Cálculo diferencial de funciones de una variable

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

1. Continuidad y derivabilidad

1.1. Continuidad

Definición 1.1. *Una* función real de variable real f *es una aplicación que asigna a cada número real* x *otro número real* $y = f(x)$. *De modo simbólico escribiremos*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x). \end{array}$$

Asociados a toda función f *podemos definir los siguientes conjuntos:*

i) Dominio *de* f, $\operatorname{Dom} f$, *el conjunto de números reales* x *para los que existe el valor* $f(x)$*:*

$$\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}.$$

ii) Imagen *de* f, $\operatorname{Im} f$, *el conjunto de todos los valores* $y = f(x)$ *cuando* x *recorre el dominio de la función* f*:*

$$\operatorname{Im} f = \{y = f(x) : x \in \operatorname{Dom} f\} = f(\operatorname{Dom} f) \subset \mathbb{R}.$$

iii) Grafo *o* gráfica *de* f, $\operatorname{Grafo} f$, *el subconjunto del plano* $\mathbb{R}^2$ *formado por puntos de la forma* $(x, f(x))$, *donde* x *varía en el dominio de la función* f*:*

$$\operatorname{Grafo} f = \{(x, f(x)) : x \in \operatorname{Dom} f\} \subset \mathbb{R}^2.$$

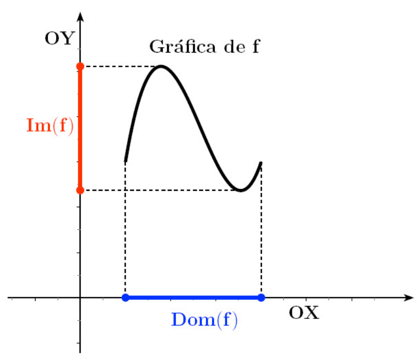


Figura 1.1. Dominio (en azul), imagen (en rojo) y gráfica (en negro) de una función f.

Ejemplo 1.2. *a*) *Para la función* $f_1(x) = x^3 - x$ *se tiene que* $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

b) *Para la función* $f_2(x) = \ln x$ *se tiene que* $\operatorname{Dom} f = (0, +\infty)$ *e* $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

c) *Para la función* $f_3(x) = \cos x$ *se tiene que* $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ *e* $\operatorname{Im} f = [-1, 1]$.

d) *Para la función* $f_4(x) = e^{-x^2}$ *se tiene que* $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ *e* $\operatorname{Im} f = (0, 1]$.

Teniendo en cuenta la representación gráfica de funciones surge el concepto de función continua en un punto y en un intervalo. De modo intuitivo, una función f es continua en $x = a$ si en un entorno del punto $(a, f(a))$ se puede trazar la gráfica de la función sin levantar el lápiz del papel. Más formalmente, tenemos la

Definición 1.3. *Una función f es* continua en un punto $x = a$ *si para cualquier cantidad $\varepsilon > 0$ existe otra cantidad $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Decimos que la función f es* continua en un intervalo (a, b) *si es continua en cada uno de los puntos del intervalo.*

De modo equivalente (y más operativo), la función f es continua en $x = a$ si existe el límite $L = \lim_{x \to a} f(x)$ y dicho límite verifica $L = f(a)$. Obsérvese que esta propiedad requiere la existencia de los *límites laterales* en el punto y su coincidencia con el valor de la función en el punto, esto es,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a). \tag{1.1}$$

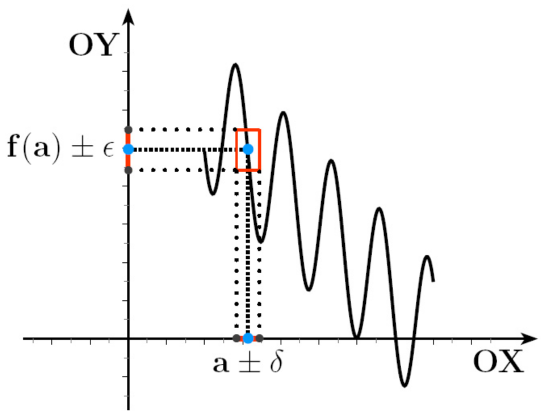


Figura 1.2. Continuidad de una función en un punto $x = a$.

Definición 1.4. *Si para una función f los límites laterales en un punto $x = a$ no existen o no satisfacen las igualdades dadas en (1.1), diremos que f es* discontinua *(o bien,* no continua*) en $x = a$.*

Nótese que los tipos de discontinuidad que se pueden presentar son los siguientes:

- *Discontinuidad evitable:* es aquella que se produce cuando existen y son iguales los límites laterales, pero difieren del valor de la función en el punto:

$$\exists L = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \text{pero} \quad L \neq f(a).$$

  Claramente, esta discontinuidad se puede *evitar* redefiniendo la función f en el punto $x = a$ a través del valor común de los límites laterales, es decir, haciendo $f(a) = L$.

- *Discontinuidad de salto:* es aquella que se produce cuando los límites laterales existen pero toman diferente valor, o bien cuando alguno de ellos es infinito. En el caso de que los límites laterales tomen valores finitos se dice que la discontinuidad es *de salto finito*:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{salto} = \left| \lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x) \right|;$$

  mientras que si algún límite lateral (o ambos) es infinito:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty,$$

  se dice que la discontinuidad es *de salto infinito*.

- Por otra parte, en aquellos casos en los que no existe alguno de los límites laterales se habla de *discontinuidades esenciales*.

Véase la Figura 1.3.

