina* problema de valores iniciales *al problema*

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \textit{(forma implícita)}$$

o bien

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \textit{(forma explícita),}$$

cuyo objetivo es hallar una solución de la ecuación diferencial que verifique una determinada condición, en este caso que la función $y(x)$ valga y_0 en $x = x_0$.

Geométricamente, en un problema de valores iniciales se trata de hallar una curva plana que satisfaga la ecuación diferencial considerada y que además pase por el punto (x_0, y_0). Físicamente, el problema consiste en determinar la trayectoria descrita por un móvil cuyo movimiento viene modelizado por la ecuación dada y cuya posición inicial es conocida (de ahí su denominación), esto es, sabiendo que en el instante t_0, el móvil está en el punto x_0.

Observación 2.6. *Bajo ciertas hipótesis, los problemas de valores iniciales admiten solución única.*

Definición 2.7. *La* solución general de una ecuación diferencial ordinaria *es una expresión que proporciona todas las posibles soluciones de la misma. Si la ecuación diferencial es de primer orden, la solución general depende de una constante arbitraria. Precisamente, dando valores a esa constante se van obteniendo las diferentes soluciones, conocidas como* soluciones particulares.

Ejemplo 2.8. *Resolver el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

RESOLUCIÓN. La ecuación diferencial $y' = y$ tiene como solución general la familia de funciones $y = Ce^x$, donde C es una constante arbitraria. La curva que verifica que $y(0) = 3$, es decir, que pasa por el punto $(0,3)$, es $y = 3e^x$. Si cambiamos las condiciones iniciales exigiendo, por ejemplo, que $y(1) = -2$, estaremos buscando la curva de la familia que pasa por el punto $(1,-2)$. Esta curva no es otra que la que se obtiene para $C = -2e^{-1}$, con lo cual $y = -2e^{x-1}$. □

Las ecuaciones diferenciales poseen una extraordinaria importancia en las aplicaciones en todos los campos científico-tecnológicos, porque surgen de forma natural al modelizar problemas que se presentan en el mundo real. En este tema nos limitaremos a estudiar las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que son las que comparecen con mayor frecuencia en tales aplicaciones.

2.1. Ecuaciones con variables separadas

En el caso más simple de la ecuación $dy/dx = f(x)$, es fácil obtener la solución mediante integración indefinida:

$$y = \int f(x)\,dx + C.$$

Esta expresión contiene una constante arbitraria que se puede calcular si se conoce el valor $y(x_0) = y_0$, con lo que queda

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

Definición 2.9. *Las ecuaciones* separables *o* de variables separadas *son ecuaciones diferenciales de la forma*

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y), \quad \text{o bien} \quad f_2(y)\,dy = f_1(x)\,dx.$$

El método de resolución consiste en separar las variables a ambos lados de la igualdad e integrar cada miembro respecto de la variable correspondiente. Es decir:

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx, \quad \text{o bien} \quad \int f_2(y)\,dy = \int f_1(x)\,dx.$$

Ejemplo 2.10. *Resolver la ecuación* $(1+x)\,dy - y\,dx = 0$.

RESOLUCIÓN. En primer lugar, separamos variables:

$$(1+x)\,dy = y\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{1+x}\,dx.$$

Ahora integramos en cada miembro respecto de la variable correspondiente:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{1+x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln(1+x) + c.$$

De aquí, obtenemos:

$$y = e^{\ln(1+x)+c} \quad \Rightarrow \quad y = e^{c}\,e^{\ln(1+x)} \quad \Rightarrow \quad y = C(1+x).$$

□

Ejemplo 2.11. *Resolver el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y} \\ y(4) = -3. \end{cases}$$

RESOLUCIÓN. Determinamos la solución general como anteriormente:

$$\begin{aligned} y\,dy = -x\,dx \quad &\Rightarrow \quad \int y\,dy = -\int x\,dx \\ &\Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \\ &\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = C^2. \end{aligned}$$

Para obtener la solución particular que pasa por el punto $x = 4$, $y = -3$ basta con sustituir estos valores, con lo que resulta $C^2 = 25$. Por lo tanto, la solución buscada es $x^2 + y^2 = 25$. □

Observación 2.12. *En ocasiones, este método de resolución de una ecuación diferencial puede acarrear la pérdida de soluciones. Por ejemplo, para resolver la ecuación $dy/dx = y^2 - 4$ procedemos como sigue:*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y^2-4} = dx \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2-4} = \int dx \\ &\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{y-2}{y+2}\right) = 4x + c \\ &\Rightarrow \quad \frac{y-2}{y+2} = Ce^{4x}. \end{aligned}$$

Despejando y en esta expresión obtenemos la solución general:

$$y = 2\,\frac{1+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}.$$

Ahora bien, si factorizamos el segundo miembro de la ecuación diferencial $dy/dx = y^2 - 4$ resulta la expresión

$$\frac{dy}{dx} = (y-2)(y+2),$$

que pone de manifiesto que $y = 2$ e $y = -2$ son dos soluciones constantes (llamadas de equilibrio*) de nuestra ecuación diferencial. La solución $y = 2$ se sigue de la solución general tomando $C = 0$, pero no es posible obtener $y = -2$ a partir de la solución general para ningún valor de C.*

2.2. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Definición 2.13. *Las* ecuaciones diferenciales homogéneas *son aquellas que pueden escribirse de la forma*

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Este tipo de ecuaciones se reducen a una de variables separadas tras efectuar el cambio $z = y/x$ ó, lo que es lo mismo, $y = xz$. En efecto, derivando según la regla del producto se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx}\,z + x\,\frac{dz}{dx} = z + x\,\frac{dz}{dx},$$

con lo que la ecuación se transforma en:

$$z + x\frac{dz}{dx} = f(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{f(z)-z} = \ln x + \ln c$$
$$\Rightarrow \quad x = Ce^{\int \frac{dz}{f(z)-z}}.$$

Ejemplo 2.14. *Resolver la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}.$$

RESOLUCIÓN. Haciendo el cambio $y = xz$, separando variables e integrando:

$$z + x\frac{dz}{dx} = z + \operatorname{tg} z \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}\, dz = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln \operatorname{sen} z = \ln x + \ln c$$
$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} z = Cx \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\frac{y}{x} = Cx.$$

□

Ejemplo 2.15. *Hallar la solución general de la ecuación* $(x+y)\, dx - (y-x)\, dy = 0$.

