Cálculo integral de funciones de una variable: integral indefinida

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

1. Integral indefinida

1.1. Introducción

Problema: Dada una función $f(x)$, encontrar otra, $F(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$.

Definición 1.1.1. *Si $f :]a,b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dada, y se cumple que $F'(x) = f(x)$ $(x \in]a,b[)$, se dice que $F(x)$ es una* función primitiva *de $f(x)$ en $]a,b[$.*

Teorema 1.1.2. *Dos funciones primitivas de $f(x)$ en $]a,b[$ difieren en una constante.*

Definición 1.1.3. *El conjunto de todas las funciones primitivas de $f(x)$ se denomina* integral indefinida *de $f(x)$ y se denota $\int f(x)\,dx$.*

En virtud del Teorema 1.1.2, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces cualquier otra primitiva de $f(x)$ tiene la forma $F(x)+C$ para alguna $C \in \mathbb{R}$, lo que abreviamos escribiendo

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

1.2. Tabla de integrales indefinidas

1. $\displaystyle\int x^r\,dx = \frac{x^r+1}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
4. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$
5. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
6. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
7. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$
8. $\displaystyle\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$
9. $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| + C$
10. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$

11. $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$

12. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$

13. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$

14. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$

1.3. Técnicas de integración

1.3.1. Linealidad (superposición)

$$\int \left[\sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x)\right] dx = \sum_{j=1}^{n} c_j \int f_j(x)dx.$$

1.3.2. Cambio de variable (sustitución)

Para el cálculo de $\int f(x)dx$ ponemos $x = g(t)$, donde $g \in C^1$ admite inversa: $t = g^{-1}(x)$. Entonces:

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)\,dt = \int h(t)\,dt, \quad h(t) = f[g(t)]g'(t).$$

Elegimos g de forma que la nueva integral indefinida sea más fácil de calcular. Obtenida ésta, deshacemos el cambio:

$$\int f(x)dx = \int h(t)\,dt = H(t) + C = H[g^{-1}(x)] + C = F(x) + C.$$

Ejemplo 1.3.1. $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$

RESOLUCIÓN.

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx =$$

Cambio: $\operatorname{sen} x = t,\ \cos x \, dx = dt$

$$= \int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx = \int \sqrt{t} \, dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \operatorname{sen}^{3/2} x + C.$$

□

Ejemplo 1.3.2. *(Integral 15 de la tabla)* $\int \frac{dx}{1-x^2}$

RESOLUCIÓN.

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

Cambio: $x+1 = t,\ dx = dt; \quad x-1 = s,\ dx = ds$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{ds}{s} = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{t}{s}\right| = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C.$$

□

Ejemplo 1.3.3. *(Integral 16 de la tabla)* $\int \frac{dx}{1+x^2}$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

Cambio: $x = \operatorname{tg} t,\ dx = \sec^2 t \, dt; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$

$$= \int dt = t + C = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

□

Ejemplo 1.3.4. *(Integral 17 de la tabla)* $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

Cambio: $x = \operatorname{sen} t$, $dx = \cos t \, dt$; $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

$$= \int dt = t + C = \arcsin x + C.$$

□

Ejemplo 1.3.5. *(Integral 18 de la tabla)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} =$$

Cambio: $x = \operatorname{sh} t$, $dx = \operatorname{ch} t \, dt$; $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$

$$= \int dt = t + C = \operatorname{argsh} x + C.$$

Notemos que

$$\operatorname{argsh} x = t = \ln e^t = \ln(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

□

Ejemplo 1.3.6. *(Integral 19 de la tabla)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

Cambio: $x = \operatorname{ch} t$, $dx = \operatorname{sh} t \, dt$; $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$

$$= \int dt = t + C = \operatorname{argch} x + C.$$

Notemos que

$$\operatorname{argch} x = t = \ln e^t = \ln(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t) = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|.$$

□

1.3.3. Integración por partes

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Esta fórmula se usa para integrar expresiones representables como producto de dos factores, u y dv, tales que la obtención de v a partir de dv y el cálculo de $\int v\,du$ constituyan, en conjunto, un problema de más fácil solución que el cálculo directo de $\int u\,dv$. Su principal aplicación es la integración de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas, así como el cálculo de integrales del tipo

$$\int x^k \operatorname{sen} ax\,dx, \quad \int x^k \cos ax\,dx, \quad \int x^k e^{ax}\,dx, \quad \int x^k \ln x\,dx,$$

que se efectúa mediante *fórmulas de reducción*.

Ejemplo 1.3.7. $I = \int e^{ax} \cos bx\,dx, \quad J = \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx$

RESOLUCIÓN.

