Teoría de errores: problemas resueltos

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

5. Problemas resueltos

Ejercicio 5.1. *Calcular la diferencia $a = a_1 - a_2$ de los números aproximados a_1 y a_2 y evaluar los errores absoluto y relativo del resultado, si $A_1 = 17.5 \pm 0.02$ y $A_2 = 45.6 \pm 0.03$.*

RESOLUCIÓN. Se tiene:

$$a = 17.5 - 45.6 = -28.1, \quad \Delta_a = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} = 0.02 + 0.03 = 0.05.$$

Luego, $A = -28.1 \pm 0.05$. Determinemos el error relativo:

$$\delta_a = \frac{0.05}{|-28.1|} = 1.7794 \cdot 10^{-3} \simeq 0.002 = 0.2\,\%.$$

□

Ejercicio 5.2. *Hallar el producto de los números aproximados $x_1 = 12.4$ y $x_2 = 65.54$ así como su número de cifras exactas, si los factores tienen todas sus cifras exactas.*

RESOLUCIÓN. El primer factor tiene tres cifras exactas y el segundo cuatro, una más que el primero. Efectuamos directamente el producto:

$$x_1 \cdot x_2 = 812.696.$$

Ahora redondeamos el resultado a tres dígitos exactos: $a = 813$.

El error relativo será:

$$\delta_a = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} = \frac{0.05}{12.4} + \frac{0.005}{65.54} = 0.0042.$$

Así

$$\Delta_a = 813 \cdot 0.0042 = 3.4146 \simeq 0.4 \cdot 10 \leq 0.5 \cdot 10,$$

de donde $m - n + 1 = 1$, y $n = m = 2$; por tanto, el producto tiene dos dígitos exactos. Concluimos que $A = 813 \pm 4$. □

Ejercicio 5.3. *Calcular el número de cifras exactas de $a = a_1 \cdot a_2$, donde $a_1 = 3.1416$ y $a_2 = 2.72$ son aproximaciones con todas sus cifras exactas de π y e, respectivamente.*

RESOLUCIÓN. Tenemos:

$$a = a_1 \cdot a_2 = 8.545152,$$

$$\delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} = \frac{0.5}{3 \cdot 10^4} + \frac{0.5}{2 \cdot 10^2} \simeq 2.52 \cdot 10^{-3}.$$

Entonces

$$\Delta_a = |a| \cdot \delta_a = 8.545152 \cdot 0.00252 \simeq 0.02154 \leq 0.05 = 0.5 \cdot 10^{-1},$$

lo que garantiza sólo dos cifras exactas en a. □

Ejemplo 5.4. *Calcular el cociente $a = x/y$ de los números aproximados $x = 5.735$ e $y = 1.23$, si todos sus dígitos son exactos. Estimar los errores absoluto y relativo.*

RESOLUCIÓN. Se tiene que $a = 4.662601626 \simeq 4.66$; hemos retenido tres dígitos significativos en el cociente porque el número menos exacto (el divisor) tiene tres cifras válidas. Determinemos el error relativo:

$$\delta_a = \delta_x + \delta_y = \frac{0.0005}{5.735} + \frac{0.005}{1.23} \simeq 0.9 \cdot 10^{-4} + 0.41 \cdot 10^{-2} = 0.0042 \simeq 0.005 = 0.5\,\%.$$

Calculemos ahora el error absoluto:

$$\Delta_a = |a| \cdot \delta_a \simeq 4.66 \cdot 0.0042 = 0.019572 \simeq 0.02 \leq 0.05 = 0.5 \cdot 10^{-1},$$

lo que asegura dos dígitos exactos. Consecuentemente, $A = 4.66 \pm 0.02$. □

Ejercicio 5.5. *Averiguar con cuántas cifras exactas se han de tomar π y e para obtener $A = \pi/e$ con cinco cifras exactas.*

RESOLUCIÓN. Se verifica:

$$\pi = 3.141592654, \quad e = 2.718281828, \quad A = \frac{\pi}{e} = 1.15572735.$$

Ahora,

$$\delta_a = \frac{0.5}{3\cdot 10^{n-1}} + \frac{0.5}{2\cdot 10^{n-1}} \leq \frac{0.5}{2\cdot 10^4} \quad \Rightarrow \quad 10^{n-5} \geq \frac{5}{3} \simeq 1.67,$$

así que $n-5=1$, o bien $n=6$. Por tanto, tomamos $a_1 = 3.14159$, $a_2 = 2.71828$, $a = a_1/a_2 = 1.155727151$.

Comprobemos que a tiene cinco cifras exactas:

$$|A-a| = 1.15572735 - 1.155727151 \simeq 0.0000002 \leq 0.5\cdot 10^{-6},$$

lo que garantiza incluso siete cifras exactas. $\square$

Ejercicio 5.6. *Determinar con qué error relativo y con cuántas cifras exactas podemos calcular el lado de un cuadrado si su área es $s = 16.45$ centímetros cuadrados, con una precisión de* 0.01.

RESOLUCIÓN. Tenemos que $a = \sqrt{s} = 4.055859958$ cm. Entonces

$$\delta_a = \frac{1}{2}\cdot\delta_s = \frac{1}{2}\cdot\frac{0.01}{16.45} \simeq 0.00031 = 0.031\,\%,$$
$$\Delta_a = 4.055859958\cdot 0.00031 \simeq 0.0013 \leq 0.005 = 0.5\cdot 10^{-2}\ \text{cm}$$

(tres cifras exactas). Redondeando el resultado a cuatro dígitos encontramos que

$$A = 4.056 \pm (0.0013 + 0.0005) \simeq 4.056 \pm 0.002\ \text{cm}.$$

$\square$