Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: problemas propuestos

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

5. Problemas propuestos

5.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden.

A. VARIABLES SEPARADAS

a) $3e^x(\operatorname{tg} y)\,dx + (2-e^x)\sec^2 y\,dy = 0$.

b) $(1+e^x)yy' = e^x$. Hallar la solución que pasa por (0,1).

c) $y' \operatorname{sen} x = y \ln y$. Hallar las soluciones que verifican *i)* $y(\pi/2) = e$; *ii)* $y(\pi/2) = 1$.

Solución. a) $y = \operatorname{arc\,tg}[C(2-e^x)^3]$; *b)* $y = \sqrt{1+2\ln\dfrac{1+e^x}{2}}$; *c) i)* $y = e^{\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}$; *ii)* $y = 1$.

B. HOMOGÉNEAS

a) $y' = \dfrac{(y-x)}{(y+x)}$; *b)* $xy' = y + \sqrt{x^2-y^2}$;

c) $\left(x^2+y^2\right)\,dx - 2xy\,dy = 0$; *d)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x}$, $y(1) = 1$.

Solución.

a) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{y^2+x^2}{x^2}\right) - \arctan\dfrac{y}{x} = \ln x + C$; *b)* $y = x\operatorname{sen}(\ln x + C)$;

c) $y^2 = x^2 + Cx$; *d)* $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2x}$.

C. LINEALES

a) $y' + 2y = 0$; *b)* $2y' + 10y = 1$; *c)* $y' + y = e^{3x}$;

d) $y' = y + e^x$; *e)* $x^2y' + xy = 1$; *f)* $y' = 2y + x(e^{3x} - e^{2x})$, $y(0) = 2$;

g) $\cos x y' + y \operatorname{sen} x = 1$; *h)* $xy' + 4y = x^3 - x$; *i)* $(\cos^2 x)y' + y = 1$, $y(0) = -3$.

Solución.

a) $y = Ce^{-2x}$; *b)* $y = Ce^{-5x} + \dfrac{1}{10}$; *c)* $y = e^{-x}\left(\dfrac{e^{4x}}{4} + C\right)$;

d) $y = e^x(x+C)$; *e)* $y = \dfrac{1}{x}(\ln x + C)$; *f)* $y = e^{3x}(x-1) - \dfrac{x^2e^{2x}}{2} + 3e^{2x}$;

g) $y = \operatorname{sen} x + C\cos x$; *h)* $y = \dfrac{x^3}{7} - \dfrac{x}{5} + \dfrac{C}{x^4}$; *i)* $y = 1 - 4e^{-\operatorname{tg} x}$.

D. DIFERENCIALES EXACTAS

a) $(2x+4)\,dx+(3y-1)\,dy=0$;

b) $(5x+4y)\,dx+(4x-8y^3)\,dy=0$;

c) $(\operatorname{sen}y-y\operatorname{sen}x)\,dx+(\cos x+x\cos y-y)\,dy=0$;

d) $(2y^2x-3)\,dx+(2yx^2+4)\,dy=0$;

e) $(x^3+xy^2)\,dx+(x^2y+y^3)\,dy=0$;

f) $x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0$;

g) $(3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy=0$.

Solución.

a) $x^2+4x+\dfrac{3}{2}y^2-y=C$;

b) $\dfrac{5}{2}x^2+4xy-2y^4=C$;

c) $x\operatorname{sen}y+y\cos x-\dfrac{y^2}{2}=C$;

d) $x^2y^2-3x+4y=C$;

e) $(x^2+y^2)^2=C$;

f) $x^4+x^2y^2+y^4=C$;

g) $x^3+3x^2y^2+y^4=C$.

E. MISCELÁNEA

a) $y\ln y+xy'=0$;

b) $4x-3y+y'(2y-3x)=0$;

c) $y'+2y=x^2+2x$;

d) $(2xy-3x^2)\,dx+(x^2-2y)\,dy=0$;

e) $(y/x^2)\,dx-(1/x)\,dy=0$;

(f) $(x^2+2x-1)y'-(x+1)y=x-1$;

g) $e^y(1+x^2)\,dy-2x(1+e^y)\,dx=0$;

h) $ye^{xy}\,dx+(3+xe^{xy})\,dy=0$;

i) $(1+y^2)(e^{2x}\,dx-e^y\,dy)-(1+y)\,dy=0$;

j) $xy'-y=x^3(3\ln x-1)$;

k) $y'=a^{x+y}$ $(a>0, a\neq 0)$;

l) $(y^2-x)\,dx+2y\,dy=0$.

Solución.

a) $y=e^{C/x}$;

b) $2x^2-3xy+y^2=C$;

c) $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}+Ce^{-2x}$;

d) $x^2y-x^3-y^2=C$;

e) $y=Cx$;

f) $y=x+C\sqrt{x^2+2x-1}$;

g) $1+x^2=C(1+e^y)$;

h) $e^{xy}+3y=C$;

i) $\dfrac{1}{2}e^{2x}=e^y+\operatorname{arctg}y+\dfrac{1}{2}\ln(1+y^2)+C$;

j) $y=\dfrac{x^3}{2}\left(3\ln x-\dfrac{5}{2}\right)+Cx$;

k) $a^x+a^{-y}+C\ln a=0$;

l) $e^x(y^2-x+1)=C$.