1.2. Derivabilidad

Definición 1.5. *Si $f(x)$ está definida en un intervalo $[a,b]$, se denomina* tasa de variación media *de f en $[a,b]$ al cociente*

$$T_m(f;[a,b]) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

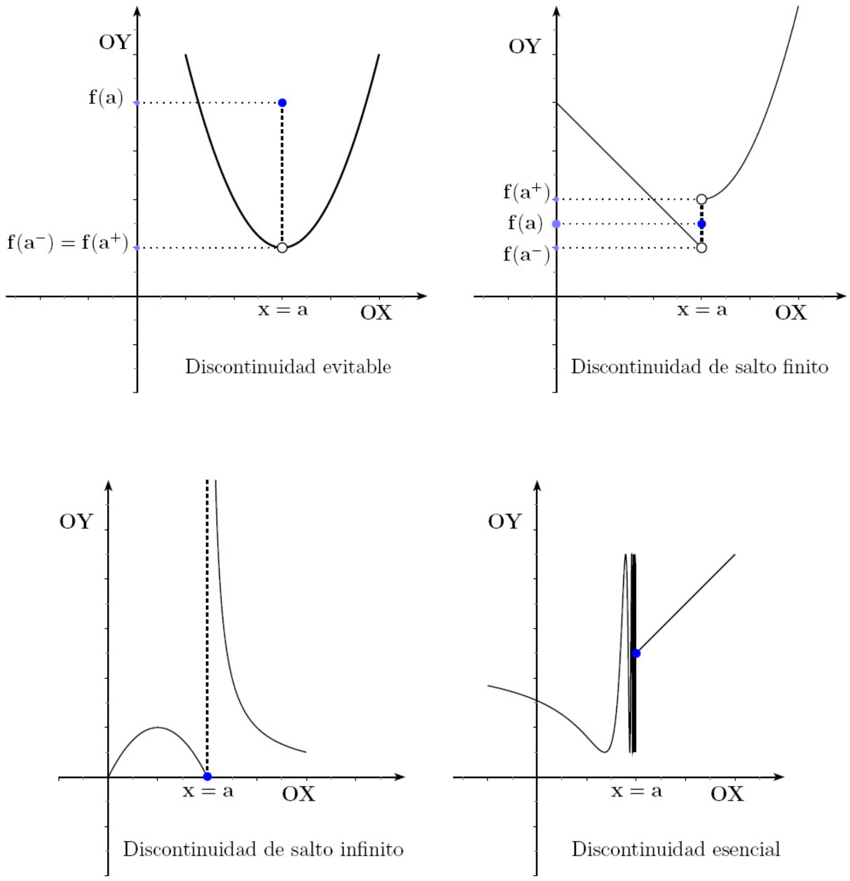


Figura 1.3. Tipos de discontinuidad.

Ejemplo 1.6. *Supongamos que un coche es capaz de alcanzar una velocidad de* 90 *kilómetros por hora en* 20 *segundos, partiendo del reposo. Hallar la variación media de la velocidad (esto es, la aceleración media) en el intervalo de tiempo* $[0,20]$ *segundos.*

RESOLUCIÓN. Se tiene:

$$T_m(v;[0,20]) = \frac{v(20)-v(0)}{20-0} = \frac{25-0}{20-0} = 1.25 \text{ m/s}^2,$$

donde $v(20) = 90$ km/h $= 90 \cdot 1000/3600$ m/s $= 25$ m/s es la velocidad a los 20 segundos de iniciado el movimiento. □

Consideremos ahora una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a,a+h]$, con $h>0$. El valor

$$\frac{\Delta f(a)}{\Delta a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1.2}$$

se denomina *cociente incremental* y representa la tasa de variación media de $f(x)$ en el intervalo $[a,a+h]$. Esto da lugar a la siguiente

Definición 1.7. *Una función $f(x)$ es* derivable *en un punto $x=a$ si existe y es finito el límite*

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{\Delta f(a)}{\Delta a}.$$

El valor de dicho límite se conoce como derivada *de la función f en el punto $x=a$.*

Observemos que para que una función pueda ser derivable en un punto, en primer lugar ha de ser continua en dicho punto. De forma más precisa:

Proposición 1.8. *Si f es derivable en $x=a$, entonces f es continua en $x=a$.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$\lim_{x\to a}f(x)-f(a)=\lim_{x\to a}(x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}h\,\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=0\cdot f'(a)=0,$$

donde en el paso intermedio se ha efectuado el cambio $h=x-a$. En definitiva, $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$, y f es continua en $x=a$. $\square$

Observación 1.9. *Si f es derivable en todo un intervalo (a,b), entonces a cada $x\in(a,b)$ se le puede asignar el valor $f'(x)$ de la derivada de f en el punto x. Surge así la función f', derivada de la función original f.*

Ejemplo 1.10. *Usando la Definición 1.7, hallar la función derivada de las funciones polinómicas $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3$.*

RESOLUCIÓN. Se verifica:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2)-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x,$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2. \end{aligned}$$

□

De modo totalmente análogo, usando el desarrollo del binomio de Newton podemos justificar que la derivada de la función $f(x)=x^n$ ($n\in\mathbb{N}$) es $f'(x)=nx^{n-1}$.

Observación 1.11. *Así como el cociente incremental (1.2) representa la tasa de variación media de $f(x)$ en el intervalo $[a,a+h]$, el valor límite*

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

representa la tasa de variación instantánea *de la función $f(x)$* en el punto $x=a$. *Así pues,* la derivada de una función $f(x)$ en un punto $x=a$ expresa la razón de cambio relativo de la función f con respecto a la variable x en el punto $x=a$.

1.2.1. Interpretación física de la derivada

Podemos dar a la derivada una interpretación en términos de velocidades. En efecto, cuando $f(t)$ representa el espacio recorrido por un móvil en el instante t, la razón de cambio

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

representa la velocidad media de variación de la función f en el intervalo $(a,a+h)$. El límite de la anterior expresión cuando $h\to 0$ proporciona la velocidad instantánea en el instante $t=a$. De esta forma, *las tasas de variación media e instantánea del espacio recorrido por un móvil representan, respectivamente, el valor de la velocidad media e instantánea de dicho móvil.*

1.2.2. Interpretación geométrica de la derivada

Dada una función $f(x)$ y dos puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ de su gráfica, la recta que une dichos puntos tiene por ecuación cartesiana

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \tag{1.3}$$

Así pues, el cociente incremental

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

representa la pendiente de la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Obsérvese que, teniendo en cuenta la definición de tangente de un ángulo, resulta además que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \operatorname{tg}\alpha,$$

siendo α el ángulo que forma tal recta secante con el eje OX (véase la Figura 1.4).