RESOLUCIÓN. Para comprobar que se trata de una ecuación diferencial homogénea, «despejamos» dy/dx:

$$(x+y)\, dx = (y-x)\, dy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{y-x} = \frac{1+\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-1}.$$

Efectuando el cambio $y = xz$, separando variables e integrando, obtenemos:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{1+z}{z-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{z-1}{1+2z-z^2}\, dz = \frac{1}{x}\, dx$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln(1+2z-z^2) = \ln x + \ln c$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + 2xy - y^2 = C.$$

□

2.3. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Definición 2.16. *Se llama* ecuación diferencial lineal de primer orden *a una ecuación del tipo siguiente:*

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x),$$

donde las funciones $p(x)$ y $f(x)$ se considerarán continuas. Si $f(x) \equiv 0$, la ecuación se dice homogénea *y es, en realidad, una ecuación de variables separadas. En caso contrario, la ecuación se dice* no homogénea *o* inhomogénea*.*

Para resolver las ecuaciones lineales no homogéneas se procede como sigue. Multiplicamos la ecuación por la expresión $e^{\int p(t)\,dt}$, con lo que obtenemos

$$\frac{dy}{dx}\, e^{\int p(t)\,dt} + p(x)\, e^{\int p(t)\,dt}\, y = f(x)\, e^{\int p(t)\,dt}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{d}{dx}\left[y\, e^{\int p(t)\,dt}\right] = f(x)\, e^{\int p(t)\,dt}.$$

Integrando ambos miembros resulta

$$y\, e^{\int p(t)\,dt} = \int f(x) e^{\int p(t)\,dt} dx \quad \Rightarrow \quad y = e^{-\int p(t)\,dt} \int f(x) e^{\int p(t)\,dt} dx.$$

Definición 2.17. *Se dice que el término $e^{\int p(t)\,dt}$ es un* factor integrante *para la ecuación lineal.*

Ejemplo 2.18. *Resolver la ecuación lineal*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

RESOLUCIÓN. Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el factor integrante

$$e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} = \frac{1}{x}.$$

Entonces:

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(y\,\frac{1}{x}\right) = x \quad \Rightarrow \quad y\,\frac{1}{x} = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{x^3}{2} + Cx.$$

□

Ejemplo 2.19. *Resolver la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} - y\operatorname{ctg} x = 2x\operatorname{sen} x.$$

RESOLUCIÓN. Multiplicamos ambos miembros de la ecuación diferencial por el factor integrante

$$e^{\int -\operatorname{ctg} x\,dx} = \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$

con lo que tenemos:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{dy}{dx} - y\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(y\,\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = 2x \quad \Rightarrow \quad y\,\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \int 2x\,dx = x^2 + C$$
$$\Rightarrow \quad y = x^2\operatorname{sen} x + C\operatorname{sen} x.$$

□

2.4. Ecuaciones diferenciales exactas

Definición 2.20. *Una ecuación diferencial*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

se dice exacta *si su primer miembro es la diferencial total de cierta función $u(x,y)$, es decir,*

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dy = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy.$$

De esta manera la ecuación diferencial puede ser escrita en la forma $du(x,y) = 0$, en cuyo caso su solución general es $u(x,y) = C$, con C constante.

Nótese que una condición necesaria y suficiente para que la ecuación $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ sea una diferencial exacta es que se verifique

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

La forma de resolver este tipo de ecuaciones es la siguiente. Dado que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=N(x,y),$$

podemos llegar a determinar $u(x,y)$ mediante integración de $M(x,y)$ respecto a x, o bien mediante integración de $N(x,y)$ respecto a y.

En el primero de los casos tendríamos

$$u(x,y)=\int M(x,y)\,dx+C(y),$$

donde todo lo que dependa de y se considera constante en el proceso de integración. Para obtener la función $C(y)$, bastará con imponer que

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\,dx\right]+C'(y)=N(x,y).$$

En el segundo caso

$$u(x,y)=\int N(x,y)\,dy+C(x),$$

donde todo lo que dependa de x se considera constante en el proceso de integración. Para obtener la función $C(x)$, bastará con imponer que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\int N(x,y)\,dy\right]+C'(x)=M(x,y).$$

Ejemplo 2.21. *Resolver la ecuación diferencial exacta siguiente:* $(x+y+1)\,dx+(x-y^2+3)\,dy=0.$

RESOLUCIÓN. Dado que $M(x,y)=x+y+1$ y que $N(x,y)=x-y^2+3$, se cumple

$$\frac{\partial(x+y+1)}{\partial y}=1=\frac{\partial(x-y^2+3)}{\partial x},$$

de modo que, efectivamente, se trata de una ecuación diferencial exacta.

Ahora,

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + C(y) = \int (x+y+1)\,dx + C(y) = \frac{x^2}{2} + xy + x + C(y).$$

Para calcular $C(y)$, procedemos como sigue:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = x + C'(y) = N(x,y) = x - y^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad C'(y) = -y^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad C(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + c,$$

por lo que la solución será:

$$u(x,y) = C \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y = C \quad (C \text{ constante}).$$

□

Ejemplo 2.22. *Resolver* $y \operatorname{sen} x - y' \cos x = 1$.