5.2. Aplicaciones: problemas de desintegración radiactiva

2. Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas, su masa disminuyó en un 3 %. Si en un instante cualquiera la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia presente, determinar la cantidad que queda después de 24 horas.

Solución. 88.5 mg.

3. En un trozo de madera quemada o carbón, se encontró que el 85.5 % del ^{14}C se había desintegrado. ¿Qué edad tenía aproximadamente la madera?

   NOTA: La vida media del ^{14}C es de 5568 años. Es precisamente este dato el que los arqueólogos usaron para determinar la edad de las pinturas prehistóricas encontradas en una caverna de Lascaux (Francia).

   Solución. 15600 años.

4. La vida media del cobalto radiactivo es de 5.27 años. Supóngase que debido a un accidente nuclear su nivel en una región asciende hasta sobrepasar en 100 veces el nivel aceptable para la vida humana. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que la región vuelva a ser habitable?

   Solución. 35 años.

5. Si se sabe que el 0.5 % del radio se desintegra en 12 años, ¿qué porcentaje desaparecerá en 1000 años? Determinar la vida media del radio.

   Solución. 34.14 %; 1659 años.

6. El *hombre de Similaum* es un fósil humano encontrado en el Tirol hace unos años. Si se estima que su edad oscila entre los 4368 y los 4868 años, deteminar entre qué valores se encuentran los niveles de ^{14}C de este fósil. ¿Podemos asegurar que tiene menos de la mitad de la cantidad de ^{14}C que tenía en el momento de morir? Justificar esta última respuesta.

   NOTA: La vida media del ^{14}C es de 5568 años.

   Solución. Entre el 54.55 % y el 58.06 %.

7. Cierto material radiactivo tiene una vida media de dos horas. Determinar el intervalo de tiempo requerido para que una cantidad dada de material decaiga hasta la décima parte de su masa original.

   Solución. 6.6 h.

5.3. Aplicaciones: problemas de crecimiento poblacional

8. Se sabe que la población de una cierta comunidad aumenta, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional al número de personas presentes en dicho instante. Si la población se duplica en 5 años, ¿cuánto tardará en triplicarse? ¿Y en cuadruplicarse?

   Solución. 7.9 años; 10 años.

9. Supongamos que se sabe que la población de la comunidad del problema anterior es de 10000 habitantes después de 3 años. ¿Cuál era la población inicial? ¿Cuál será la población en 10 años?

   Solución. 6598 habitantes; 26392 habitantes.

10. El número de supermercados $C(t)$ en todo el país que usan un sistema de control por ordenador de los horarios de salida se describe por medio del problema de valor inicial

$$\frac{dC}{dt} = C(1-0.0005C) \quad (t>0,\, C(0)=1).$$

   ¿Cuántos supermercados estarán usando dicho sistema cuando $t=10$? ¿Cuántas empresas se estima que adoptarán el nuevo procedimiento en el futuro?

   Solución. 1834 supermercados; 2000 empresas.

11. El número $N(t)$ de personas de una comunidad que verán cierto anuncio publicitario se rige por la ecuación $\frac{dN}{dt} = N(a-bN)$. Inicialmente $N(0)=500$, y se observa que $N(1)=1000$. Si se predice que el número límite de personas de la comunidad que verán el anuncio es de 50000, determinar $N(t)$ en un instante cualquiera.

   Solución. $N(t) = \dfrac{505e^{0.7t}}{1+0.01e^{0.7t}}$.

5.4. Aplicaciones: problemas de mezclas

12. Se disuelven inicialmente 50 libras de sal en un recipiente grande que contiene 300 galones de agua. Se bombea salmuera al recipiente a razón de 3 galones por minuto, siendo la concentración de la solución entrante de 2 libras por galón. La solución debidamente mezclada se bombea hacia afuera a razón de 2 galones por minuto. La ecuación diferencial para la cantidad A de sal (en libras) dentro del recipiente en cada instante es $\frac{dA}{dt} = 3\cdot 2 - 2\frac{A}{300+t}$. Determinar la cantidad de sal que hay en el recipiente en un instante cualquiera.

   Solución. $A(t) = 2(300+t) - \dfrac{495\cdot 10^5}{(300+t)^2}$.

13. Un gran tanque está parcialmente lleno con 100 galones de fluido, en los cuales se disuelven 10 libras de sal. Una salmuera que contiene media libra de sal por galón se bombea dentro del tanque con una rapidez de 6 galones por minuto. La solución adecuadamente mezclada se bombea enseguida hacia el exterior del tanque con una rapidez de 4 galones por minuto. Encontrar el número de libras de sal que hay en el tanque transcurridos 30 minutos.