Por tanto, si f es derivable en $x = a$ y el punto $(b, f(b))$ se hace tender hacia el punto $(a, f(a))$ a lo largo de la curva $y = f(x)$, entonces las rectas secantes (1.3) tienden a la recta tangente a la curva de ecuación $y = f(x)$ en el punto $x = a$. Dado que el límite del cociente incremental

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

cuando $b \to a$ es precisamente el valor de la derivada $f'(a)$, resulta que *la recta tangente a una curva* $y = f(x)$ *en un punto* $x = a$ *tiene por ecuación*

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

Más aún, si α es el ángulo que forma dicha recta tangente con el eje OX entonces, atendiendo al comentario anterior, encontramos que $\operatorname{tg}\alpha = f'(a)$ (Figura 1.4).

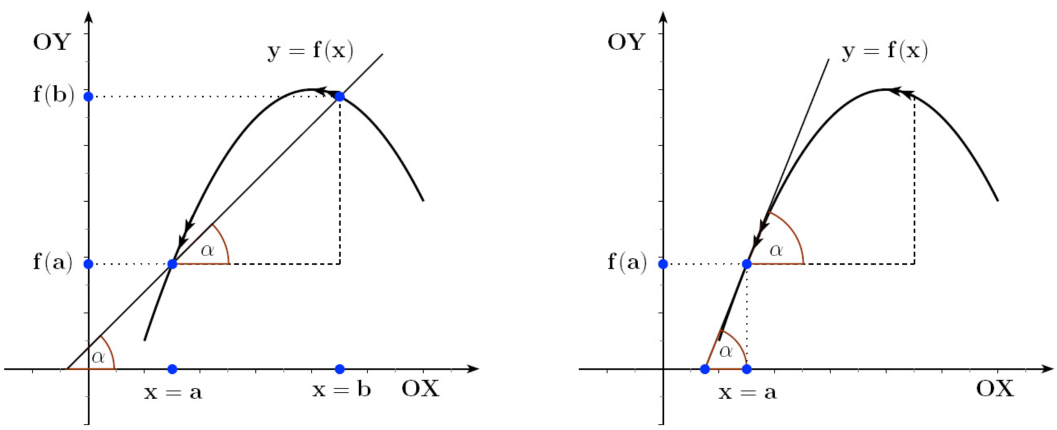


Figura 1.4. Rectas secante a la curva $y = f(x)$ por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ (i) y tangente en $(a, f(a))$ (d).

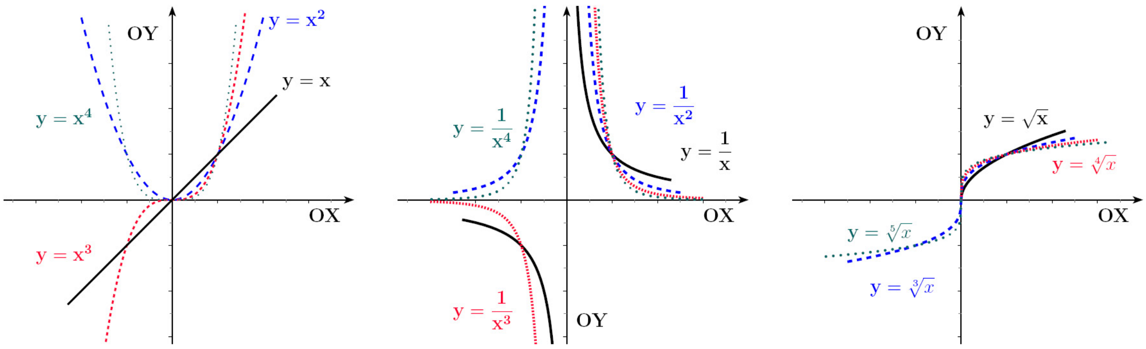


Figura 2.1. Gráficas de algunas funciones potenciales.

2. Derivadas de funciones elementales

La definición de derivada como límite del cociente incremental (Definición 1.7) permite obtener diversas *reglas de derivación* para tipos especiales de funciones. Estas reglas permiten simplificar y mecanizar el cálculo de derivadas. A continuación mostramos algunos ejemplos elementales.

2.1. Funciones potenciales

Ejemplo 2.1. $f(x) = x^a \ (a \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a x^{a-1}$.

Véase la Figura 2.1. Como ejemplos particulares tenemos:

$$y = 1 = x^0 \longrightarrow y' = 0;$$

$$y = x^5 \longrightarrow y' = 5x^4;$$

$$y = \sqrt{x} = x^{1/2} \longrightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \longrightarrow y' = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4};$$

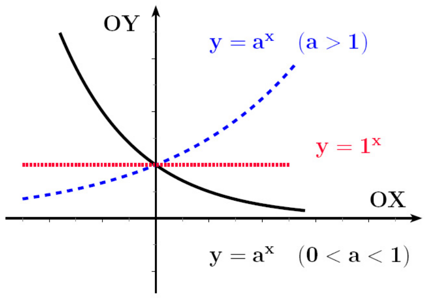
$$y = \sqrt[7]{x^3} = x^{3/7} \longrightarrow y' = \frac{3}{7}x^{-4/7} = \frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}}.$$

2.2. Funciones exponenciales

Ejemplo 2.2. $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ $\quad\Rightarrow\quad$ $f'(x) = a^x \ln a$.

Es conveniente recordar que la función exponencial de base $a > 0$ se relaciona con la función exponencial de base el número $e = 2.718281\ldots$ (base del logaritmo neperiano) mediante la expresión $a^x = e^{x \ln a}$.

Veamos algunos ejemplos particulares.



$$y = e^x \longrightarrow y' = e^x;$$

$$y = 2^x \longrightarrow y' = 2^x \ln 2;$$

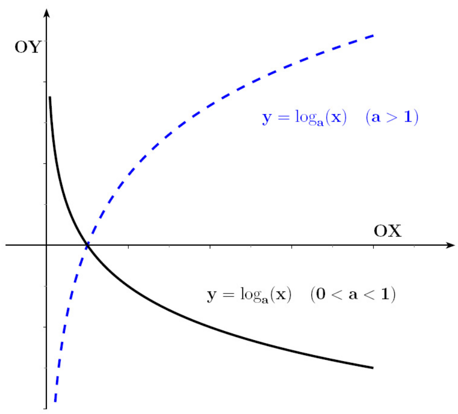
$$y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \longrightarrow y' = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\frac{1}{2} = -2^{-x}\ln 2.$$

Figura 2.2. Funciones exponenciales.

