Probabilidad: problemas resueltos

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

5. Problemas resueltos

5.1. Probabilidad

Ejercicio 5.1. *Estudios sobre la depresión muestran que la aplicación de un determinado tratamiento mejora el estado del 72 % de las personas sobre las que se aplica, no produce efecto alguno en un 10 % y empeora el estado del resto. Si se trata un paciente que sufre de depresión, determinar la probabilidad de que empeore. Calcular también la probabilidad de que el tratamiento no vaya en detrimento de su estado.*

RESOLUCIÓN. Sean los sucesos:

$$A_1 = \{\text{el tratamiento mejora el estado del paciente}\},$$

$$A_2 = \{\text{el tratamiento no produce efecto sobre el estado del paciente}\},$$

$$A_3 = \{\text{el tratamiento empeora el estado del paciente}\}.$$

Nótese en primer lugar que los sucesos anteriores forman un sistema completo para el experimento considerado (a saber, la administración de un tratamiento a pacientes que sufren de depresión), ya que el espacio muestral Ω puede descomponerse como:

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

Por hipótesis, $P(A_1) = 0.72$ y $P(A_2) = 0.1$. Consecuentemente

$$P(\Omega) = 1 = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3),$$

esto es:

$$1 = 0.72 + 0.1 + P(A_3),$$

de manera que la probabilidad de que un paciente que sufre de depresión empeore con el tratamiento resulta ser:

$$P(A_3) = 1 - 0.82 = 0.18.$$

Por otra parte, si el tratamiento no va en detrimento del estado del paciente, dicho tratamiento o bien mejora, o bien no produce efecto sobre el estado del mismo. Luego, escribiendo

$$B = \{\text{el tratamiento no va en detrimento del paciente}\},$$

se verifica que

$$B = A_1 \cup A_2 = A_3^c,$$

y por tanto

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0.82$$

(pues $A_1 \cap A_2 = \emptyset$), o bien

$$P(B) = P(A_3^c) = 1 - P(A_3) = 1 - 0.18 = 0.82.$$

□

5.2. Teorema de Bayes

Ejercicio 5.2. *Dos tratamientos A y B curan una determinada enfermedad en un 20% y en un 30% de los casos, respectivamente. Suponiendo que ambos actúan de modo independiente, ¿cuál de las dos estrategias siguientes es mejor?*

a) *Aplicar ambos tratamientos a la vez.*

b) *Aplicar primero el tratamiento B, y si no surte efecto aplicar el tratamiento A.*

RESOLUCIÓN. Sean los sucesos:

$$A = \{\text{el tratamiento } A \text{ cura una determinada enfermedad}\},$$
$$B = \{\text{el tratamiento } B \text{ cura la misma enfermedad}\}.$$

Por hipótesis sabemos que $P(A) = 0.2$ y $P(B) = 0.3$.

a) Consideramos en primer lugar la estrategia de aplicar ambos tratamientos a la vez. La probabilidad que tiene dicha estrategia de curar la enfermedad viene dada por

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

pues al aplicar ambos tratamientos a la vez, o bien actúa uno, o bien el otro, o bien los dos al mismo tiempo.

Ahora bien, se supone que los tratamientos actúan de manera independiente, por lo que

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) = 0.2\cdot 0.3 = 0.06,$$

y entonces

$$P(A\cup B) = 0.2+0.3-0.06 = 0.44.$$

Luego, los dos tratamientos aplicados a la vez curan la enfermedad en un 44 % de los casos.

b) Si aplicamos primero el tratamiento B, puede ocurrir que éste cure la enfermedad o no. Si cura la enfermedad, esta estrategia tiene probabilidad $P(B) = 0.3$. Si el tratamiento B no surte efecto entonces aplicamos el tratamiento A, cuya probabilidad de curación es $P(A) = 0.2$. Por tanto, esta estrategia tiene una probabilidad de curar la enfermedad de

$$\text{máx}\{P(A),P(B)\} = \text{máx}\{0.2,0.3\} = 0.3.$$

En conclusión, podemos afirmar que la primera estrategia es mejor que la segunda, con un 14 % más de éxitos.

