Cálculo integral de funciones de una variable: problemas propuestos

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

4. Problemas propuestos

4.1. Integración indefinida

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas.

A. INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

a) $\int x^2\sqrt[3]{x^3+2}\,dx$; *b)* $\int \frac{x\cos x^2}{\operatorname{sen} x^2}\,dx$; *c)* $\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}\,dx$;

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\,dx$; *e)* $\int e^{3\cos 2x}\operatorname{sen} 2x\,dx$; *f)* $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

Solución.

a) $\frac{1}{4}(x^3+2)^{4/3}$; *b)* $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} x^2|$; *c)* $-\frac{4}{3(x^3+2)^2}$;

d) $\frac{4}{9}(x^3+2)^{3/4}$; *e)* $-\frac{1}{6}e^{3\cos 2x}$; *f)* $3(x+1)^{1/3}$.

B. INTEGRACIÓN POR PARTES

a) $\int x^2\sqrt{1-x}\,dx$; *b)* $\int x\cos x\,dx$; *c)* $\int x^3\operatorname{sen} x\,dx$;

d) $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$; *e)* $\int e^{3x}x^2\operatorname{sen} x\,dx$; *f)* $\int \ln(x^2+2)\,dx$.

Solución.

a) $-\frac{16}{105}(1-x)^{7/2}-\frac{8}{15}x(1-x)^{5/2}-\frac{2}{3}x^2(1-x)^{3/2}$; *b)* $x\operatorname{sen} x+\cos x$;

c) $-x^3\cos x+6x\cos x+3x^2\operatorname{sen} x-6\operatorname{sen} x$; *d)* $\frac{x}{2}[\operatorname{sen}(\ln x)-\cos(\ln x)]$;

e) $\frac{e^{3x}}{250}[(75x^2-40x+9)\sin x-(25x^2-30x+13)\cos x]$; *f)* $x\ln(x^2+2)-2x+2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$.

C. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

a) $\int \frac{dx}{x^2-4}$; *b)* $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx$; *c)* $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx$;

d) $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$; *e)* $\int \frac{dx}{x^3+2x^2+13x+6}$; *f)* $\int \frac{x}{x^2-4x+4}\,dx$;

g) $\int \frac{x^2-2}{(x^2+1)x^3}\,dx$; *h)* $\int \frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^3+1)}\,dx$; *i)* $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x(1+\cos^2 x)}\,dx$.

Solución.

a) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$; *b)* $-\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{3}{10}\ln|x-2|-\frac{2}{15}\ln|x+3|$; *c)* $\frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x+2|$;

d) $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+2\ln|x|-2\ln|x-1|$; *f)* $\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}$; *g)* $3\ln|x|+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2}\ln(x^2+1)$;

h) $\ln|x|-2\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+\ln|x^2-x+1|+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$; *i)* $\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)-\ln|\cos x|$.

D. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS *a)* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$; *b)* $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$; *c)* $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^5 x\,dx$;

d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx$; *e)* $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4 x\sec^4 x\,dx$; *f)* $\displaystyle\int \frac{dx}{4-5\operatorname{sen} x}$.

Solución.

a) $\dfrac{\cos^3 x}{3}-\cos x$; *b)* $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{3\operatorname{sen}^3 x}$; *c)* $\ln|\operatorname{sen} x|+\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\dfrac{1}{4\operatorname{sen}^4 x}$;

d) $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}-x$; *e)* $\dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\dfrac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x$; *f)* $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|$.

E. MISCELÁNEA

a) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x^4}\,dx$; *b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$; *c)* $\displaystyle\int \cos x\ln(\operatorname{sen} x)\,dx$;

d) $\displaystyle\int \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$; *e)* $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}\,dx$; *f)* $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

Solución.

a) $-\dfrac{1}{6}(1-2x)^{3/2}$; *b)* $\ln|\ln x|$; *c)* $[\ln(\operatorname{sen} x)-1]\operatorname{sen} x$;

d) $x\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x$; *e)* $\dfrac{4}{x+2}+\ln|x+1|$; *f)* $\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+x-2\sqrt{x+1}$.

4.2. Integración definida

2. Calcular:

a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2-1}\,dx$; *b)* $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$; *c)* $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8}\,dx$; *e)* $\displaystyle\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})\,dx$; *f)* $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$;

g) $\displaystyle\int_3^6 (x^2-4x)\,dx$; *h)* $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$; *i)* $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{ctg} x\,dx$.

Solución.

a) $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$; *b)* 0; *c)* $\dfrac{\pi}{4}$; *d)* $\dfrac{\pi}{16}$; *e)* $\dfrac{100}{3}$; *f)* $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{34}-5\right)$; *g)* 9; *h)* $\dfrac{\pi}{3}$; *i)* $\ln\sqrt{3}$.