$I = \int e^{ax} \cos bx\,dx$

$$\begin{aligned} e^{ax} &= u, & \cos bx\,dx &= dv; \\ ae^{ax}\,dx &= du, & \frac{1}{b}\operatorname{sen} bx &= v \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}J \tag{1.1}$$

$J = \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx$

$$\begin{aligned} e^{ax} &= u, & \operatorname{sen} bx\,dx &= dv; \\ ae^{ax}\,dx &= du, & -\frac{1}{b}\cos bx &= v \end{aligned}$$

$$J = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}I \tag{1.2}$$

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) dan lugar a un sistema lineal de dos ecuaciones en las dos incógnitas I, J:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I + \frac{a}{b}J &=& \frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx \\ \frac{a}{b}I - J &=& \frac{1}{b}e^{ax}\cos bx. \end{array} \right. \tag{1.3}$$

El valor de las integrales buscadas se obtiene resolviendo el sistema (1.3), y resulta ser:

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx),$$

$$J = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bx - b\cos bx).$$

□

Ejemplo 1.3.8. *(Fórmula de reducción)* $I_m = \displaystyle\int x^m e^{ax}\,dx \quad (m \in \mathbb{N})$

RESOLUCIÓN.

$$\begin{aligned} &x^m = u, \quad e^{ax}\,dx = dv; \\ &mx^{m-1}\,dx = du, \quad \frac{e^{ax}}{a} = v \end{aligned}$$

$$I_m = \frac{e^{ax}}{a}x^m - \frac{m}{a}\int x^{m-1}e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}x^m - \frac{m}{a}I_{m-1}. \tag{1.4}$$

Por aplicación reiterada de la fórmula (1.4) y teniendo en cuenta que

$$I_0 = \int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

obtenemos finalmente

$$I_m = \frac{e^{ax}}{a}\left[x^m - \frac{m}{a}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{a^2}x^{m-2} + \ldots + (-1)^m\frac{m!}{a^m}\right] + C.$$

□

1.3.4. Integración de ciertas funciones que contienen trinomios cuadráticos

1.3.9. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad (a \neq 0)$

Completamos cuadrados en el denominador:

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm m^2\right],$$

donde

$$\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} = \pm m^2.$$

Se toma el signo $+$ ó $-$ según que el denominador tenga raíces complejas ó reales, respectivamente.

- $m = 0$

  $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} =$$

  Cambio: $x + \dfrac{b}{2a} = t,\ dx = dt; \quad t = \dfrac{2ax+b}{2a}$

  $$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{at} + C = -\frac{2}{2ax+b} + C.$$

- $m \neq 0$

  $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm m^2} =$$

  Cambio: $x + \dfrac{b}{2a} = mt,\ dx = m\,dt; \quad t = \dfrac{2ax+b}{2ma}$

  $$= \frac{1}{ma}\int \frac{dt}{t^2 \pm 1}.$$

  - Si comparece el signo $+$ (integral 16 de la tabla):

    $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{ma}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{ma}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{2ma} + C.$$

  - Si comparece el signo $-$ (integral 15 de la tabla):

    $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2ma}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2ma}\ln\left|\frac{2ax+b-2ma}{2ax+b+2ma}\right| + C.$$

Ejemplo 1.3.10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x-5}$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{dx}{x^2-2x-5} = \int \frac{dx}{(x-1)^2-6} =$$

Cambio: $x - 1 = \sqrt{6}t,\ dx = \sqrt{6}dt; \quad t = \dfrac{x-1}{\sqrt{6}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right| + C.$$ □

1.3.11. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx \quad (a \neq 0)$

Intentamos que en el numerador aparezca la derivada del denominador para escribir la integral como suma de una inmediata y otra del tipo 1.3.9.

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx \\ &= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.\end{aligned}$$

La primera integral se calcula por sustitución:

$$\frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx =$$

Cambio: $ax^2+bx+c=t,\ (2ax+b)\,dx=dt$

$$=\frac{A}{2a}\int \frac{dt}{t}=\frac{A}{2a}\ln|t|+C=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+C.$$

La segunda es del tipo 1.3.9.

Ejemplo 1.3.12. $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}\,dx$

RESOLUCIÓN.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+4}{x^2-2x-5}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x-5}\,dx+4\int \frac{dx}{x^2-2x-5} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right|+\frac{2}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right|+C.\end{aligned}$$

Hemos aprovechado el resultado obtenido en el ejemplo anterior. □

1.3.13. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^k}$ $\quad (k\in\mathbb{N},\ k\geq 2;\ b^2-4c<0)$

$$I_k=\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^k}=\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+m^2\right]^k}=$$

Cambio: $x+\dfrac{b}{2}=mt, dx=m\,dt;\quad t=\dfrac{2x+b}{2m}$

$$=\frac{1}{m^{2k-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}\frac{1}{m^{2k-1}}\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^k}\,dt-\frac{1}{m^{2k-1}}\int \frac{t^2}{(t^2+1)^k}\,dt$$

$$=\frac{1}{m^{2k-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}}-\frac{1}{m^{2k-1}}\int \frac{t^2}{(t^2+1)^k}\,dt.$$

El cálculo de la segunda integral se efectúa por partes:

$$\int \frac{t^2}{(t^2+1)^k}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(t^2+1)^k}\,t\,dt =$$

$$u = t, \quad dv = \frac{2t}{(t^2+1)^k}\,dt;$$
$$du = dt, \quad v = -\frac{1}{(k-1)\,(t^2+1)^{k-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{t}{(k-1)\,(t^2+1)^{k-1}} + \frac{1}{k-1}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}}\right].$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{1}{m^{2k-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)m^{2k-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}} + \frac{t}{2(k-1)m^{2k-1}\,(t^2+1)^{k-1}}\\
&= \frac{2k-3}{2(k-1)m^{2k-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}} + \frac{t}{2(k-1)m^{2k-1}\,(t^2+1)^{k-1}}\\
&= \frac{2k-3}{2(k-1)m}\int \frac{dt}{[(mt)^2+m^2]^{k-1}} + \frac{t}{2(k-1)m\,[(mt)^2+m^2]^{k-1}}\\
&= \frac{2k-3}{2(k-1)m^2}\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^{k-1}} + \frac{1}{4(k-1)m^2}\,\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^{k-1}}.
\end{aligned}$$

En definitiva:

$$I_k = \frac{2k-3}{2(k-1)m^2}I_{k-1} + \frac{1}{4(k-1)m^2}\,\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^{k-1}}.$$

La fórmula obtenida permite reducir el cálculo de I_k al de I_1, que es una integral del tipo 1.3.9.