RESOLUCIÓN. Escribiendo la ecuación en la forma equivalente

$$(y \operatorname{sen} x - 1)\,dx - \cos x\,dy = 0$$

se tiene

$$M(x,y) = y \operatorname{sen} x - 1, \quad N(x,y) = -\cos x.$$

Como

$$\frac{\partial (y \operatorname{sen} x - 1)}{\partial y} = \operatorname{sen} x = \frac{\partial(-\cos x)}{\partial x},$$

la ecuación es exacta. Luego,

$$u(x,y) = \int N(x,y)\,dy + C(x) = \int -\cos x\,dy + C(x) = -y \cos x + C(x).$$

Calculamos $C(x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = y \operatorname{sen} x + C'(x) = M(x,y) = y \operatorname{sen} x - 1 \quad \Rightarrow \quad C'(x) = -1 \quad \Rightarrow \quad C(x) = -x + c.$$

Así pues, la solución será

$$u(x,y)=C \quad \Rightarrow \quad y\,\cos x+x=C \quad (C \text{ constante}).$$

□

3. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

3.1. Aplicaciones geométricas

Definición 3.1. *Se llaman* trayectorias ortogonales *o* curvas ortogonales a una familia de curvas $\Phi(x,y)=c$ *(con c constante), a otra familia de curvas que cortan perpendicularmente a cada elemento de la familia de partida.*

Observación 3.2. *Recuérdese que dos rectas r_i $(i=1,2)$ son perpendiculares si el producto de sus pendientes vale -1, esto es:*

$$m_2=-\frac{1}{m_1},$$

donde m_i denota la pendiente de r_i $(i=1,2)$.

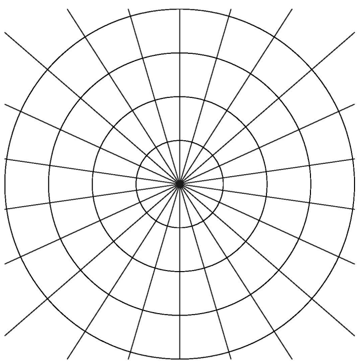

Figura 3.1. Familia de circunferencias y curvas ortogonales a dicha familia (rectas).

Las curvas ortogonales a la familia $\Phi(x,y)=c$ pueden ser determinadas conforme indica el siguiente esquema:

1. Eliminamos el parámetro c derivando implícitamente en la familia de curvas de ecuación $\Phi(x,y)=c$.

2. Se obtiene así la ecuación diferencial $F(x,y,y')=0$, que define a la familia dada.

3. Intercambiamos la pendiente y' en la ecuación diferencial $F(x,y,y')=0$ por la pendiente perpendicular $-\dfrac{1}{y'}$, con lo que resulta la ecuación diferencial $F\left(x,y,-\dfrac{1}{y'}\right)=0$ que define a la familia ortogonal.

4. Resolvemos la ecuación $F\left(x,y,-\dfrac{1}{y'}\right)=0$ obteniendo, por tanto, la familia ortogonal pedida.

Ejemplo 3.3. *Determinar las trayectorias ortogonales a la familia de elipses* $x^2+2y^2=c^2$.

RESOLUCIÓN. Suponiendo $y=y(x)$ eliminamos el parámetro c por derivación implícita, con lo que aparece la ecuación diferencial de la familia de elipses:

$$2x+4yy'=0 \quad \Rightarrow \quad x+2yy'=0.$$

Teniendo en cuenta que $y'(x)$ es la pendiente de la recta tangente a la elipse $y(x)$ de la familia considerada, reemplazamos y' por $-1/y'$ para obtener la ecuación de las trayectorias ortogonales:

$$x+2y\left(-\frac{1}{y'}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{2y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y}=2\,\frac{dx}{x}.$$

Por último, integramos la ecuación de variables separadas resultante:

$$\ln y = 2\ln x + K \quad \Rightarrow \quad y=kx^2.$$

Se concluye que las trayectorias ortogonales a la familia de elipses dada constituyen una familia de parábolas. □

Observación 3.4. *Físicamente, la familia $\Phi(x,y)=c$ de partida representa una familia de* curvas de nivel *o* curvas equipotenciales*, mientras que las trayectorias ortogonales $\Psi(x,y,k)=0$ son las* líneas de flujo *del campo.*

3.2. Problemas de desintegración radiactiva

Se pretende calcular la cantidad restante de una sustancia que se desintegra radiactivamente. Para ello, sean:

$$y(t) = \text{‘cantidad de sustancia restante en el instante } t\text{’},$$

$$y(0) = y_0 = \text{‘cantidad inicial de sustancia’}.$$

Es conocido que la desintegración radiactiva está sujeta a la siguiente ley:

> «*Ley de la Desintegración Radiactiva.* La rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia restante.»

Formulando la ley anterior para la cantidad de sustancia $y(t)$ encontramos que ésta se rige por la ecuación diferencial ordinaria de variables separadas

$$y'(t) = K\,y(t),$$

donde K es una constante de proporcionalidad que depende de la sustancia estudiada. Pasando a notación diferencial, la solución general de la ecuación anterior viene dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = Ky \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = K\,dt \\ &\Rightarrow \quad \ln y = Kt + c, \end{aligned}$$

de donde

$$y(t) = Ce^{Kt}.$$

La constante C viene determinada por la cantidad inicial de sustancia: $y_0 = y(0) = C$.