Solución. 64.375 lb.

14. Un tanque está lleno de 100 litros de agua en los que se han disuelto 20 kilogramos de sal. Otra mezcla que contiene 1 kilogramo de sal por litro es bombeada al tanque a razón de 7 litros por minuto. La solución mezclada es bombeada hacia el exterior a razón de 8 litros por minuto. Determinar la función que da la cantidad de sal en cada instante. ¿Se vaciará totalmente el tanque?

    Solución. $y(t) = 100 - t - 80\left(1 - \frac{t}{100}\right)^8$; el tanque se vaciará a los 100 min.

15. Un tanque de 100 litros de agua carbonatada contiene una cantidad inicial de 20 gramos de gas. Se incorpora al tanque más agua carbonatada a razón de 4 litros por minuto, con una concentración de 3 gramos de gas por litro. La mezcla es expulsada al exterior a razón de 3 litros por minuto.

    a) Determinar la función que da la cantidad de gas en cada instante.

    b) ¿Qué cantidad de gas habrá después de una hora? ¿Y de agua carbonatada?

    Solución. a) $y(t) = 3(100+t) - 280\left(\frac{100}{100+t}\right)^3$; *b*) 411.64 gr, 160 L.

16. En un depósito de 150 litros de agua se disuelven 60 kilogramos de sal. Seguidamente se bombea una mezcla a razón de 5 litros por minuto con una concentración de 3 kilogramos por litro. Simultáneamente se bombea hacia afuera la mezcla final, a razón de 2 litros por minuto. ¿Qué cantidad de sal hay en el depósito a las 2 horas? Determinar la cantidad que hay a las 4 horas.

    Solución. 1357.52 kg; 2489.19 kg.

5.5. Aplicaciones: problemas de temperatura

17. Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea sigue *la ley de Newton*. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de 20 °C, se deja caer en un recipiente con agua hirviendo. Calcular el tiempo que dicha barra tardará en alcanzar los 90 °C, si se sabe que su temperatura aumentó 2 °C en un segundo. ¿Cuánto tardará la barra en alcanzar los 98 °C?

    Solución. 82.1 s; 145.7 s.

18. Un termómetro que está en el interior de una habitación se lleva al exterior, donde la temperatura del aire es de 5 °F. Después de 1 minuto el termómetro marca 55 °F, y después de 5 minutos marca 30 °F. ¿Cuál es la temperatura inicial de la habitación?

    Solución. 64.5 °F.

19. Un termómetro se saca de una habitación, donde la temperatura del aire es de 70 °F, al exterior, donde la temperatura es de 10 °F. Después de medio minuto el termómetro marca 50 °F. ¿Cuánto marcará después de 1 minuto? ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar los 15 °F?

    Solución. 36.67 °F; 3.06 min.

20. Un cuerpo de temperatura desconocida se coloca en una nevera que se mantiene a temperatura constante de 0 °F. Tras 15 minutos el cuerpo está a 30 °F, y después de 30 minutos está ya a 15 °F. ¿Cuál era su temperatura inicial?

    Solución. 60 °F.

5.6. Aplicaciones: miscelánea

21. La rapidez con que cierto medicamento se disemina en el flujo sanguíneo se rige por la ecuación diferencial

$$\frac{dX}{dt} = A - BX, \quad X(0) = 0,$$

donde A y B son constantes positivas. La función $X(t)$ describe la concentración del medicamento en el flujo sanguíneo en un instante cualquiera t. Encontrar el valor límite de X cuando $t \to \infty$. ¿Cuánto tarda la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite?

Solución. A/B; $\ln 2/B$.

22. Si se administra glucosa por vía intravenosa a razón constante, el cambio en la concentración total $c(t)$ de glucosa en la sangre respecto al tiempo puede expresarse mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dc}{dt} = \frac{G}{100V} - kc.$$

En esta ecuación G, V y k son constantes positivas, siendo G la razón a la cual se administra la glucosa, en miligramos por minuto, y V el volumen total de sangre en el cuerpo, en litros (alrededor de 5 litros en el adulto). La concentración $c(t)$ se mide en miligramos por centilitro. Se incluye el término $-kc$ porque se supone que la glucosa se transforma continuamente en otras moléculas en razón proporcional a su concentración.

a) Resolver la ecuación para $V = 5.2$, $G = 4$, $k = 2$.

b) Hallar la concentración en estado estacionario, es decir, $\lim_{t\to\infty} c(t)$.

Solución. *a*) $c(t) = \frac{1}{260}(1 - e^{-2t}) + c_0 e^{-2t}$; *b*) $\frac{1}{260}$ mg/cL.

23. En la reacción química llamada *inversión del mascabado*, la velocidad de la inversión con respecto al tiempo es proporcional a la cantidad de mascabado que queda sin invertir. Si 1000 kilogramos de mascabado se reducen a 800 kilogramos al cabo de 10 horas, ¿cuánto quedará sin invertir después de 24 horas?

    Solución. 585.35 kg.