Ejemplo 1.3.14. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} =$$

Cambio: $x+1 = \sqrt{2}t$, $dx = \sqrt{2}\,dt$; $\quad t = \dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\int \frac{dt}{t^2+1} - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt\right]$$

$$\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(t^2+1)^2}\,t\,dt$$

$$u = t, \quad dv = \frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt;$$

$$du = dt, \quad v = -\frac{1}{t^2+1}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}.$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} &= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1}\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arc\,tg} t\right] + C \\
&= \frac{x+1}{4\,(x^2+2x+3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.
\end{aligned}$$

□

1.3.15. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}\,dx \quad (k \in \mathbb{N},\ k \geq 2;\ b^2-4c<0)$

Esta integral se expresa como suma de una inmediata y otra del tipo 1.3.13.

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}\,dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+b) + \left(B - \frac{Ab}{2}\right)}{(x^2+bx+c)^k}\,dx \\
&= \frac{A}{2}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}\,dx + \left(B - \frac{Ab}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^k} \\
&= -\frac{A}{2(k-1)}\frac{1}{(x^2+bx+c)^{k-1}} + \left(B - \frac{Ab}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^k}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.16. $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$

RESOLUCIÓN.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{x+1}{2\,(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C \\
&= -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.
\end{aligned}$$

Hemos utilizado el resultado que se obtuvo en el ejemplo anterior. □

1.3.17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (a \neq 0)$

Como en 1.3.9, completamos cuadrados en el denominador para escribir:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm m^2\right]}}.$$

- $m = 0$

  En este caso, necesariamente $a > 0$.

  $$\int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}} =$$

  Cambio: $x+\dfrac{b}{2a} = t,\ dx = dt; \quad t = \dfrac{2ax+b}{2a}$

  $$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{x+\frac{b}{2a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|t|+C = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b|+C$$

  (recuérdese que C es una constante arbitraria).

- $m \neq 0$

  $$\int \frac{dx}{\sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm m^2\right]}} =$$

  Cambio: $x+\dfrac{b}{2a} = mt,\ dx = m\,dt; \quad t = \dfrac{2ax+b}{2ma}$

  $$= \int \frac{dt}{\sqrt{a(t^2 \pm 1)}}.$$

  - Si $a < 0$, la nueva integral es expresable en la forma

    $$\frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

    (integral 17 de la tabla), de modo que

    $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc\,sen} t + C = \frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc\,sen}\frac{2ax+b}{2ma}+C.$$

  - Si $a > 0$, la nueva integral se escribe en la forma

    $$\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm 1}}$$

    (integrales 18, 19 de la tabla), de modo que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| t + \sqrt{t^2 \pm 1} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2ax + b + \sqrt{4a(ax^2+bx+c)} \right| + C$$

(C es una constante arbitraria).

Ejemplo 1.3.18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} =$$

Cambio: $x+2 = \sqrt{6}t,\ dx = \sqrt{6}\,dt; \quad t = \dfrac{x+2}{\sqrt{6}}$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln|t+\sqrt{t^2+1}| + C = \ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right| + C = \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right| + C. \qquad \square$$

1.3.19. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \quad (a \neq 0)$

Procedemos como en 1.3.11 y 1.3.15:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \\ &= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \end{aligned}$$

La primera integral ya es inmediata, pero para mayor claridad se puede calcular por sustitución:

$$\frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$

Cambio: $ax^2+bx+c = t,\ (2ax+b)\,dx = dt$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{A}{a}\sqrt{t} + C = \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + C.$$

La segunda es del tipo 1.3.17.

Ejemplo 1.3.20. $\displaystyle\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx$

RESOLUCIÓN.

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)-7}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx \\
&= \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx - 7\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} \\
&= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right| + C.
\end{aligned}$$

Hemos hecho uso del resultado obtenido en el ejemplo anterior. □

1.3.21. $\displaystyle\int \frac{1}{(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \quad (A \neq 0)$

Esta integral se reduce a una del tipo 1.3.17. En efecto, se tiene:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= \\
&\quad \textit{Cambio: } \frac{1}{Ax+B} = t; \quad x = \frac{1}{A}\left(\frac{1-Bt}{t}\right),\ dx = -\frac{dt}{At^2} \\
&= \frac{a}{A^2}\left(\frac{1-Bt}{t}\right)^2 + \frac{b}{A}\left(\frac{1-Bt}{t}\right) + c \\
&= \frac{1}{A^2t^2}\left[a(1-Bt)^2 + bAt(1-Bt) + cA^2t^2\right] \\
&= \frac{1}{A^2t^2}\left[(aB^2 - bAB + cA^2)t^2 + (bA-2aB)t + a\right].
\end{aligned}$$

De este modo:

$$\int \frac{dx}{(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{mt^2+nt+a}},$$

donde

$m = aB^2 - bAB + cA^2$,

$n = bA - 2aB$.