OBSERVACIÓN. El apartado *b*) también puede resolverse mediante probabilidades condicionadas.

Ciertamente, la probabilidad de la segunda estrategia viene dada por

$$\text{máx}\{P(B),P(A/B^c)\},$$

pues el tratamiento A se aplica una vez se sabe que el tratamiento B no ha funcionado.

En general, dados dos sucesos independientes A y B cualesquiera, se verifica que A y B^c son también independientes. En efecto, si $P(B) = 1$ entonces $P(B^c) = 0$, así que $P(A\cap B^c) = 0$ y

$$P(B^c/A) = \frac{P(A\cap B^c)}{P(A)} = 0 = P(B^c).$$

Si $P(B)\neq 1$, aplicando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(A) = P(B)\cdot P(A/B)+P(B^c)\cdot P(A/B^c).$$

Pero $P(A/B) = P(A)$, porque A y B son independientes. Luego,

$$\begin{aligned} & P(A) = P(B) \cdot P(A) + P(B^c) \cdot P(A/B^c) \\ \Rightarrow \quad & P(A) - P(B) \cdot P(A) = P(B^c) \cdot P(A/B^c) \\ \Rightarrow \quad & [1 - P(B)] \cdot P(A) = P(B^c) \cdot P(A/B^c). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $P(B^c) = 1 - P(B) \neq 0$ resulta

$$P(A) = P(A/B^c).$$

Queda así probado que A y B^c son independientes, como se pretendía.

Atendiendo a esta propiedad, encontramos que la probabilidad de la segunda estrategia es:

$$\text{máx}\{P(B), P(A/B^c)\} = \text{máx}\{P(B), P(A)\} = 0.3.$$

□

Ejercicio 5.3. *Se estima que el 15 % de la población adulta padece de hipertensión, pero que el 75 % de todos los adultos creen no tener este problema. Se estima también que el 6 % de la población tiene hipertensión aunque no es consciente de padecerla. Si un paciente adulto opina que no tiene hipertensión, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea hipertenso?*

RESOLUCIÓN. Consideramos los sucesos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{el paciente tiene hipertensión}\}, \\ A_2 &= \{\text{el paciente no tiene hipertensión}\}, \end{aligned}$$

los cuales forman un sistema completo. Por hipótesis $P(A_1) = 0.15$, luego $P(A_2) = 0.85$.

Por otra parte, consideramos los sucesos:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\text{el paciente es consciente de padecer hipertensión}\}, \\ B_2 &= \{\text{el paciente no es consciente de padecer hipertensión}\}. \end{aligned}$$

Conjugando los datos del problema con el hecho de que B_1 y B_2 son complementarios encontramos que $P(B_1) = 0.25$ y $P(B_2) = 0.75$.

Por hipótesis se tiene que $P(B_2/A_1) = 0.06$. La probabilidad de que un paciente adulto sea realmente hipertenso cuando opina que no tiene hipertensión (esto es, no es consciente de padecerla) viene dada por $P(A_1/B_2)$. En virtud del Teorema de Bayes, esta probabilidad *a posteriori* puede ser calculada como:

$$P(A_1/B_2) = \frac{P(A_1) \cdot P(B_2/A_1)}{P(B_2)} = \frac{0.15 \cdot 0.06}{0.75} = 0.012.$$

Podemos concluir entonces que un 1.2 % de los pacientes que opinan que no padecen de hipertensión son realmente hipertensos. □

Ejercicio 5.4. *Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus A, B, C. En un laboratorio se tienen tres tubos con el virus A, dos con el B y cinco con el C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es* $1/3$*, que la produzca B es* $2/3$ *y que la produzca C es* $1/7$*.*

a) *Si se inocula algún virus a un animal, ¿cuál es la probabilidad de que éste contraiga la enfermedad?*

b) *Si se inocula un virus a un animal y contrae la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que el virus inyectado fuera C?*

RESOLUCIÓN. Estamos considerando el experimento de inocular alguno de los tres virus disponibles en el laboratorio a un determinado animal. Los posibles resultados del experimento son dos: que el animal contraiga la enfermedad, o que no la contraiga.