Para hallar la constante K es necesario conocer la *vida media* de la sustancia radiactiva en cuestión, que es el tiempo medio $t_{1/2}$ que ésta tarda en reducirse a la mitad. Simbólicamente:

$$y(t_{1/2}) = \frac{y_0}{2} = y_0\,e^{K\,t_{1/2}}.$$

Por tanto:

$$\frac{1}{2} = e^{K\,t_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad -\ln 2 = K\,t_{1/2} \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{\ln 2}{t_{1/2}}.$$

En conclusión, la cantidad de sustancia restante en el instante t viene dada por

$$y(t) = y_0\, e^{-\frac{\ln 2}{t_{1/2}}\, t}.$$

Observación 3.5. *La conocida técnica de datación basada en el carbono-14 (^{14}C ó radiocarbono) se apoya en esta ley.*

Ejemplo 3.6. *En un trozo de madera quemada se encontró que el 85.5% de ^{14}C se había desintegrado. La vida media del ^{14}C es de 5600 años. ¿Qué edad tenía la madera?*

RESOLUCIÓN. Sean:

$$y(t) = \text{'cantidad de } ^{14}C \text{ restante en el instante } t\text{'},$$
$$y(0) = y_0 = \text{'cantidad inicial de } ^{14}C\text{'}.$$

De acuerdo con la discusión precedente:

$$K = -\frac{\ln 2}{5600} \simeq -1.24 \cdot 10^{-4}.$$

Por tanto,

$$y(t) = y_0\, e^{-1.24\cdot 10^{-4}\, t}.$$

Sabemos que se ha desintegrado el 85.5% del ^{14}C, por lo que resta el $(100 - 85.5)\% = 14.5\%$ de la cantidad inicial. Es decir, en el instante de medir la cantidad de ^{14}C queda el $0.145\, y_0$ del mismo. Así pues:

$$0.145\, y_0 = y_0\, e^{-1.24\cdot 10^{-4}\, t},$$

de donde

$$\ln 0.145 = -1.24 \cdot 10^{-4}\, t,$$

y finalmente:

$$t = -\frac{\ln 0.145}{1.24 \cdot 10^{-4}} \simeq 15600 \text{ años}.$$

□

3.3. Problemas de crecimiento poblacional

La tasa de crecimiento de una población viene dada por la *ecuación logística*

$$\frac{dP}{dt} = P(a-bP),$$

donde

$$P(t) = \text{‘número de habitantes en el instante } t\text{’}$$

y $a,\ b$ son constantes positivas.

La ecuación diferencial anterior es de variables separadas:

$$\frac{dP}{P(a-bP)} = dt.$$

Para integrarla, descomponemos el primer miembro en fracciones simples:

$$\frac{1}{P(a-bP)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{a-bP} = \frac{A(a-bP)+BP}{P(a-bP)} = \frac{Aa+(B-Ab)P}{P(a-bP)}.$$

Igualando coeficientes encontramos que:

$$\begin{aligned} Aa = 1 \quad &\Rightarrow \quad A = \frac{1}{a}, \\ B - Ab = 0 \quad &\Rightarrow \quad B = \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{dP}{P(a-bP)} = \int dt \qquad &\Rightarrow \quad \int \left[\frac{1}{aP} + \frac{b}{a(a-bP)}\right] dP = \int dt \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{a}\ln P - \frac{1}{a}\ln(a-bP) = t + c \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{a}\ln\left(\frac{P}{a-bP}\right) = t + c \\ &\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{P}{a-bP}\right) = at + c \\ &\Rightarrow \quad \frac{P}{a-bP} = Ce^{at} \\ &\Rightarrow \quad P = Ce^{at}(a-bP) \\ &\Rightarrow \quad P(1+Cbe^{at}) = Cae^{at}. \end{aligned}$$

Finalmente, la solución general de la ecuación logística es:

$$P(t) = \frac{Cae^{at}}{1 + Cbe^{at}}.$$

Nótese además que la constante C verifica:

$$\begin{aligned} P(1 + Cbe^{at}) = Cae^{at} \quad &\Rightarrow \quad P + Cbe^{at}P = Cae^{at} \\ &\Rightarrow \quad C(be^{at}P - ae^{at}) = -P, \end{aligned}$$

o bien

$$C = \frac{-P}{e^{at}(bP - a)} = \frac{P}{e^{at}(a - bP)}.$$

Ejemplo 3.7. *El número $N(t)$ de personas de una comunidad que verán cierto anuncio publicitario se rige por la ecuación logística*

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bN).$$

Inicialmente $N(0) = 500$, y se observa que $N(1) = 1000$. Si se predice que el número límite de personas de la comunidad que verán el anuncio es de 50000, encontrar $N(t)$ en un instante cualquiera.

RESOLUCIÓN. De acuerdo con la discusión precedente, la solución de la ecuación logística es:

$$N(t) = \frac{Cae^{at}}{1 + Cbe^{at}}. \tag{3.1}$$

Las constantes a, b y C vienen determinadas por las condiciones que nos proporciona el enunciado:

$$N(0) = 500 \quad \Rightarrow \quad 500 = \frac{Ca}{1 + Cb}, \tag{3.2}$$

$$N(1) = 1000 \quad \Rightarrow \quad 1000 = \frac{Cae^{a}}{1 + Cbe^{a}} \tag{3.3}$$

y

$$50000 = \lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{Cae^{at}}{1 + Cbe^{at}} = \lim_{t\to\infty} \frac{Ca}{e^{-at} + Cb} = \frac{Ca}{Cb} = \frac{a}{b},$$

así que

$$a = 50000\, b. \tag{3.4}$$

De (3.2) y (3.4) se sigue

$$\begin{aligned} 500 = \frac{Ca}{1+Cb} \quad &\Rightarrow \quad 500 + 500\,Cb = 50000\,Cb \\ &\Rightarrow \quad Cb\,(10000-100) = 100 \\ &\Rightarrow \quad 99\,Cb = 1 \quad \Rightarrow \quad Cb = \frac{1}{99}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ahora incorporamos (3.5) a (3.2) para obtener

$$500 = \frac{Ca}{1+Cb} = \frac{Ca}{1+\frac{1}{99}} = \frac{99\,Ca}{100} \quad \Rightarrow \quad Ca = \frac{50000}{99}. \tag{3.6}$$