Ejemplo 1.3.22. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,dx =$$

$$\textit{Cambio: } \frac{1}{x+1} = t; \quad x = \frac{1-t}{t},\ dx = -\frac{dt}{t^2}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

Cambio: $t-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}v,\ dt=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,dv;\quad v=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{1-x}{1+x}$

$$= -\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+1}} = -\ln\left|v+\sqrt{v^2+1}\right|+C = \ln\left|\frac{1+x}{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}\right|+C. \qquad \square$$

1.3.5. Integración de funciones racionales: descomposición en fracciones simples

1.3.23. $\displaystyle\int \frac{Q(x)}{f(x)}\,dx,\quad Q(x),\ f(x)$ *polinomios*

Suponemos que la función racional $\dfrac{Q(x)}{f(x)}$ es irreducible ($Q(x)$, $f(x)$ no tienen raíces comunes).

- Si grado $Q(x) \geq$ grado $f(x)$ (función racional *impropia*), se efectúa la división para obtener:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = P(x)+\frac{R(x)}{f(x)},$$

  siendo $R(x)$, $P(x)$ polinomios, con grado $R(x) <$ grado $f(x)$.

- Si grado $Q(x) <$ grado $f(x)$ (función racional *propia*), entonces $\dfrac{Q(x)}{f(x)}$ es descomponible en *fracciones simples*, de los tipos:

  (i) $\dfrac{A}{x-a}$, cuya integral es $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+C.$

  (ii) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, cuya integral es $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+C.$

  (iii) $\dfrac{Ax+B}{x^2+bx+c}$ $(b^2-4c<0)$, que es una integral del tipo 1.3.11.

  (iv) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$ $(b^2-4c<0;\ k\in\mathbb{N},\ k\geq 2)$, que es una integral del tipo 1.3.15.

Para obtener la *descomposición en fracciones simples* de $\dfrac{Q(x)}{f(x)}$, hallamos las raíces de $f(x)$.

• Cada raíz real a de multiplicidad r produce r términos

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(x-a)^r}.$$

• Cada raíz compleja $\alpha\pm i\beta$ de multiplicidad s produce s términos

$$\frac{M_1x+N_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{M_2x+N_2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^s}.$$

Los *coeficientes indeterminados* A_i $(1 \leq i \leq r)$, M_j, N_j $(1 \leq j \leq s)$ se calculan por reducción a común denominador e igualación.

Ejemplo 1.3.24. $\displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2}\,dx$

RESOLUCIÓN. Observamos que la función racional

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2}$$

es propia. Las raíces del denominador son $x=1$ (real, de multiplicidad 2) y $x=\pm i$ (compleja, de multiplicidad 2). Por consiguiente:

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2}. \tag{1.5}$$

Para obtener A, B, C, D, E, F:

- Se reduce a común denominador el segundo miembro de (1.5) y se igualan los numeradores:

$$4x^2-8x=A(x-1)\left(x^2+1\right)^2+B\left(x^2+1\right)^2+(Cx+D)(x-1)^2\left(x^2+1\right)+(Ex+F)(x-1)^2. \tag{1.6}$$

- Se agrupan los coeficientes de las distintas potencias de x en el segundo miembro de (1.6), identificándolos con los correspondientes del primer miembro. Resulta así un sistema lineal de seis ecuaciones en las seis incógnitas A, B, C, D, E, F:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B-2C+D=0 \\ 2A+2C-2D+E=0 \\ -2A+2B-2C+2D-2E+F=4 \\ A+C-2D+E-2F=-8 \\ -A+B+D+F=0. \end{cases} \tag{1.7}$$

  Se obtienen los valores de los coeficientes resolviendo el sistema. Como norma general, mediante la regla de Cramer; pero se simplifica la tarea si

- Se reduce el orden del sistema sustituyendo las raíces de $f(x)$ en el segundo miembro de la ecuación

(1.6) y se resuelve el nuevo sistema:

$$\begin{aligned}
x=1 \quad &\Rightarrow \quad -4=4B && \Rightarrow \quad B=-1 \\
x=i \quad &\Rightarrow \quad -4-8i=(Ei+F)(-2i)=2E-2Fi && \Rightarrow \begin{cases} 2E=-4 \quad \Rightarrow \quad E=-2 \\ 2F=8 \quad \Rightarrow \quad F=4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ahora sustituimos en (1.7) los resultados que acabamos de obtener:

$A+C=0$

$B=C-D \Rightarrow C=D-1$

$E=2D \Rightarrow D=-1 \Rightarrow C=-2 \Rightarrow A=2.$

Quedamos ya en disposición de resolver la integral:

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx &= 2\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{x-2}{(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{x-1} - \operatorname{arc\,tg} x - 2\int \frac{x-2}{(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \frac{3x^2-x}{(x^2+1)(x-1)} + \operatorname{arc\,tg} x + C.
\end{aligned}$$

□

1.3.6. Integración de funciones racionales: método de Hermite-Ostrogradski

Simplifica la integración de funciones racionales cuyo denominador tiene raíces múltiples.

1.3.25. *Sea* $\dfrac{Q(x)}{f(x)}$ *una función racional irreducible y propia. Se verifica*

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{X(x)}{P(x)}\right] + \frac{Y(x)}{R(x)},$$

donde:

- $P(x)$ *polinomio con las mismas raíces que* $f(x)$ *y multiplicidad disminuida en una unidad;*
- $R(x)$ *polinomio con las mismas raíces que* $f(x)$ *y multiplicidad* 1*;*
- $X(x)$, $Y(x)$ *polinomios con coeficientes indeterminados, tales que:*

- *grado* $X(x) =$ *grado* $P(x) - 1$,
- *grado* $Y(x) =$ *grado* $R(x) - 1$.