2.3. Funciones logarítmicas

Ejemplo 2.3. $f(x) = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ $\quad\Rightarrow\quad$ $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

En este caso es oportuno recordar la expresión del cambio de base en los logaritmos, de tal suerte que $\log_a(x) = \ln x / \ln a$. A modo de ejemplo:



$$y = \ln x = \log_e x \longrightarrow y' = \frac{1}{x};$$

$$y = \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2} \longrightarrow y' = \frac{1}{x \ln 2}.$$

Figura 2.3. Funciones logarítmicas.

2.4. Funciones trigonométricas y sus inversas

Ejemplo 2.4.

$$y = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x \qquad\qquad y = \operatorname{arc\,sen} x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\operatorname{sen} x \qquad\qquad y = \arccos x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad\qquad y = \operatorname{arc\,tg} x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

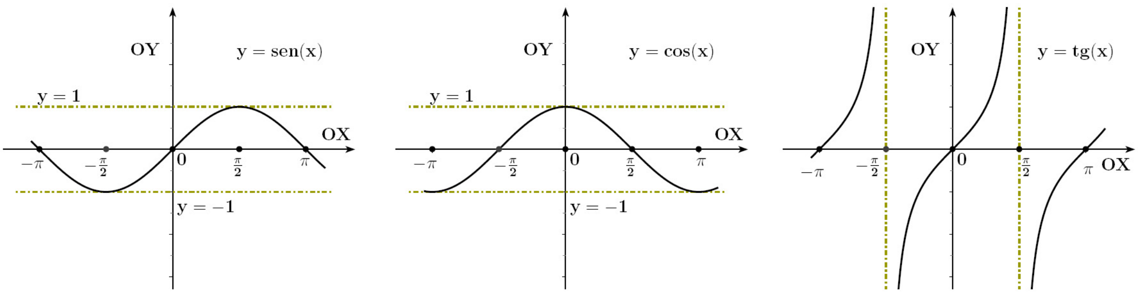


Figura 2.4. Funciones trigonométricas.

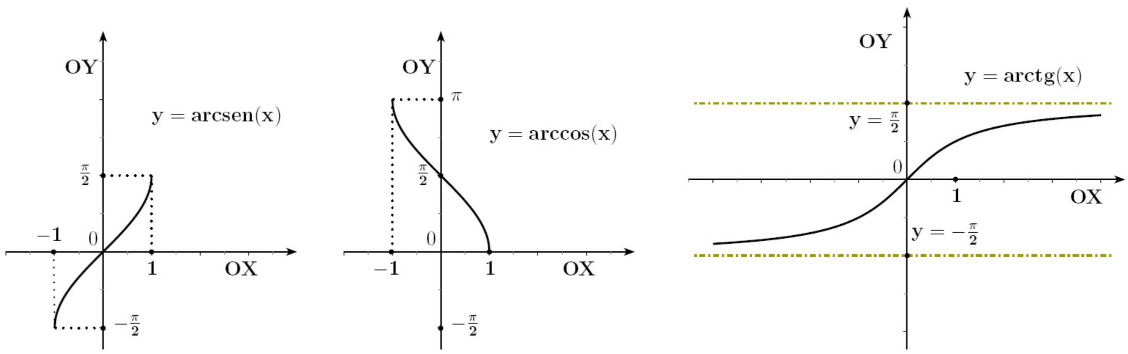


Figura 2.5. Funciones trigonométricas inversas.

3. Propiedades de la derivada

Las siguientes propiedades permiten simplificar considerablemente el cálculo de derivadas, evitando en muchos casos la utilización de la Definición 1.7.

3.1. Linealidad

Proposición 3.1. $(a\,f)'(x) = a\,f'(x)\ (a \in \mathbb{R}), \quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$

DEMOSTRACIÓN. La justificación teórica de estas propiedades es bastante asequible; en efecto:

$$\begin{aligned}(a\,f)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{a\,f(x+h) - a\,f(x)}{h}\\ &= a\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= a\,f'(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)] - [f(x)+g(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x)+g'(x).\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.2. *La derivada de la función* $y = 3x^5 + 4x - 1 - \dfrac{2}{x^3} + 4\sqrt[5]{x}$ *es*

$$y' = 15x^4 + 4 + 6x^{-4} + \frac{4}{5}x^{-4/5} = 15x^4 + 4 + \frac{6}{x^4} + \frac{4}{5\sqrt[5]{x^4}}.$$

3.2. Derivada de un producto de funciones

Proposición 3.3. $(f\,g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).$

DEMOSTRACIÓN. Veamos cómo probar esta propiedad de modo general:

$$\begin{aligned}(f\,g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h)] + [f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.4. La derivada de la función $y = x^2 \ln x$ es:

$$y' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x = x(2 \ln x + 1).$$

3.3. Derivada de un cociente de funciones

Proposición 3.5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}.$

DEMOSTRACIÓN. Para justificar esta propiedad podemos tener en cuenta que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)\, g(x) - f(x)\, g(x+h)}{g(x+h)\, g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)\, g(x) - f(x)\, g(x)] - [f(x)\, g(x+h) - f(x)\, g(x)]}{g(x+h)\, g(x)\, h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)\, g(x)} \left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\, g(x) - f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\
&= \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.6. La derivada de la función $y = (\operatorname{tg} x)/x$ es:

$$y' = \frac{x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \cdot \operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{1}{x \cos^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}.$$

Ejemplo 3.7. La derivada de la función $y = (x^2+1)/(x+1)$ es:

$$y' = \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2+1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}.$$