Sean los sucesos:

$$A = \{\text{el animal es inoculado con virus del tipo } A\},$$

$$B = \{\text{el animal es inoculado con virus del tipo } B\},$$

$$C = \{\text{el animal es inoculado con virus del tipo } C\}.$$

Al tener una muestra de 10 tubos y ser equiprobable la elección de éstos, las probabilidades de los sucesos anteriores vienen dadas por:

$$P(A) = \frac{3}{10}, \quad P(B) = \frac{2}{10}, \quad P(C) = \frac{5}{10}.$$

a) Consideramos ahora el suceso

$$E = \{\text{el animal contrae la enfermedad}\}.$$

Como consecuencia del Teorema de la Probabilidad Total y del hecho de que A, B y C forman un sistema completo de sucesos, se tiene:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A)\cdot P(E/A) + P(B)\cdot P(E/B) + P(C)\cdot P(E/C) \\ &= \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{3} + \frac{5}{10}\cdot\frac{1}{7} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{2}{15} + \frac{1}{14} \\ &= \frac{32}{105} \quad \simeq \quad 0.305, \end{aligned}$$

pues por hipótesis la probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es $P(E/A) = 1/3$, de que la produzca B, $P(E/B) = 2/3$ y de que la produzca C, $P(E/C) = 1/7$.

b) Por otra parte, si sabemos que el animal contrae la enfermedad, en virtud del Teorema de Bayes la probabilidad *a posteriori* $P(C/E)$ de que el animal haya sido infectado por el virus C viene dada por:

$$P(C/E) = \frac{P(C)\cdot P(E/C)}{P(E)} = \frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{7}}{\frac{32}{105}} = \frac{15}{64} \simeq 0.234.$$

Podemos concluir, por tanto, que en el 23.4 % de los casos en que un animal haya contraído la enfermedad, ésta ha sido producida por el virus C. □

Ejercicio 5.5. *En química clínica son particularmente interesantes los llamados coeficientes falso-positivo y falso-negativo de un test. Tales coeficientes son probabilidades condicionadas. El* coeficiente falso-positivo *es la probabilidad de que el contraste resulte positivo cuando de hecho el sujeto no padece la dolencia. El* coeficiente falso-negativo *se define de manera análoga. Es decir:*

α = *coeficiente falso-positivo* = $P($*el test da* $+$ / *el sujeto es en realidad* $-)$,

β = *coeficiente falso-negativo* = $P($*el test da* $-$ / *el sujeto es en realidad* $+)$.

Cada una de estas probabilidades es una probabilidad de error; por tanto, cabe esperar que los valores obtenidos en la práctica sean próximos a cero.

Los resultados siguientes se obtuvieron en un estudio diseñado con el fin de averiguar la capacidad de *un cirujano patólogo para clasificar correctamente las biopsias quirúrgicas como malignas o benignas:*

	positivo (MALIGNO)	*negativo* (BENIGNO)
CIERTO MALIGNO	79	19
CIERTO BENIGNO	7	395

Determinar α y β a partir de estos datos.

RESOLUCIÓN. Obsérvese que de acuerdo con la tabla anterior, un diagnóstico positivo corresponde a una clasificación de la biopsia como maligna. Los datos de dicha tabla arrojan los siguientes resultados:

- Número de casos estudiados: $79+19+7+395 = 500$.
- Número de casos malignos: $79+19 = 98$.
- Número de casos benignos: $7+395 = 402$.
- Número de casos con diagnóstico positivo: $79+7 = 86$.
- Número de casos con diagnóstico negativo: $19+395 = 414$.