Los coeficientes de $X(x)$ *e* $Y(x)$ *se calculan por derivación, reducción a común denominador e igualación.*

Efectuando esta descomposición, se obtiene:

$$\int \frac{Q(x)}{f(x)}\,dx = \frac{X(x)}{P(x)} + \int \frac{Y(x)}{R(x)}\,dx.$$

Ejemplo 1.3.26. $\displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2\,(x^2+1)^2}\,dx$

RESOLUCIÓN.

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2\,(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)\,(x^2+1)}\right) + \frac{Mx^2+Nx+E}{(x-1)\,(x^2+1)}.$$

$$\begin{aligned} 4x^2-8x \quad = \quad & (2Ax+B)(x-1)(x^2+1) \\ & -(Ax^2+Bx+C)(3x^2-2x+1) \\ & +(Mx^2+Nx+E)(x-1)(x^2+1). \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} x=1 \quad &\Rightarrow \quad -4=-2(A+B+C) & &\Rightarrow \quad A+B+C=2 \\ x=i \quad &\Rightarrow \quad -4-8i=2\left([(C-A)-B]+i[(C-A)+B]\right) & &\Rightarrow \quad \begin{cases} -A-B+C=-2 \\ -A+B+C=-4. \end{cases} \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema lineal de tres ecuaciones en las tres incógnitas A, B, C así obtenido; la solución es $A=3$, $B=-1$, $C=0$. Sustituyendo estos valores en (1.8), e igualando los coeficientes de las distintas potencias de x en el primer y segundo miembros, encontramos: $M=0$, $N=3$, $E=1$. Por tanto,

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2\,(x^2+1)^2}\,dx = \frac{3x^2-x}{(x^2+1)\,(x-1)} + \int \frac{3x+1}{(x-1)\,(x^2+1)}\,dx.$$

Para calcular la integral del segundo miembro efectuamos una descomposición en fracciones simples del integrando:

$$\frac{3x+1}{(x-1)\,(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow 3x+1 = (A+B)x^2 + (C-B)x + (A-C) \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C-B=3 \\ A-C=1. \end{cases}$$

Luego, $A=2$, $B=-2$, $C=1$, y en consecuencia

$$\int \frac{3x+1}{(x-1)\,(x^2+1)}\,dx = 2\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{2x-1}{x^2+1}\,dx = \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Concluimos:

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2\,(x^2+1)^2}\,dx = \frac{3x^2-x}{(x^2+1)\,(x-1)} + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Compárese con el ejemplo anterior. □

1.3.7. Integración de funciones trigonométricas

1.3.27. $\displaystyle\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx,\quad R(u,v)$ *función racional*

Se reduce a la integración de funciones racionales mediante alguna de las sustituciones siguientes:

- **Sustitución trigonométrica universal**
  - $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t;\quad x = 2\operatorname{arc\,tg} t,\; dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2},$
  - $\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2},$
  - $\cos x = \cos^2\dfrac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}.$
- **Otras sustituciones**

  (I) $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$

  $$\operatorname{tg} x = t;\quad x = \operatorname{arc\,tg} t,\; dx = \frac{dt}{1+t^2},$$
  $$\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$
  $$\cos x = \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

(II) $R(-\operatorname{sen}x, \cos x) = -R(\operatorname{sen}x, \cos x)$

$\cos x = t, \; -\operatorname{sen}x\,dx = dt.$

(III) $R(\operatorname{sen}x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen}x, \cos x)$

$\operatorname{sen}x = t, \; \cos x\,dx = dt.$

1.3.28. $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx \quad (m,n \in \mathbb{Z})$

Este es un caso particular del anterior, con

$$R(\operatorname{sen}x, \cos x) = \operatorname{sen}^m x \cos^n x.$$

Por tanto:

(i) m,n pares ó m,n impares $\Rightarrow R(-\operatorname{sen}x, -\cos x) = R(\operatorname{sen}x, \cos x) \to$ (I) $\boxed{\operatorname{tg}x = t}$

(!) m,n pares y positivos: se transforma el integrando mediante las fórmulas

$$\operatorname{sen}x = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}, \quad \cos x = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}, \quad \operatorname{sen}x\cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2x.$$

(ii) m impar $\Rightarrow R(-\operatorname{sen}x, \cos x) = -R(\operatorname{sen}x, \cos x) \to$ (II) $\boxed{\cos x = t}$

(iii) n impar $\Rightarrow R(\operatorname{sen}x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen}x, \cos x) \to$ (III) $\boxed{\operatorname{sen}x = t}$

1.3.29. $\int \operatorname{sen}mx\operatorname{sen}nx\,dx, \quad \int \operatorname{sen}mx\cos nx\,dx, \quad \int \cos mx\cos nx\,dx$

Aplicamos las fórmulas:

$$\operatorname{sen}mx\operatorname{sen}nx = \frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right],$$

$$\operatorname{sen}mx\cos nx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x\right],$$

$$\cos mx\cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right],$$

que se deducen de las relaciones:

$$\operatorname{sen}(m \pm n)x = \operatorname{sen} mx \cos nx \pm \operatorname{sen} nx \cos mx,$$

$$\cos(m \pm n)x = \cos mx \cos nx \mp \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx.$$