Combinando (3.3), (3.5) y (3.6):

$$\begin{aligned} 1000 = \frac{Cae^a}{1+Cbe^a} \quad &\Rightarrow \quad 1000 = \frac{\frac{50000}{99}\,e^a}{1+\frac{e^a}{99}} = \frac{50000\,e^a}{99+e^a} \\ &\Rightarrow \quad 1000\,(99+e^a) = 50000\,e^a \\ &\Rightarrow \quad 99 = 49\,e^a \quad \Rightarrow \quad e^a = \frac{99}{49} \\ &\Rightarrow \quad a = \ln\frac{99}{49} \simeq 0.7. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Sin más que insertar (3.5), (3.6) y (3.7) en (3.1) ya encontramos que el número de personas que verán el anuncio publicitario en un instante cualquiera t viene dado por:

$$N(t) = \frac{50000\,e^{0.7\,t}}{99+e^{0.7\,t}}.$$

Aunque no es estrictamente necesario, llevando (3.7) sucesivamente a (3.4) y (3.6) obtenemos también los valores de b y C:

$$a = 50000\,b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a}{50000} \simeq \frac{0.7}{50000} \simeq 1.4 \cdot 10^{-5},$$

$$Ca = \frac{50000}{99} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{50000}{99a} \simeq \frac{50000}{99 \cdot 0.7} \simeq 721.5.$$

□

3.4. Problemas de reacciones químicas

Dos sustancias A y B reaccionan formando una sustancia C. Interesa conocer la cantidad de sustancia C formada en el instante t.

Para resolver el problema anterior nos apoyamos en la siguiente ley de la química:

> «La rapidez de una reacción química en la que se forma un compuesto C a partir de dos sustancias A y B es proporcional al producto de las cantidades de A y de B que no han reaccionado.»

Denotamos por:

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & \text{‘cantidad de } C \text{ en el instante } t\text{’}, \\ \alpha & = & \text{‘cantidad inicial de } A\text{’}, \\ \beta & = & \text{‘cantidad inicial de } B\text{’}, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & & \\ a(t) & = & \text{‘cantidad de } A \text{ usada en el instante } t\text{’}, \\ b(t) & = & \text{‘cantidad de } B \text{ usada en el instante } t\text{’}. \end{array}$$

Formulando la ley anterior para $y(t)$ encontramos que esta función verifica la ecuación diferencial ordinaria de variables separadas

$$y'(t) = K\,[\alpha - a(t)]\,[\beta - b(t)]$$

con condición inicial $y(0) = 0$ (pues en el instante $t = 0$ no se ha formado aún sustancia C).

Ejemplo 3.8. *Dos sustancias químicas A y B se combinan para formar una sustancia C. Inicialmente hay* 40 *gramos de A y* 50 *gramos de B, y por cada gramo de B se usan* 2 *gramos de A. Se observa que se forman* 10 *gramos de C en* 5 *minutos. ¿Cuánto se formará en* 20 *minutos? ¿Cuánto quedará de A y B sin reaccionar después de un tiempo largo?*

RESOLUCIÓN. Sean:

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & \text{‘cantidad de } C \text{ en el instante } t\text{’}, \\ \alpha & = & 40, \\ \beta & = & 50, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & & \\ a(t) & = & \text{‘cantidad de } A \text{ usada en el instante } t\text{’}, \\ b(t) & = & \text{‘cantidad de } B \text{ usada en el instante } t\text{’}. \end{array}$$

La *Ley de Conservación de la Masa* de Lavoisier garantiza que la cantidad de sustancia C creada en el instante t coincide con la suma de las cantidades usadas de A y B. De otra parte, sabemos que por cada gramo de B se usan 2 gramos de A, esto es, la cantidad de sustancia A usada en el instante t es el doble de la de B. Luego:

$$\begin{cases} y(t) = a(t) + b(t) \\ a(t) = 2b(t) \end{cases} \Rightarrow \quad y(t) = 3b(t) \quad \Rightarrow \begin{cases} b(t) = \dfrac{1}{3}\, y(t) \\ a(t) = \dfrac{2}{3}\, y(t). \end{cases}$$

Conforme a la discusión precedente, la cantidad de sustancia C creada en el instante t verifica la ecuación diferencial ordinaria de variables separadas

$$y'(t) = K\left[40 - \frac{2}{3}\, y(t)\right]\left[50 - \frac{1}{3}\, y(t)\right],$$

o bien

$$y'(t) = \frac{K}{9}\,[120 - 2y(t)]\,[150 - y(t)].$$

Luego,

$$\frac{dy}{(120-2y)(150-y)} = \frac{K}{9}\, dt.$$

Integrando la expresión anterior,

$$\int \frac{dy}{(120-2y)(150-y)} = \frac{K}{9}\, t + c.$$

Calculamos la integral del primer miembro por descomposición en fracciones simples:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(120-2y)(150-y)} &= \frac{A}{120-2y} + \frac{B}{150-y} \\ &= \frac{A(150-y) + B(120-2y)}{(120-2y)(150-y)} \\ &= \frac{(150A + 120B) + (-A - 2B)y}{(120-2y)(150-y)}. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes obtenemos:

$$\begin{cases} 150A + 120B = 1 \\ -A - 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 150A + 120B = 1 \\ -60A - 120B = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 90A = 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{90} \\ B = -\dfrac{1}{180}. \end{cases}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{(120-2y)(150-y)} &= \int \left[\frac{1}{90}\,\frac{1}{120-2y} - \frac{1}{180}\,\frac{1}{150-y}\right] dy \\ &= -\frac{1}{180}\ln(120-2y) + \frac{1}{180}\ln(150-y) \\ &= \frac{1}{180}\ln\left(\frac{150-y}{120-2y}\right) + c.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{1}{180}\ln\left(\frac{150-y}{120-2y}\right) = \frac{K}{9}\,t + c \quad &\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{150-y}{120-2y}\right) = 20Kt + c \\ &\Rightarrow \quad \frac{150-y}{120-2y} = Ce^{20Kt}.\end{aligned}$$