3. Calcular el área de la figura comprendida entre la curva $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ y la parábola $y=\dfrac{x^2}{2}$.

   Solución. $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{3}$.

4. Calcular el área limitada por la curva $y=x^3-6x^2+8x$ y el eje OX.

   Solución. 8.

5. Calcular el área limitada por la curva $x=y^2+4y$ y el eje OY.

Solución. $\dfrac{32}{3}$.

6. Calcular el área comprendida entre las curvas $y = 2\,\mathrm{sen}\,x$ e $y = 4\cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

   Solución. $8\sqrt{5}$.

7. Calcular el área limitada por los siguientes pares de curvas:

   a) $y = 2 - x^2,\ y = x$; *b)* $y = x^4 - x^2,\ y = 3 - 3x^2$; *c)* $x^2 + y^2 = 2,\ 2y = x^2 + 1$;

   d) $y = x^2 + 2x - 3,\ y = x - x^2$; *e)* $y = 6x - x^2,\ y = x^2 - 2x$; *f)* $y = x^2 - 3,\ y = -2$.

   Solución. a) $\dfrac{9}{2}$; *b)* $\dfrac{64}{15}$; *c)* $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}$; *d)* $\dfrac{125}{24}$; *e)* $\dfrac{64}{3}$; *f)* $\dfrac{4}{3}$.

4.3. Aplicaciones de la integral definida

8. La función $T(t) = 47 + 3t - 0.5t^2$ aproxima la temperatura t horas después del mediodía en un día típico de agosto en Madrid. Encontrar la temperatura media entre el mediodía y las 6 de la tarde. Aproximar el resultado por medio de las reglas *a*) trapezoidal y *b*) de Simpson, con 4 intervalos.

   Solución. $\overline{T} = 50$; *a)* $\overline{T} \simeq 49.81$; *b)* $\overline{T} \simeq 50$.

9. Una empresa farmacéutica determina que el ingreso obtenido por la venta de x unidades de un producto está dado por $R(x) = 50 + 4x + 3x^2$. Calcular el ingreso medio para las ventas desde $x = 1$ a $x = 5$. Comparar el resultado con la media $\dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{n=1}^{5} R(n)$.

   Solución. $\overline{R} = 93$; $\dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{n=1}^{5} R(n) = 95$.

10. La velocidad de la sangre, en centímetros por segundo, en una pequeña arteria está dada por $V(r) = \dfrac{P}{4\omega l}(R^2 - r^2)$ $(0 \le r \le R)$, donde P es la presión sanguínea, ω es la viscosidad de la sangre, l es la longitud de de la arteria, R es el radio de la arteria y r es la distancia al centro de la arteria del punto donde medimos la velocidad. Encontrar el valor medio de $V(r)$ en el intervalo $[0, R]$.

    Solución. $\overline{V} = \dfrac{PR^2}{6wl}$ cm/s.

11. Deteminar la respuesta cardiaca de un corazón durante 24 segundos, si se emplean 5 miligramos de tinte y la concentración en la aorta con respecto al tiempo es

$$c(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le t < 2 \\ -\dfrac{1}{40}(t^2 - 26t + 48), & \text{si } 2 \le t \le 24, \end{cases}$$

donde $c(t)$ se mide en miligramos por litro. Aproximar el resultado por medio de las reglas *a*) trapezoidal y *b*) de Simpson, con 4 intervalos.

Solución. $R \simeq 0.11$ L/s; *a*) $R \simeq 0.12$ L/s; *b*) $R \simeq 0.11$ L/s.

12. Evaluar la concentración media del problema anterior en el intervalo $[0,24]$.

    Solución. $\bar{c} \simeq 1.85$ mg/L.

13. Determinar la respuesta cardiaca de un corazón durante 30 segundos, si se emplean 5 mg de tinte y la función concentración es

$$c(t) = \begin{cases} \dfrac{4}{21}t, & \text{si } 0 \leq t < 15 \\ -\dfrac{4}{21}t + \dfrac{40}{7}, & \text{si } 15 \leq t \leq 30, \end{cases}$$

donde $c(t)$ se mide en miligramos por litro.

Solución. $R \simeq 0.12$ L/s.

14. Evaluar la concentración media del problema anterior en el intervalo $[0,30]$.

    Solución. $\bar{c} \simeq 1.43$ mg/L.

15. Se inyectan 5 mg de tinta en la arteria pulmonar de un paciente. Determinar la respuesta cardiaca durante un periodo de 30 segundos, si para determinar la concentración de tinta se han tomado las siguientes mediciones:

t	0	5	10	15	20	25	30
$c(t)$	0	1.25	2	2.25	2	1.25	0

Solución. $R \simeq 0.11$ L/s.