Estamos interesados en calcular los coeficientes falso-positivo α y falso-negativo β para los casos estudiados. A tal fin, sean los sucesos:

$$T^+ = \{\text{el diagnóstico es positivo}\},$$
$$T^- = \{\text{el diagnóstico es negativo}\}.$$

Al ser equiprobable cada caso estudiado, según los datos inferidos de la tabla encontramos que

$$P(T^+) = \frac{86}{500} \quad \text{y} \quad P(T^-) = \frac{414}{500}.$$

Asimismo, sean:

$$R^+ = \{\text{la biopsia es en realidad maligna}\},$$
$$R^- = \{\text{la biopsia es en realidad benigna}\}.$$

De modo similar se tiene que

$$P(R^+) = \frac{98}{500} \quad \text{y} \quad P(R^-) = \frac{402}{500}.$$

Por definición,

$$\alpha = P(T^+/R^-) = \frac{P(T^+ \cap R^-)}{P(R^-)},$$

$$\beta = P(T^-/R^+) = \frac{P(T^- \cap R^+)}{P(R^+)}.$$

Ahora bien, el número de casos con biopsia benigna clasificados como positivos es de 7, por lo que

$$P(T^+ \cap R^-) = \frac{7}{500}.$$

De igual manera,

$$P(T^- \cap R^+) = \frac{19}{500}.$$

Consecuentemente,

$$\alpha = \frac{\frac{7}{500}}{\frac{402}{500}} = \frac{7}{402} = 0.017,$$

$$\beta = \frac{\frac{19}{500}}{\frac{98}{500}} = \frac{19}{98} = 0.194.$$

Como conclusión podríamos decir que el cirujano patólogo detecta la enfermedad en pacientes que no la tienen en un 1.7 %, mientras que no detecta la enfermedad en pacientes que la tienen en un 19.4 % de los casos.

OBSERVACIÓN. Para la determinación del coeficiente falso-positivo α podemos razonar también del siguiente modo. De las 402 biopsias benignas, 7 han sido falsamente clasificadas como malignas; por tanto, $\alpha = 7/402 = 0.017$. Similarmente $\beta = 19/98 = 0.194$, ya que hay 98 biopsias malignas de las cuales 19 han sido clasificadas erróneamente como benignas. □

Ejercicio 5.6. *Un test detecta la presencia de cierto tipo T de bacterias en el agua con probabilidad* 0.9*, en caso de haberlas. Si no las hay, detecta la ausencia con probabilidad de* 0.8*. Sabiendo que la probabilidad de que una muestra de agua contenga bacterias del tipo T es* 0.2*, calcular la probabilidad de que:*

a) *Realmente haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado positivo.*

b) *Realmente haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado negativo.*

c) *Haya bacterias y además el test dé positivo.*

d) *O haya bacterias, o el test dé positivo.*

RESOLUCIÓN. Consideramos los sucesos:

$$A_1 = \{\text{la muestra contiene bacterias tipo } T\},$$
$$A_2 = \{\text{la muestra no contiene bacterias tipo } T\}.$$

Nótese que ambos sucesos A_1 y A_2 forman un sistema completo, es decir, son complementarios en el espacio muestral del experimento que estamos considerando. Por hipótesis $P(A_1) = 0.2$, obligando a que

$$P(A_2) = P(A_1^c) = 1 - 0.2 = 0.8.$$

Por otra parte, sean los sucesos:

$$T^+ = \{\text{el test detecta la presencia de bacterias}\},$$
$$T^- = \{\text{el test no detecta la presencia de bacterias}\}.$$