Las constantes C y K se determinan por las condiciones del problema:

$$\begin{aligned}&y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{150}{120} = \frac{5}{4} = 1.25, \\ &y(5) = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{150-10}{120-20} = 1.25\,e^{100K} \quad \Rightarrow \quad \frac{14}{10} = 1.25\,e^{100K} \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \quad e^{100K} = \frac{14}{12.5} \quad \Rightarrow \quad 100K = \ln\frac{14}{12.5} \quad \Rightarrow \quad K \simeq 113\cdot 10^{-5}.\end{aligned}$$

Así pues:

$$\begin{aligned}\frac{150-y}{120-2y} = 1.25\,e^{226\cdot 10^{-4}t} \quad &\Rightarrow \quad 150 - y = 1.25\,(120-2y)\,e^{226\cdot 10^{-4}t} \\ &\Rightarrow \quad 150 - y = 150\,e^{226\cdot 10^{-4}t} - 2.5\,y\,e^{226\cdot 10^{-4}t} \\ &\Rightarrow \quad 150\left(1 - e^{226\cdot 10^{-4}t}\right) = \left(1 - 2.5\,e^{226\cdot 10^{-4}t}\right) y.\end{aligned}$$

Consecuentemente, la cantidad de sustancia C formada en el instante t viene dada por:

$$y(t) = 150\,\frac{1 - e^{226\cdot 10^{-4}t}}{1 - 2.5\,e^{226\cdot 10^{-4}t}}.$$

La cantidad de C que se formará transcurridos 20 minutos será:

$$y(20) = 150\,\frac{1 - e^{452\cdot 10^{-3}}}{1 - 2.5\,e^{452\cdot 10^{-3}}} \simeq 29.27 \text{ gr}.$$

Para determinar la cantidad de las sustancias A y B que queda sin reaccionar transcurrido un tiempo largo, calculamos en primer lugar cuánta cantidad de C se ha formado transcurrido dicho tiempo.

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} 150\, \frac{1-e^{226\cdot 10^{-4}t}}{1-2.5\,e^{226\cdot 10^{-4}t}} = \lim_{t\to\infty} 150\, \frac{e^{-226\cdot 10^{-4}t}-1}{e^{-226\cdot 10^{-4}t}-2.5} = \frac{150}{2.5} = 60 \text{ gr.}$$

Por último, como

$$a(t) = \frac{2}{3}\, y(t) \quad \text{y} \quad b(t) = \frac{1}{3}\, y(t),$$

podemos concluir que transcurrido un tiempo largo quedan sin reaccionar:

$$\lim_{t\to\infty} [\alpha - a(t)] = 40 - \frac{2\cdot 60}{3} = 0 \text{ gr de } A,$$
$$\lim_{t\to\infty} [\beta - b(t)] = 50 - \frac{60}{3} = 30 \text{ gr de } B.$$

□

3.5. Problemas de mezclas

Se mezclan dos soluciones de diferente concentración en un recipiente. Queremos conocer la cantidad de soluto presente en cada instante dentro del mismo.

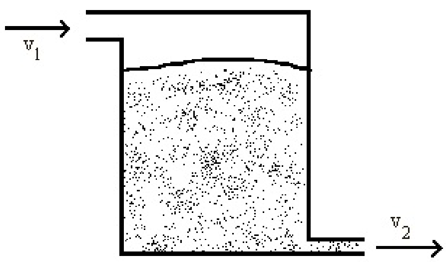

Figura 3.2. Problemas de mezclas.

Más precisamente, supongamos que tenemos un recipiente en el cual hay un volumen inicial de V_0 litros de disolvente y una cantidad inicial de soluto de A kilogramos, con lo cual la concentración inicial de soluto es de A/V_0 kilogramos por litro. En dicho recipiente se introduce una solución con una concentración de a kg/L, a una velocidad de v_1 L/min. Al mismo tiempo sale del recipiente parte de la solución a una velocidad de v_2 L/min. Estamos interesados, como hemos mencionado anteriormente, en conocer la cantidad de soluto presente en el interior del recipiente en cada instante.

Para ello, denotemos por:

$$y(t) = \text{‘cantidad de soluto en el recipiente en el instante } t\text{’}.$$

La rapidez con que varía la cantidad de soluto dentro del recipiente viene dada por la variación de la cantidad de soluto respecto al tiempo, esto es, $y'(t)$. Así:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \text{‘rapidez con que varía la cantidad de soluto en el recipiente en el instante } t\text{’} \\ &= \text{‘rapidez con que entra menos rapidez con que sale’} \\ &= R_1(t) - R_2(t), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \text{‘concentración de entrada} \times \text{velocidad de entrada’} \\ &= a\,v_1 \quad (\text{kg/L} \times \text{L/min} = \text{kg/min}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} R_2(t) &= \text{‘concentración en el instante } t \times \text{velocidad de salida’} \\ &= \frac{v_2}{V_0 + (v_1 - v_2)t}\, y(t) \quad \left(\tfrac{\text{L/min}}{\text{L}} \times \text{kg} = \text{kg/min}\right), \end{aligned}$$

pues el volumen de solución en el instante t viene dado por la suma del volumen inicial V_0 y el volumen añadido en el instante t, que es $(v_1 - v_2)t$ (L/min $\times$ min $=$ L).