3.4. Derivada de la composición de funciones

Proposición 3.8. *Esta propiedad se conoce comúnmente como* regla de la cadena*:*

$$y = f[g(x)] \quad \Rightarrow \quad y' = f'[g(x)]\, g'(x).$$

DEMOSTRACIÓN. La justificación teórica de la regla de la cadena es algo más complicada que la de las anteriores propiedades, aunque podemos tener en cuenta el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
(f[g(x)])' &= \lim_{h\to 0} \frac{f[g(x+h)]-f[g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f[g(x+h)]-f[g(x)]}{g(x+h)-g(x)} \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{v\to 0} \frac{f[g(x)+v]-f[g(x)]}{v}\, g'(x) \\
&= f'[g(x)]\, g'(x),
\end{aligned}$$

donde hemos efectuado el cambio $v = g(x+h)-g(x)$. □

Ejemplo 3.9. *La derivada de la función* $y = \mathrm{sen}(x^2+3x)$ *es:*

$$y' = (x^2+3x)' \cos(x^2+3x) = (2x+3)\cos(x^2+3x).$$

Ejemplo 3.10. *La derivada de la función* $y = \sqrt{(x+1)/(x-1)}$ *es:*

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Ejemplo 3.11. *La derivada de la función* $y = [f(x)]^a$ $(a \in \mathbb{R})$ *es* $y' = a\, f(x)^{a-1}\, f'(x)$.

Ejemplo 3.12. *La derivada de la función* $y = a^{f(x)}$ $(a > 0)$ *es* $y' = a^{f(x)} \ln a\, f'(x)$.

3.5. Derivada de la función potencial-exponencial

Proposición 3.13. $y = f(x)^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = f(x)^{g(x)}\, g'(x) \ln f(x) + f(x)^{g(x)-1}\, g(x)\, f'(x).$

DEMOSTRACIÓN. En este caso, dada la complejidad de la fórmula de derivación, es aconsejable tener en cuenta el proceso por el cual se deduce dicha fórmula. En efecto, vemos que dicha expresión para la derivada se obtiene sin más que aplicar logaritmos y la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
y(x) = f(x)^{g(x)} \quad &\Rightarrow \quad \ln y(x) = g(x)\,\ln f(x) \\
&\Rightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = g'(x)\,\ln f(x) + g(x)\,\frac{f'(x)}{f(x)} \\
&\Rightarrow \quad y'(x) = y(x)\left[g'(x)\,\ln f(x) + g(x)\,\frac{f'(x)}{f(x)}\right] \\
&\Rightarrow \quad y'(x) = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\,\ln f(x) + g(x)\,\frac{f'(x)}{f(x)}\right] \\
&\Rightarrow \quad y'(x) = f(x)^{g(x)}\,g'(x)\,\ln f(x) + f(x)^{g(x)-1}\,g(x)\,f'(x).
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.14. *Obtener la derivada de la función* $y = (x^2+1)^{x^2+1}$.

RESOLUCIÓN.

$$\begin{aligned}
y = (x^2+1)^{x^2+1} \quad &\Rightarrow \quad \ln y(x) = (x^2+1)\,\ln(x^2+1) \\
&\Rightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = 2x\,\ln(x^2+1) + (x^2+1)\,\frac{2x}{x^2+1} = 2x\,[1+\ln(x^2+1)] \\
&\Rightarrow \quad y'(x) = (x^2+1)^{x^2+1}\,2x\,[1+\ln(x^2+1)].
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.15. *Calcular la derivada de* $y = x^{x^x}$.

RESOLUCIÓN. Comenzamos calculando la derivada del exponente $z(x) = x^x$:

$$\begin{aligned}
z(x) = x^x \quad &\Rightarrow \quad \ln z(x) = x\,\ln x \\
&\Rightarrow \quad \frac{z'(x)}{z(x)} = \ln x + x\,\frac{1}{x} = \ln x + 1 \\
&\Rightarrow \quad z'(x) = z(x)(1+\ln x).
\end{aligned}$$

Por tanto, para la derivada de la función de partida $y = x^{x^x}$ tendremos

$$
\begin{aligned}
y(x) = x^{z(x)} \quad &\Rightarrow \quad \ln y(x) = z(x)\,\ln x \\
&\Rightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = z'(x)\,\ln x + z(x)\,\frac{1}{x} \\
&\Rightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = z(x)\,(1+\ln x)\,\ln x + z(x)\,\frac{1}{x} = z(x)\,\left[(1+\ln x)\,\ln x + \frac{1}{x}\right] \\
&\Rightarrow \quad y'(x) = y(x)\,z(x)\,\left[(1+\ln x)\,\ln x + \frac{1}{x}\right] \\
&\Rightarrow \quad y'(x) = x^{x^x+x}\left[(1+\ln x)\,\ln x + \frac{1}{x}\right].
\end{aligned}
$$

□

4. Algunas aplicaciones del cálculo diferencial

Ya sabemos que dada una función $f(x)$ y un punto $x = a$, la derivada $f'(a)$ se puede interpretar como:

- la tasa de variación instantánea de $f(x)$ en el punto $x = a$;
- la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

Veamos a continuación algunos otros usos de la derivación.

4.1. Cálculo de valores aproximados

Dado que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

podemos considerar que, para h suficientemente pequeño, el cociente incremental

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

aproxima con cierta precisión a $f'(a)$ (de hecho, es una *aproximación de primer orden*):

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \simeq f'(a) \quad (h \to 0).$$

Así pues, si se conocen de antemano los valores exactos de $f(a)$ y $f'(a)$ podemos estimar el valor $f(a+h)$ según la relación

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)\,h \quad (h \to 0). \tag{4.1}$$

Esta última expresión nos dice que el valor $f(a+h)$ se aproxima considerando el punto con abscisa $x = a+h$ sobre la recta tangente en $x = a$ a la curva $y = f(x)$ (Figura 4.1).