De acuerdo con los datos disponibles, sabemos que

$$P(T^+/A_1) = 0.9 \qquad y \qquad P(T^-/A_2) = 0.8,$$

de modo que las siguientes probabilidades, correspondientes a los sucesos condicionados complementarios, vienen dadas por:

$$P(T^-/A_1) = 0.1 \qquad y \qquad P(T^+/A_2) = 0.2.$$

a) En virtud del Teorema de Bayes, la probabilidad $P(A_1/T^+)$ de que realmente haya presencia de bacterias cuando el resultado del test ha sido positivo viene dada por

$$\begin{aligned} P(A_1/T^+) &= \frac{P(A_1)\cdot P(T^+/A_1)}{P(T^+)} \\ &= \frac{P(A_1)\cdot P(T^+/A_1)}{P(A_1)\cdot P(T^+/A_1) + P(A_2)\cdot P(T^+/A_2)} \\ &= \frac{0.2\cdot 0.9}{0.2\cdot 0.9 + 0.8\cdot 0.2} \\ &= \frac{0.18}{0.34} \simeq 0.53. \end{aligned}$$

b) De igual manera, la probabilidad de que realmente haya presencia de bacterias cuando el test ha resultado negativo es

$$\begin{aligned} P(A_1/T^-) &= \frac{P(A_1)\cdot P(T^-/A_1)}{P(A_1)\cdot P(T^-/A_1)+P(A_2)\cdot P(T^-/A_2)} \\ &= \frac{0.2\cdot 0.1}{0.2\cdot 0.1+0.8\cdot 0.8} \\ &= \frac{0.02}{0.66} \quad \simeq \quad 0.03. \end{aligned}$$

c) La probabilidad de que hayan bacterias y además el test dé positivo es:

$$P(A_1\cap T^+) = P(A_1)\cdot P(T^+/A_1) = 0.2\cdot 0.9 = 0.18.$$

Nótese que, como $P(T^+) = 0.34$, también tenemos

$$P(A_1\cap T^+) = P(T^+)\cdot P(A_1/T^+) = 0.34\cdot 0.53 \simeq 0.18.$$

d) Finalmente, la probabilidad de que o bien hayan bacterias en el agua o el test dé positivo viene dada por:

$$P(A_1\cup T^+) = P(A_1)+P(T^+)-P(A_1\cap T^+) = 0.2+0.34-0.18 = 0.36.$$

□

Ejercicio 5.7. *En una campaña de erradicación de tuberculosis se somete a la población escolar a una prueba de tuberculina. Se sabe que la probabilidad de acierto sobre personas confirmadas enfermas es del* 96 %*, y la probabilidad de que el test falle con personas confirmadas sanas es del* 5 %*. Se sabe también que la dolencia la padece el* 0.1 % *de la población. Se pide:*

a) *Determinar la probabilidad de que el test detecte correctamente la presencia de la enfermedad.*

b) *Determinar la probabilidad de que el test detecte correctamente que la persona está sana.*

c) *¿Cuáles son los coeficientes falso-positivo y falso-negativo del test?*

RESOLUCIÓN. Sean los sucesos:

$$A_1 = \{\text{el paciente padece la dolencia}\},$$

$$A_2 = \{\text{el paciente no padece la dolencia}\}.$$

De acuerdo a los datos del problema, $P(A_1) = 0.001$ y, por complementación de sucesos,

$$P(A_2) = 1 - 0.001 = 0.999.$$

Sean, asimismo, los sucesos:

$$T^+ = \{\text{el resultado del test es positivo}\},$$

$$T^- = \{\text{el resultado del test es negativo}\}.$$

Conforme a los datos que nos proporcionan, sabemos que:

$$P(T^+/A_1) = 0.96 \qquad y \qquad P(T^+/A_2) = 0.05.$$

Al igual que en el Ejercicio 5.6, por tratarse de sucesos condicionados complementarios de los anteriores:

$$P(T^-/A_1) = 0.04 \qquad y \qquad P(T^-/A_2) = 0.95.$$

a) La probabilidad de que el test detecte correctamente la presencia de la enfermedad viene dada por $P(A_1/T^+)$, la cual, en virtud del Teorema de Bayes, puede ser calculada como:

$$\begin{aligned} P(A_1/T^+) &= \frac{P(A_1)\cdot P(T^+/A_1)}{P(T^+)} \\ &= \frac{P(A_1)\cdot P(T^+/A_1)}{P(A_1)\cdot P(T^+/A_1) + P(A_2)\cdot P(T^+/A_2)} \\ &= \frac{0.001\cdot 0.96}{0.001\cdot 0.96 + 0.999\cdot 0.05} \\ &= \frac{0.00096}{0.05091} \simeq 0.02. \end{aligned}$$

b) La probabilidad de que el test detecte correctamente que la persona está sana vendrá dada por:

$$\begin{aligned} P(A_2/T^-) &= \frac{P(A_2)\cdot P(T^-/A_2)}{P(A_1)\cdot P(T^-/A_1)+P(A_2)\cdot P(T^-/A_2)} \\ &= \frac{0.999\cdot 0.95}{0.001\cdot 0.04+0.999\cdot 0.95} \\ &= \frac{0.94905}{0.94909} \quad \simeq \quad 1. \end{aligned}$$

c) El coeficiente falso-positivo

$$\alpha = P(T^+/A_2) = 0.05$$

es un dato del problema, mientras que el coeficiente falso-negativo vale

$$\beta = P(T^-/A_1) = 0.04,$$

como vimos anteriormente. □

Ejercicio 5.8. *En la enfermera del doctor Martínez no se puede confiar, pues durante la ausencia del médico la probabilidad de que no le inyecte un suero a un enfermo es de* 0.6*. Se sabe que si a un enfermo grave se le inyecta el suero tiene igual probabilidad de mejorar que de empeorar, pero si no se le inyecta entonces la probabilidad de que mejore es de* 0.25*. A su regreso, el Dr. Martínez se encuentra con que un enfermo ha empeorado. ¿Cuál es la probabilidad de que la enfermera olvidara inyectar el suero a este paciente?*

RESOLUCIÓN. Sean los sucesos:

$$A_1 = \{\text{la enfermera inyecta el suero al paciente}\},$$

$$A_2 = \{\text{la enfermera no inyecta el suero al paciente}\}.$$

El enunciado indica que $P(A_2) = 0.6$. Por complementación,

$$P(A_1) = 1 - P(A_2) = 1 - 0.6 = 0.4.$$

De otra parte, sean los sucesos

$$B_1 = \{\text{el paciente empeora}\},$$
$$B_2 = \{\text{el paciente no empeora}\}.$$

Admitiendo que «no empeorar» es lo mismo que «mejorar», el enunciado del problema establece que

$$P(B_1/A_1) = P(B_2/A_1) \qquad y \qquad P(B_2/A_2) = 0.25.$$

Los sucesos complementarios B_1 y B_2 forman un sistema completo, de modo que sus intersecciones tanto con A_1 como con A_2 forman a su vez un sistema completo para los espacios probabilísticos condicionados por A_1 y A_2, respectivamente. Así pues,

$$1 = P((B_1 \cup B_2)/A_1) = P(B_1/A_1) + P(B_2/A_1).$$

Sabiendo que $P(B_1/A_1) = P(B_2/A_1)$, sigue que $P(B_1/A_1) = P(B_2/A_1) = 0.5$.

Por otro lado,

$$1 = P((B_1 \cup B_2)/A_2) = P(B_1/A_2) + P(B_2/A_2).$$

Luego

$$1 = P(B_1/A_2) + 0.25,$$

probando que $P(B_1/A_2) = 0.75$.

Como consecuencia del Teorema de Bayes, la probabilidad de que la enfermera olvidara inyectar el suero a un paciente que ha empeorado viene dada por:

$$\begin{aligned} P(A_2/B_1) &= \frac{P(A_2) \cdot P(B_1/A_2)}{P(A_1) \cdot P(B_1/A_1) + P(A_2) \cdot P(B_1/A_2)} \\ &= \frac{0.6 \cdot 0.75}{0.4 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.75} \\ &= \frac{0.45}{0.65} \simeq 0.69. \end{aligned}$$

Es decir, el 69 % de las veces nos encontramos que un paciente ha empeorado por culpa de la enfermera. □