En consecuencia, la cantidad de soluto en el instante t verifica la ecuación diferencial ordinaria lineal:

$$y'(t) = a\,v_1 - \frac{v_2}{V_0 + (v_1 - v_2)t}\, y(t),$$

es decir,

$$y'(t) + \frac{v_2}{V_0 + (v_1 - v_2)t}\, y(t) = a\,v_1,$$

con la condición inicial

$$y(0) = A \text{ kg de soluto.}$$

Ejemplo 3.9. *Se disuelven inicialmente* 50 *libras de sal en un recipiente que contiene* 300 *galones de agua. Se bombea salmuera al recipiente a razón de* 3 *galones por minuto, siendo la concentración de la solución entrante de* 2 *libras por galón. La solución mezclada se bombea hacia afuera a razón de* 2 *galones por minuto. Determinar la cantidad de sal que hay en el recipiente en cada instante.*

RESOLUCIÓN. Del enunciado anterior tenemos los siguientes datos:

$$\begin{aligned} &A = 50 \text{ lb}, \qquad a = 2 \text{ lb/gal}, \\ &V_0 = 300 \text{ gal}, \quad v_1 = 3 \text{ gal/min}, \quad v_2 = 2 \text{ gal/min}. \end{aligned}$$

Atendiendo a la discusión precedente, la cantidad de sal $y(t)$ presente en el recipiente en cada instante es solución de la ecuación diferencial lineal:

$$y'(t) + \frac{2}{300+(3-2)t}\, y(t) = 2 \cdot 3,$$

esto es,

$$y'(t) + \frac{2}{300+t}\, y(t) = 6.$$

La ecuación anterior admite por factor integrante:

$$e^{\int P(t)dt} = e^{2\int \frac{dt}{300+t}} = e^{2\ln(300+t)} = e^{\ln(300+t)^2} = (300+t)^2.$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por el factor integrante:

$$(300+t)^2\, y'(t) + \frac{2(300+t)^2}{300+t}\, y(t) = 6(300+t)^2,$$

es decir,

$$\left[(300+t)^2\, y(t)\right]' = 6(300+t)^2.$$

Integrando la expresión anterior:

$$(300+t)^2\, y(t) = \int 6(300+t)^2 dt = 2(300+t)^3 + C.$$

La solución general de la ecuación diferencial es entonces:

$$y(t) = 2(300+t) + \frac{C}{(300+t)^2}.$$

Finalmente, determinamos C de acuerdo a las condiciones del problema:

$$A = y(0) = 50 \quad \Rightarrow \quad 50 = 600 + \frac{C}{300^2} \quad \Rightarrow \quad 50 = 6 \cdot 10^2 + \frac{C}{9 \cdot 10^4}$$
$$\Rightarrow \quad C = 45 \cdot 10^5 - 54 \cdot 10^6 = (45 - 540) \cdot 10^5 = -495 \cdot 10^5.$$

En conclusión, la cantidad de sal que hay en cada instante en el recipiente viene dada por la función

$$y(t) = 2(300 + t) - \frac{495 \cdot 10^5}{(300 + t)^2}.$$

□

3.6. Problemas de temperatura

Se trata de medir la temperatura que tiene en cada instante un objeto que se enfría. Sean

$T(t) =$ 'temperatura del objeto en el instante t',

$T_a =$ 'temperatura ambiente'.

El enfriamiento de un cuerpo está regido por la siguiente ley:

«*Ley de Newton.* La rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura ambiente.»

Formulando la ley anterior para $T(t)$ encontramos que esta función satisface la ecuación diferencial ordinaria lineal

$$T'(t) = K[T(t) - T_a],$$

esto es:

$$T'(t) - KT(t) = -KT_a,$$

donde K es una constante que depende del objeto considerado y de las condiciones externas.

La anterior ecuación admite por factor integrante:

$$e^{\int P(t)dt} = e^{-K\int dt} = e^{-Kt}.$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por el factor integrante obtenemos:

$$e^{-Kt}T'(t) - Ke^{-Kt}T(t) = -Ke^{-Kt}T_a,$$

es decir,

$$\left[e^{-Kt}T(t)\right]' = -Ke^{-Kt}T_a.$$

Integrando ahora ambos miembros de la ecuación respecto de la variable independiente:

$$e^{-Kt}T(t) = e^{-Kt}T_a + C.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es:

$$T(t) = T_a + Ce^{Kt}.$$

Las constantes C y K se determinan en función de los datos del problema particular considerado.

Ejemplo 3.10. *Un termómetro se saca de una habitación, donde la temperatura es de* 70 °*F, al exterior, donde la temperatura es de* 10 °*F. Después de medio minuto, el termómetro marca* 50 °*F. ¿Cuánto marcará al cabo de* 1 *minuto? ¿Cuánto tardará en alcanzar los* 15 °*F?*

RESOLUCIÓN. Sea

$$T(t) = \text{‘temperatura del objeto en el instante } t\text{’}.$$

Sabemos que la temperatura ambiente es $T_a = 10$ °F. Además, la temperatura inicial del termómetro es de $T(0) = 70$ °F, mientras que al cabo de medio minuto es de $T(0.5) = 50$ °F.