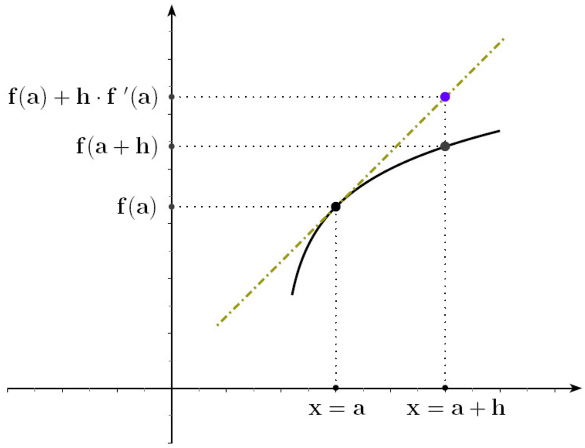


Figura 4.1.

Poniendo $(\Delta f)(a) = f(a+h) - f(a)$ y $\Delta a = h$, podemos reescribir (4.1) en la forma

$$(\Delta f)(a) \simeq f'(a)\,\Delta a. \tag{4.2}$$

Definición 4.1. *El segundo miembro de (4.2) se denomina* diferencial de f *en el punto a y se denota $df(a)$:*

$$df(a) = f'(a)\,\Delta a.$$

Así, (4.2) se convierte en

$$(\Delta f)(a) \simeq df(a).$$

Nótese que si $f(x) = x$ entonces $df(a) = \Delta a$, relación que se acostumbra a expresar como $da = \Delta a$. De esta manera,

$$df(a) = f'(a)\,da.$$

Ejemplo 4.2. *Usando diferenciales, aproximar los valores de: a)* $\sqrt[3]{25}$*; b)* $\ln(1.12)$*; c)* $\operatorname{sen} 31^\circ$.

RESOLUCIÓN.

a) Conocemos de modo exacto que $\sqrt[3]{27} = 3$. Esto sugiere considerar $f(x) = \sqrt[3]{x}$, el punto $a = 27$ y el incremento $h = -2$, de tal modo que para el valor pedido se tiene

$$\sqrt[3]{25} = f(25) = f(a+h).$$

Así pues, aproximamos

$$\sqrt[3]{25} \simeq f(27) + f'(27)\,h = f(27) - 2\,f'(27).$$

Dado que

$$f(a) = 3, \quad f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad f'(27) = \frac{1}{3 \cdot 3^2} = \frac{1}{27},$$

llegamos finalmente a la aproximación

$$\sqrt[3]{25} \simeq 3 - \frac{2}{27} = \frac{79}{27}.$$

Podemos comparar tanto el valor exacto como su aproximación con los que proporciona la calculadora:

$$\sqrt[3]{25} = 2.924017738\ldots, \quad \frac{79}{27} = 2.925925925\ldots,$$

constatando que la aproximación provee tres cifras significativas válidas.

b) En este segundo caso, sabemos que $\ln 1 = 0$. Así pues, tomamos $f(x) = \ln x$, $a = 1$ y $h = 0.12$. En consecuencia, teniendo en cuenta que $f'(x) = 1/x$ y $f'(1) = 1$, consideramos la aproximación

$$\ln 1.12 \simeq f(1) + f'(1)\,h = 0.12.$$

Computando $\ln 1.12 = 0.1133286853\ldots$ observamos que en este caso la aproximación sólo proporciona una cifra significativa válida.

c) Para estimar $\operatorname{sen} 31^\circ$ debemos tener en cuenta que la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y su derivada $f'(x) = \cos x$ se han obtenido trabajando con ángulos medidos en radianes.

Conocemos el valor

$$\operatorname{sen}(30^\circ) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = f\left(\frac{\pi}{6}\right),$$

así como

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Luego, con

$$a = \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad h = 1^\circ = \frac{\pi}{180},$$

tendremos que

$$\operatorname{sen}31^\circ = \operatorname{sen}\frac{31\pi}{180} \simeq f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right) h = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\pi}{180} = 0.5151149947\ldots$$

Comparando con el valor exacto

$$\operatorname{sen}\frac{31\pi}{180} = 0.5150380749\ldots,$$

observamos que se obtiene una aproximación con tres cifras significativas válidas.

□

4.2. Crecimiento y decrecimiento: extremos relativos de una función

Debemos distinguir en primer lugar entre *extremos relativos* de una función, frente a *extremos absolutos*. En el primer caso, nos referimos a puntos donde la función alcanza valores máximo o mínimo pero con carácter local, esto es, en entornos pequeños de dichos puntos. Más formalmente, estaremos ante un extremo relativo si la función pasa de ser creciente a decreciente, o viceversa, en dicho punto. Por otra parte, aludimos a extremos absolutos para referirnos a puntos en los que la función alcanza su valor máximo o mínimo de modo global en todo un intervalo (o, incluso, en su dominio de definición).

Definición 4.3. *El punto $x = c$ es un*

- máximo relativo *de la función f si $f(x) \leq f(c)$ siempre que $x \in [c-\delta, c+\delta]$, para algún $\delta > 0$;*
- mínimo relativo *de la función f si $f(c) \leq f(x)$ siempre que $x \in [c-\delta, c+\delta]$, para algún $\delta > 0$.*

Definición 4.4. *El punto $x = c$ es un*

- máximo absoluto *de la función f en el intervalo $[a,b]$ si $f(x) \leq f(c)$, para todo $x \in [a,b]$;*
- mínimo absoluto *de la función f en el intervalo $[a,b]$ si $f(c) \leq f(x)$, para todo $x \in [a,b]$.*

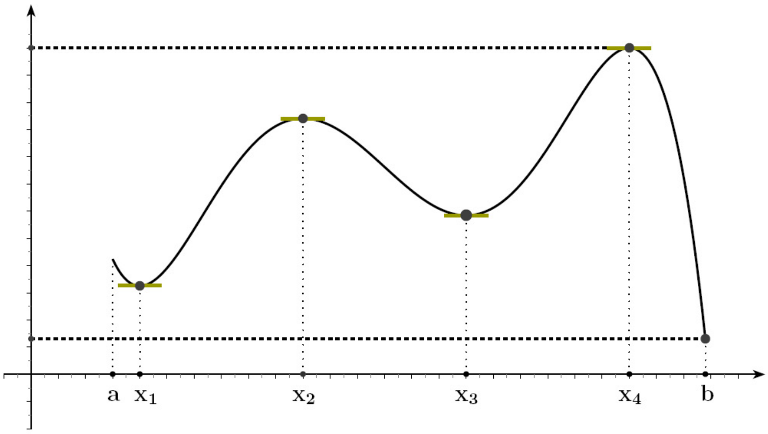


Figura 4.2. Extremos de una función: los puntos x_2 y x_4 son máximos relativos, mientras que x_1 y x_3 son mínimos relativos. Además, en el intervalo $[a,b]$, f alcanza máximo absoluto en $x = x_4$ y mínimo absoluto en $x = b$.