Ejemplo 1.3.30. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} =$$

Cambio: $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t; \quad dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}, \; \operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$ □

Ejemplo 1.3.31. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} =$$

Cambio: $\cos x = t, -\operatorname{sen} x\, dx = dt$

$$= \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$ □

Ejemplo 1.3.32. $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen}^2 x}$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen}^2 x} =$$

Cambio: $\operatorname{tg} x = t; \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, \; \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$

$$= \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$ □

Ejemplo 1.3.33. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2+\cos x}\,dx$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2+\cos x}\,dx =$$

Cambio: $\cos x = t,\ -\operatorname{sen} x\,dx = dt$

$$= \int \frac{t^2-1}{t+2}\,dt = \int \left(t-2+\frac{3}{t+2}\right)dt = \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C$$
$$= \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln|2+\cos x| + C.$$

□

Ejemplo 1.3.34. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx =$$

Cambio: $\operatorname{sen} x = t,\ \cos x\,dx = dt$

$$= \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + C = \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} + C.$$

□

Ejemplo 1.3.35. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$

RESOLUCIÓN.

$$\int \operatorname{sen}^4 x\,dx =$$

Fórmula: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx = \frac{x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx =$$

Fórmula: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\,dx = \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C.$$

En este ejemplo, tanto la sustitución trigonométrica universal como la sustitución general del caso (I) dan lugar a una integral de resolución más laboriosa. □

Ejemplo 1.3.36. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}\,dx$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}\,dx =$$

Cambio: $\operatorname{tg} x = t; \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2},\ \operatorname{sen} x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$$= \int (t^2+t^4)\,dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$ □

Ejemplo 1.3.37. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x\,dx$

RESOLUCIÓN.

$$\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x)\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16}\operatorname{sen} 8x + C.$$ □

1.3.8. Integración de funciones irracionales

En lo que sigue, R denotará una función racional de sus variables.

1.3.38. $\displaystyle\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dx$

Cambio: $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^k, \quad k = \text{m.c.m. } \{n, \ldots, s\}.$

Ejemplo 1.3.39. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx =$$

Cambio: $x+4=t^2$, $dx = 2t\,dt$

$$= 2\int \frac{t^2}{t^2-4}\,dt = 2\int \frac{t^2-4}{t^2-4}\,dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} = 2t + 2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{2-\sqrt{x+4}}{2+\sqrt{x+4}}\right| + C.$$

□

1.3.40. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx$

- **Sustituciones de Euler**
  - $a>0:\quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t;\quad x = \dfrac{t^2-c}{b\mp 2t\sqrt{a}},\ dx = \mp\dfrac{2\left(t^2\sqrt{a}\mp bt + c\sqrt{a}\right)}{(b\mp 2t\sqrt{a})^2}\,dt$
  - $c>0:\quad \sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm\sqrt{c};\quad x = \dfrac{\pm 2t\sqrt{c}-b}{a-t^2},\ dx = \pm\dfrac{2(t^2\sqrt{c}-bt+a\sqrt{c})}{(a-t^2)^2}\,dt$
  - $b^2-4ac>0$, $\alpha\neq\beta$ raíces reales de ax^2+bx+c:
    $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha);\quad x = \dfrac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2},\ dx = \dfrac{2at(\beta-\alpha)}{(a-t^2)^2}\,dt.$

Ejemplo 1.3.41. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} =$$

Cambio: $\sqrt{x^2+4x+10} = -x+t;\quad x = \dfrac{t^2-10}{2t+4},\ dx = \dfrac{2\left(t^2+4t+10\right)}{(2t+4)^2}\,dt$

$$= \int \frac{dt}{t+2} = \ln|t+2| + C = \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right| + C.$$

□

Ejemplo 1.3.42. $\displaystyle\int \frac{\left(1-\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{\left(1-\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx =$$

Cambio: $\sqrt{1+x+x^2} = xt+1;\quad x = \dfrac{2t-1}{1-t^2},\ dx = \dfrac{2\left(t^2-t+1\right)}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt$

$$= 2\int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt = -2t + \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = -\frac{2\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)}{x} + \ln\left|\frac{x-1+\sqrt{1+x+x^2}}{x+1-\sqrt{1+x+x^2}}\right| + C.$$

□

Ejemplo 1.3.43. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x-1-4x^2}}$

RESOLUCIÓN.

$5x-1-4x^2 = 0 \iff x = 1,\ x = \frac{1}{4}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-1-4x^2}} =$$

Cambio: $\sqrt{5x-1-4x^2} = t(x-1);\quad x = \dfrac{t^2+1}{t^2+4},\ dx = \dfrac{6t}{(t^2+4)^2}\,dt$

$$= -2\int \frac{dt}{t^2+4} = -\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5x-1-4x^2}}{2(x-1)} + C.$$

□

- **Sustituciones trigonométricas**

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4a}\right) =$$

Cambio: $x+\dfrac{b}{2a} = t,\ dx = dt$

$$= at^2 + \left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

- $a>0,\ c-\dfrac{b^2}{4a}>0 \Rightarrow a = m^2,\ c-\dfrac{b^2}{4a} = n^2$

  $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{m^2t^2+n^2} =$

  Cambio: $mt = n\operatorname{tg} v,\ m\,dt = n\sec^2 v\,dv$

$= n\sqrt{\operatorname{tg}^2 v + 1} = n \sec v$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx = \int R\left(\frac{n \operatorname{sen} v}{m \cos v} - \frac{b}{2a}, \frac{n}{\cos v}\right) \frac{n}{m \cos^2 v}\, dv.$$