De acuerdo con la discusión precedente, la temperatura del termómetro en cualquier instante t viene dada por:

$$T(t) = 10 + Ce^{Kt}.$$

Ahora bien, $70 = T(0) = 10 + C$, luego

$$C = 70 - 10 = 60.$$

De otra parte

$$50 = T(0.5) = 10 + 60\, e^{0.5\,K},$$

esto es:

$$e^{0.5\,K} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}.$$

Por tanto,

$$K = \frac{\ln \frac{2}{3}}{0.5} \simeq -0.811.$$

Así pues, la temperatura del termómetro en cualquier instante t viene dada por:

$$T(t) = 10 + 60\,e^{-0.811\,t}.$$

Al cabo de 1 minuto, el termómetro marcará

$$T(1) = 10 + 60\,e^{-0.811} \simeq 36.67\ °\text{F}.$$

Para determinar el tiempo en que alcanzará los 15 °F hemos de resolver la ecuación $T(t) = 15$, es decir:

$$15 = 10 + 60\,e^{-0.811\,t}.$$

Luego

$$5 = 60\,e^{-0.811\,t}$$

y, por tanto,

$$e^{-0.811\,t} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12},$$

de donde

$$-0.811\,t = -\ln 12.$$

Finalmente,

$$t = \frac{\ln 12}{0.811} \simeq 3.064\ \text{min}.$$

□

3.7. Caída de un cuerpo en un medio resistente

En primer lugar, recordamos la siguiente ley física fundamental:

«*Segunda Ley de Newton.* 'El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa, y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual se imprime dicha fuerza'. En otras palabras, la aceleración a ó cambio de movimiento de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza F aplicada: $F = ma$, donde m es una constante característica del cuerpo, llamada *masa inercial*.»

Sobre un cuerpo de masa m que cae actúan dos fuerzas, la de la gravedad y la resistencia del aire, que es proporcional a su velocidad: kv, siendo k la constante de proporcionalidad. Si $s = f(t)$ representa el espacio recorrido en función del tiempo t, $v = s'(t)$ es la velocidad y $a = v'(t) = s''(t)$ la aceleración con que cae, entonces, por la Segunda Ley de Newton,

$$ma = mg - kv \quad \Rightarrow \quad a = g - \frac{k}{m}v \quad \Rightarrow \quad v' + \frac{k}{m}v = g.$$

Este modelo corresponde a una ecuación lineal de primer orden, cuya solución para el problema de valores iniciales $v(0) = v_0$ viene dada por

$$v(t) = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Ejemplo 3.11. *Un paracaidista cuyo peso es de* 100 *kilogramos se deja caer desde un helicóptero situado a* 3000 *metros. Suponemos que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad, siendo las constantes de proporcionalidad* $k_0 = 20$ *kilogramos por segundo con el paracaídas cerrado y* $k_1 = 100$ *kilogramos por segundo con el paracaídas abierto. Si el paracaídas se abre transcurridos* 30 *segundos, ¿qué relación satisface el tiempo de llegada?*

RESOLUCIÓN. El tiempo de llegada τ será la suma del tiempo $t_0 = 30$ s que transcurre mientras el paracaídas está cerrado y el tiempo T que transcurre desde que se abre el paracaídas hasta el momento del aterrizaje.

Para hallar T procedemos como sigue:

1. Calculamos el espacio s_0 que recorre el paracaidista mientras el paracaídas está cerrado. Para ello usamos el modelo de caída en un medio resistente, con $k_0 = 20$ kg/s y condición incial $v_0 = v(0) = 0$ m/s.

2. Calculamos la velocidad v_{30} que lleva el paracaidista en el momento justo en que abre el paracaídas.

3. Usamos de nuevo el modelo de caída en un medio resistente con $k_1 = 100$ kg/s y condición inicial la velocidad v_{30} calculada en el apartado anterior, para así determinar el espacio que recorre el paracaidista tras la apertura del paracaídas.

Tomando como valor de la aceleración de la gravedad 9.8 m/s^2, la velocidad $v_0(t)$ durante los primeros 30 segundos viene dada por:

$$v_0(t) = 9.8\,\frac{100}{20}\left(1 - e^{-\frac{20}{100}t}\right) = 49\left(1 - e^{-\frac{1}{5}t}\right)\ \text{m/s};$$

luego, el espacio s_0 recorrido durante los primeros 30 segundos es

$$s_0 = \int_0^{30} 49\left(1 - e^{-\frac{1}{5}t}\right) dt \simeq 1225.61\ \text{m}.$$

Usamos ahora el modelo con la nueva constante $k_1 = 100$ kg/s, suponiendo que volvemos a contar el tiempo T desde cero (nótese que en este caso la condición inicial es $v_1(0) = v_0(30) = v_{30} = 48.89$ m/s). La velocidad $v_1(T)$ que lleva el paracaidista una vez abierto el paracaídas vendrá dada entonces por:

$$v_1(T) = 9.8\,\frac{100}{100} + e^{-T}\left(48.89 - 9.8\,\frac{100}{100}\right) = 9.8 + 39.09\,e^{-T}\ \ \text{m/s}.$$

Consiguientemente, el espacio total recorrido para cualquier instante $\tau = 30 + T$ será $s(\tau) = s_0 + s_1(T)$, donde

$$s_1(T) = \int_0^T v_1(t)\,dt = \int_0^T \left(9.8 + 39.09\,e^{-t}\right)\,dt = \left[9.8\,t - 39.09\,e^{-t}\right]_0^T = 9.8\,T - 39.09\,e^{-T} + 39.09.$$

El tiempo $\tau = 30 + T$ ha de verificar, por tanto, que $s_0 + s_1(T) = 3000$ m, esto es:

$$s_1(T) = 3000 - 1225.61 = 1774.39\ \text{m}.$$

En conclusión:

$$9.8\,T - 39.09\,e^{-T} = 1735.3.$$

La ecuación anterior puede ser resuelta usando, por ejemplo, el método de bisección para el cálculo de raíces, o bien el método de Newton-Raphson. En este ejemplo $T \simeq 177.07$ s, y el tiempo total, $\tau \simeq 3$ min 27.07 s. $\square$