Observación 4.5. *i)* *Para obtener los máximos y mínimos absolutos de una función continua en un intervalo $[a,b]$ tendremos que estudiar tanto sus máximos y mínimos relativos como el valor de la función en los extremos $x = a$ y $x = b$ de dicho intervalo.*

ii) *Si $x = c$ es un extremo relativo de $f(x)$ –y f es derivable–, entonces la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en dicho punto tiene pendiente $m = 0$ (esto es, la tangente es paralela al eje OX). Por lo tanto:*

$$x = c \text{ extremo relativo de } f \quad \Rightarrow \quad f'(c) = 0.$$

iii) *Puede darse el caso de puntos $x = c$ para los que $f'(c) = 0$ y, sin embargo, $x = c$ no sea ni máximo ni mínimo relativo de f. Este tipo de puntos se denominan* puntos de inflexión*, y determinan un cambio en la curvatura local de la función.*

iv) *Aquellos puntos $x = c$ que anulan la derivada $f'(c) = 0$ se dicen* puntos críticos*, y, como hemos indicado, pueden tratarse de máximos/mínimos relativos, o bien de puntos de inflexión.*

Podemos entonces clasificar la tipología de un punto crítico $x = c$ atendiendo al signo de la primera deriva-

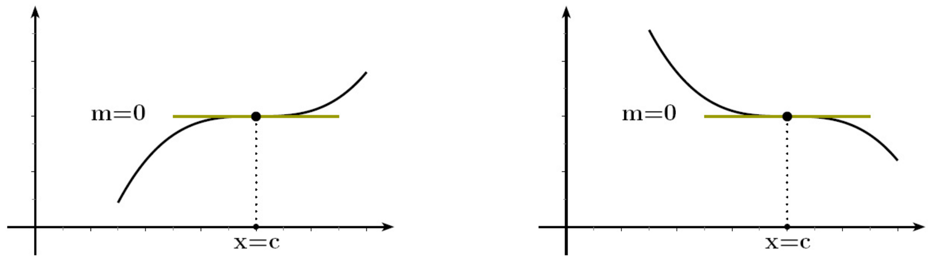


Figura 4.3. Puntos de inflexión con $f'(c) = 0$.

da (o derivadas superiores) de la función f en entornos suficientemente pequeños del punto crítico. Así pues, podremos clasificar un punto crítico en función de dos criterios: estudiando localmente el signo de la derivada primera, o bien analizando el signo de las derivadas sucesivas en el punto crítico.

4.2.1. Estudio local del signo de la derivada primera

En primer lugar, tengamos en cuenta que si $f'(a) > 0$, entonces la recta tangente en el punto $x = a$ tiene pendiente positiva, y la curva $y = f(x)$ es estrictamente creciente en un entorno del punto:

$$f'(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(a-\delta) \leq f(a) \leq f(a+\delta), \quad 0 \leq \delta \ll 1.$$

Del mismo modo, si $f'(a) < 0$, entonces la recta tangente en el punto $x = a$ tiene pendiente negativa, y la curva $y = f(x)$ es estrictamente decreciente en un entorno del punto:

$$f'(a) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(a-\delta) \geq f(a) \geq f(a+\delta), \quad 0 \leq \delta \ll 1.$$

En definitiva, disponemos del siguiente criterio:

Proposición 4.6. *i)* *Si $f' < 0$ a la izquierda de $x = c$, y $f' > 0$ a la derecha de $x = c$, entonces $x = c$ es un mínimo relativo de f (la función pasa de ser decreciente a creciente en un entorno de dicho punto).*

ii) *Si $f' > 0$ a la izquierda de $x = c$, y $f' < 0$ a la derecha de $x = c$, entonces $x = c$ es un máximo relativo de f (la función pasa de ser creciente a decreciente en dicho punto).*

iii) *Si f' no cambia de signo en un entorno del punto crítico $x = c$, entonces dicho punto es un punto de inflexión.*

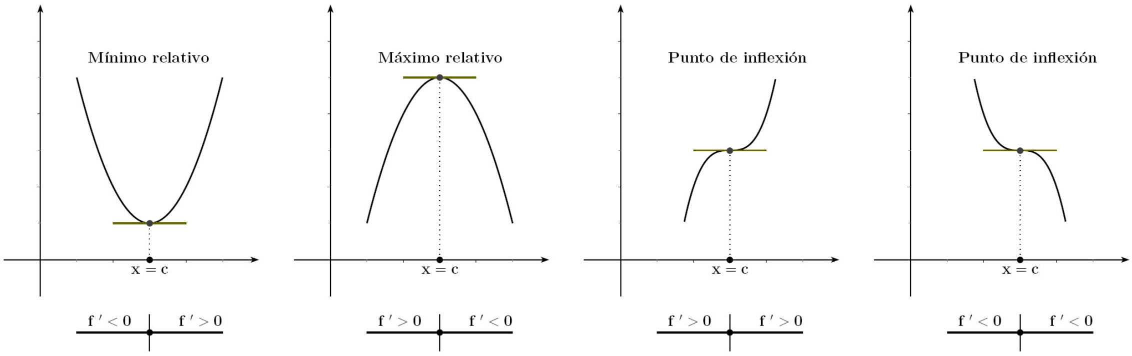


Figura 4.4. Extremos relativos y puntos de inflexión.