- $a > 0,\ c - \dfrac{b^2}{4a} < 0 \Rightarrow a = m^2,\ c - \dfrac{b^2}{4a} = -n^2$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{m^2t^2 - n^2} =$

Cambio: $mt = n \sec v,\ m\, dt = n \operatorname{tg} v \sec v\, dv$

$= n\sqrt{\sec^2 v - 1} = n \operatorname{tg} v$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx = \int R\left(\frac{n}{m \cos v} - \frac{b}{2a}, \frac{n \operatorname{sen} v}{\cos v}\right) \frac{n \operatorname{sen} v}{m \cos^2 v}\, dv.$$

- $a < 0,\ c - \dfrac{b^2}{4a} > 0 \Rightarrow a = -m^2,\ c - \dfrac{b^2}{4a} = n^2$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{n^2 - m^2t^2} =$

Cambio: $mt = n \operatorname{sen} v,\ m\, dt = n \cos v\, dv$

$= n\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 v} = n \cos v$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx = \int R\left(\frac{n}{m} \operatorname{sen} v - \frac{b}{2a}, n \cos v\right) \frac{n}{m} \cos v\, dv.$$

Ejemplo 1.3.44. $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{1 - x\sqrt{1-x^2}}\, dx$

RESOLUCIÓN.

$\displaystyle\int \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{1 - x\sqrt{1-x^2}}\, dx =$

Cambio: $x = \operatorname{sen} t,\ dx = \cos t\, dt$

$\displaystyle= \int \frac{\operatorname{sen} t + \cos t}{1 - \operatorname{sen} t \cos t} \cos t\, dt =$

Cambio: $\operatorname{tg} t = v;\quad t = \operatorname{arc\,tg} v,\ dt = \dfrac{dv}{1+v^2};\quad \operatorname{sen} t = \dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}},\ \cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}$

$\displaystyle= \int \frac{v+1}{(v^2+1)(v^2-v+1)}\, dv = \int \frac{v-1}{v^2+1}\, dv - \int \frac{v-2}{v^2-v+1}\, dv$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|v^2+1\right| - \operatorname{arc\,tg} v - \frac{1}{2}\ln\left|v^2-v+1\right| + \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2v-1}{\sqrt{3}} + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}^2 t+1\right| - t - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}^2 t-\operatorname{tg} t+1\right| + \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg} t-1}{\sqrt{3}} + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}^2(\operatorname{arcsen} x)+1\right| - \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}^2(\operatorname{arcsen} x)-\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x)+1\right|$$
$$+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x)-1}{\sqrt{3}} + C.$$

□

- **Casos particulares**

(i) Integrales que contienen un trinomio cuadrático, de los tipos 1.3.17, 1.3.19, 1.3.21.

(ii) $\displaystyle\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, $P(x)$ polinomio, grado $P(x)=n\geq 2$: fórmula de reducción

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{d}{dx}\left[X(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right] + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

donde:

- $X(x)$ polinomio con coeficientes indeterminados, grado $X(x) =$ grado $P(x)-1$
- λ coeficiente indeterminado.

Los coeficientes de $X(x)$ y λ se calculan por derivación, reducción a común denominador e igualación.

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = X(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

(!) *La fórmula es válida también para* $n=1$.

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{(Ax+B)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(n\in\mathbb{N},\ n\geq 2)$

Se reducen a las de tipo (ii) mediante el

Cambio: $\dfrac{1}{Ax+B}=t.$

(iv) $\displaystyle\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

Se reducen a las de tipo (ii) multiplicando y dividiendo el integrando por sí mismo:

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \int\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

Ejemplo 1.3.45. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$

RESOLUCIÓN.

$$\begin{aligned}
\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} &= \frac{d}{dx}\left[(Ax^2+Bx+C)\sqrt{1+2x-x^2}\right]+\frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}} \\
&= (2Ax+B)\sqrt{1+2x-x^2}+\left(Ax^2+Bx+C\right)\frac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}.
\end{aligned}$$

Reducimos a común denominador e identificamos numeradores:

$$\begin{aligned}
x^3 &= (2Ax+B)(1+2x-x^2)+(Ax^2+Bx+C)(1-x)+\lambda \\
&= -3Ax^3+(5A-2B)x^2+(2A+3B-C)x+(B+C+\lambda).
\end{aligned}$$

Igualamos coeficientes:

$$\begin{cases} -3A=1 \\ 5A-2B=0 \\ 2A+3B-C=0 \\ B+C+\lambda=0. \end{cases}$$

La solución del sistema es: $A=-\dfrac{1}{3},\ B=-\dfrac{5}{6},\ C=-\dfrac{19}{6},\ \lambda=4.$

Por otra parte,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2+2}} =$$

Cambio: $x-1=t\sqrt{2},\ dx=\sqrt{2}\,dt$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arc\,sen} t + C = \operatorname{arc\,sen}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$$

Luego:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx = -\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\operatorname{arc\,sen}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$$

□

Ejemplo 1.3.46. $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+1}{(x+1)^2\sqrt{x^4+4x^3+5x^2+2x}}\,dx$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{x^2+4x+1}{(x+1)^2\sqrt{x^4+4x^3+5x^2+2x}}\,dx =$$