Ejemplo 4.7. Analizar los puntos críticos de la función

$$f(x) = 2x + \frac{800}{x}.$$

RESOLUCIÓN. Calculemos en primer lugar los puntos críticos de f, teniendo en cuenta que

$$f'(x) = 2 - \frac{800}{x^2}.$$

Se tiene:

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 400 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm 20.$$

La factorización

$$f'(x) = 2\left(1 - \frac{20}{x}\right)\left(1 + \frac{20}{x}\right)$$

permite estudiar el signo de $f'(x)$ alrededor de $x = -20$ y $x = 20$.

- Respecto al punto crítico $x = -20$: si $x < -20$, entonces $f'(x) > 0$; mientras que si $-20 < x < 0$, entonces $f'(x) < 0$. Luego la función pasa de ser creciente a decreciente en dicho punto, y por tanto éste es un máximo relativo de la función.
- Respecto al punto crítico $x = 20$: si $0 < x < 20$, entonces $f'(x) < 0$; mientras que si $x > 20$, entonces $f'(x) > 0$. Luego la función pasa de ser decreciente a creciente en dicho punto, y por tanto éste es un mínimo relativo de la función.

□

Ejemplo 4.8. Analizar los puntos críticos de la función $f(x) = x^7$.

RESOLUCIÓN. Dado que $f'(x) = 7x^6$, la función sólo posee el punto crítico $x = 0$. Además, la función derivada es positiva tanto a la izquierda como a la derecha de $x = 0$. Luego, $x = 0$ es un punto de inflexión. □

4.2.2. Estudio del signo de las derivadas sucesivas en el punto crítico

Otro modo de clasificar puntos críticos consiste en estudiar las derivadas sucesivas de la función en el punto crítico. Dada una función $f(x)$, sus derivadas sucesivas $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(iv)}(x)$, …(derivadas primera, segunda, tercera, cuarta, …), se definen de modo recurrente sin más que tener presente que f'' es la derivada primera de f', f''' la derivada primera de f'', y así sucesivamente.

Proposición 4.9. *Sea entonces un punto $x = c$ tal que $f'(c) = 0$. Tenemos el siguiente criterio de clasificación.*

$$\begin{cases} f''(c) > 0 \quad \Rightarrow \quad x = c \text{ mínimo relativo;} \\ \\ f''(c) < 0 \quad \Rightarrow \quad x = c \text{ máximo relativo.} \end{cases}$$

En el caso de que $f''(c) = 0$ debemos recurrir a la primera derivada superior que no se anule en $x = c$. Sea $n \geq 2$ el primer índice tal que $f^{(n)}(c) \neq 0$. Tenemos entonces:

$$\begin{cases} n \text{ par:} \qquad \begin{cases} f^{(n)}(c) > 0 \quad \Rightarrow \quad x = c \text{ mínimo relativo,} \\ f^{(n)}(c) < 0 \quad \Rightarrow \quad x = c \text{ máximo relativo,} \end{cases} \\ \\ n \text{ impar} \quad \Rightarrow \quad x = c \text{ punto de inflexión.} \end{cases}$$

Veamos ahora cómo responder a los mismos Ejemplos 4.7 y 4.8 haciendo uso de este segundo criterio.

Ejemplo 4.10. Analizar los puntos críticos de la función $f(x) = 2x + \dfrac{800}{x}$.

RESOLUCIÓN. Según el Ejemplo 4.7, los puntos críticos de la función son $x = \pm 20$. Ahora, para la derivada segunda tenemos

$$f''(x) = \frac{1600}{x^3}.$$

- Como $f''(-20) = -\dfrac{1600}{8000} < 0$, sigue que $x = -20$ es máximo relativo.

- Como $f''(20) = \dfrac{1600}{8000} > 0$, sigue que $x = 20$ es mínimo relativo.

$\square$

Ejemplo 4.11. Analizar los puntos críticos de la función $f(x) = x^7$.

RESOLUCIÓN. Ya sabemos, del Ejemplo 4.8, que $x = 0$ es el único punto crítico de $f(x)$. Veamos cuál es la primera derivada de orden superior que no se anula en $x = 0$:

$$\begin{array}{lcl}
f''(x) = 7\cdot 6\cdot x^5 & \longrightarrow & f''(0) = 0; \\
f'''(x) = 7\cdot 6\cdot 5\cdot x^4 & \longrightarrow & f'''(0) = 0; \\
f^{(iv)}(x) = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot x^3 & \longrightarrow & f^{(iv)}(0) = 0; \\
f^{(v)}(x) = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot x^2 & \longrightarrow & f^{(v)}(0) = 0; \\
f^{(vi)}(x) = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot x & \longrightarrow & f^{(vi)}(0) = 0; \\
f^{(vii)}(x) = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 & \longrightarrow & f^{(vii)}(0) = 5040 \neq 0.
\end{array}$$

Luego, la primera derivada no nula corresponde a $n = 7$ (impar). En consecuencia, según el segundo criterio enunciado, $x = 0$ es un punto de inflexión. $\square$

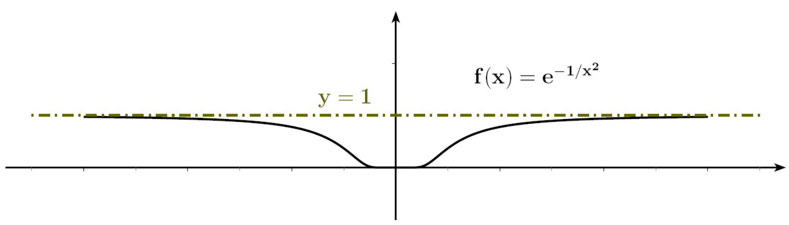


Figura 4.5.

Observación 4.12. *A pesar del criterio anterior, puede darse el caso de funciones no nulas infinitamente derivables que posean puntos críticos tales que $f^{(n)}(c) = 0$, para todo n. Un ejemplo de esta situación se da con la función $f(x) = e^{-1/x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$, que posee un punto crítico en $x = 0$, con $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 0$. Sin embargo, sí que podemos aplicar el primer criterio para concluir que $x = 0$ es un mínimo relativo (y absoluto) de la función, pues*

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$$

es negativa a la izquierda de $x = 0$ *(la función* f *decrece para* $x < 0$*) y positiva a la derecha (la función* f *crece para* $x > 0$*). Véase la Figura 4.5.*