Cambio: $\dfrac{1}{x+1}=t; \quad x=\dfrac{1}{t}-1,\ dx=-\dfrac{dt}{t^2}$

$$= \int \frac{x^2+4x+1}{(x+1)^2\sqrt{x(x+1)^2(x+2)}}\,dx = \int \frac{x^2+4x+1}{(x+1)^3\sqrt{x(x+2)}}\,dx = \int \frac{2t^2-2t-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Aplicamos la fórmula de reducción:

$$\frac{2t^2-2t-1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{d}{dt}\left[(At+B)\sqrt{1-t^2}\right] + \frac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Derivando, reduciendo a común denominador e igualando coeficientes de potencias de t de igual grado en el primer y segundo miembro obtenemos: $A=-1$, $B=2$, $\lambda=0$. Luego,

$$\int \frac{x^2+4x+1}{(x+1)^2\sqrt{x^4+4x^3+5x^2+2x}}\,dx = (2-t)\sqrt{1-t^2}+C = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^2}+C.$$

□

1.3.47. *Integrales binomias:* $\displaystyle\int x^m\,(a+bx^n)^p\ dx \quad (m,n,p\in\mathbb{Q})$

Teorema 1.3.48 (Chebyshev)**.** *Una integral binomia es racionalizable si, y sólo si, ocurre alguno de las tres situaciones siguientes:*

$$i)\ p\in\mathbb{Z}; \quad ii)\ \frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}; \quad iii)\ \frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}.$$

En efecto, tras el

Cambio: $x^n=t; \quad x=t^{\frac{1}{n}},\ dx=\dfrac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}$

resulta:

$$\int x^m\,(a+bx^n)^p\ dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p\,dt.$$

i) $p\in\mathbb{Z}$

$\dfrac{m+1}{n}-1=\dfrac{r}{q}\in\mathbb{Q}\to \displaystyle\int R\left(t,t^{\frac{r}{q}}\right)\,dt$ [tipo (I)]

Cambio: $t=v^q \Rightarrow \boxed{x=v^{\frac{q}{n}}}$

ii) $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{m+1}{n} - 1 \in \mathbb{Z}$

$p = \dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q} \to \displaystyle\int R\left(t, (a+bt)^{\frac{r}{s}}\right)\, dt$ [tipo (I)]

Cambio: $a + bt = v^s \Rightarrow \boxed{x = \left(\dfrac{v^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}}$

iii) $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{m+1}{n} + p - 1 \in \mathbb{Z}$

$p = \dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q} \to \displaystyle\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\dfrac{a+bt}{t}\right)^{p} dt = \int R\left(t, \left(\dfrac{a+bt}{t}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dt$ [tipo (I)]

Cambio: $\dfrac{a+bt}{t} = v^s \Rightarrow \boxed{x = \left(\dfrac{a}{v^s - b}\right)^{\frac{1}{n}}}$

Ejemplo 1.3.49. $\displaystyle\int x\sqrt{\sqrt[3]{x^2}+2}\, dx$

RESOLUCIÓN.

$$\int x\sqrt{\sqrt[3]{x^2}+2}\, dx = \int x\left(2 + x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx =$$

Cambio: $x = \left(v^2-2\right)^{\frac{3}{2}},\ dx = 3\left(v^2-2\right)^{\frac{1}{2}} v\, dv; \quad v = \left(x^{\frac{2}{3}}+2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= 3\int \left(v^2-2\right)^2 v^2\, dv = \frac{3}{7}v^7 - \frac{12}{5}v^5 + 4v^3 + C = \frac{3}{7}\left(x^{\frac{2}{3}}+2\right)^{\frac{7}{2}} - \frac{12}{5}\left(x^{\frac{2}{3}}+2\right)^{\frac{5}{2}} + 4\left(x^{\frac{2}{3}}+2\right)^{\frac{3}{2}} + C. \quad \square$$

1.3.9. Integración de funciones trascendentes

1.3.50. $\displaystyle\int R]f(x)]\, dx, \quad \exists\, g(t) = f^{-1}(t) = x:\ f'[g(t)]$ *racional*

Se reduce a la integración de funciones racionales mediante el

Cambio: $f(x) = t,\ f'(x)\, dx = dt$

$$\int R(f(x))\, dx = \int \frac{R(t)}{f'(g(t))}\, dt.$$

Ejemplo 1.3.51. $\displaystyle\int \frac{e^x - 3\, e^{2x}}{1+e^x}\, dx$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{e^x - 3\, e^{2x}}{1+e^x}\, dx =$$

Cambio: $e^x = t,\ dx = \dfrac{dt}{t}$

$$= \int \frac{1-3t}{1+t}\, dt = 4\ln|1+t| - 3t + C = 4\ln|1+e^x| - 3e^x + C. \qquad \square$$

Ejemplo 1.3.52. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x}{1 - 2\operatorname{tg} x}\, dx$

RESOLUCIÓN.

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x}{1 - 2\operatorname{tg} x}\, dx =$$

Cambio: $\operatorname{tg} x = t,\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

$$= \int \frac{t}{1-2t}\, dt = -\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\ln|1-2t| + C = -\frac{\operatorname{tg} x}{2} - \frac{1}{4}\ln|1-2\operatorname{tg} x| + C. \qquad \square$$