Funciones de varias variables: problemas propuestos

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

6. Problemas propuestos **1**
6.1. Derivadas parciales 1
6.2. Aplicaciones de la diferencial 2
6.3. Extremos de funciones de dos variables 5

6. Problemas propuestos

6.1. Derivadas parciales

1. Demostrar que:

   a) $u = ax^4 + 2bx^2y^2 + cy^4$ satisface la ecuación $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 4u$.

   b) $u = \dfrac{x^2y^2}{x+y}$ satisface la ecuación $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3u$.

   c) $u = x^2y + y^2z + z^2x$ satisface la ecuación $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = (x+y+z)^2$.

   d) $u = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ satisface la ecuación $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

   e) $z = (\cos at)\operatorname{sen} x$ satisface la *ecuación de ondas* $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

   f) $z = \cos(x+at) + \operatorname{sen}(x-at)$ también satisface la ecuación de ondas.

2. Dada la función $z = \ln(x^2+y^2) + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$, calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

   Solución. $z_{xx} + z_{yy} = 0$.

3. La concentración molecular $C(x,t)$ de un líquido está dada por $C(x,t) = t^{-1/2}e^{-x^2/kt}$. Comprobar que $C(x,t)$ verifica la *ecuación de difusión*

$$\frac{k}{4}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

4. Determinar a y b para que la función $z = x^2 + xy + \dfrac{y}{x+y}$ satisfaga la relación $z_{xx} + az_{xy} + bz_{yy} = 0$.

   Solución. $a = -2$, $b = 1$.

5. La presión P ejercida por un gas ideal encerrado está dada por $P = k\dfrac{T}{V}$, donde k es una constante, T es la temperatura y V el volumen. Determinar:

   a) La razón de cambio de P con respecto a V.

   b) La razón de cambio de V con respecto a P.

   c) La razón de cambio de T con respecto a P.

   Solución. a) $\dfrac{\partial P}{\partial V} = -\dfrac{P}{V}$; *b*) $\dfrac{\partial V}{\partial P} = -\dfrac{V}{P}$; *c*) $\dfrac{\partial T}{\partial P} = \dfrac{T}{P}$.

6. La temperatura T de una placa plana rectangular está dada por $T(x,y) = xy(2-x)(2-y)$, con $0 \le x \le 2$ y $0 \le y \le 2$. En $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, determinar la razón de cambio de T:

   a) con respecto a x;

b) con respecto a y.

Solución. a) 0; *b*) 1.

7. El potencial electrostático en un punto (x,y) del plano debido a una carga puntual unitaria en el origen está dado por $U(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Determinar la razón de cambio de U en la dirección del eje OX, en el punto (3,4).

   Solución. $-\dfrac{3}{125}$.

8. Dada la función $z = \cos\dfrac{x}{2y} + \ln(x^2+y^2)$, calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

   Solución. $z_{xx} + z_{yy} = -\dfrac{x}{y^3}\operatorname{sen}\dfrac{x}{2y} - \dfrac{x^2+y^2}{4y^4}\cos\dfrac{x}{2y}$.

6.2. Aplicaciones de la diferencial

9. La ley de los cosenos para un triángulo es $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Supóngase que $b = 10$ y $c = 15$ centímetros, y $A = \pi/3$ radianes.

   a) Hallar a.

   b) Hallar el coeficiente de variación de a con respecto a b si c y A se mantienen constantes.

   c) Usando el resultado de *b*), calcular (mediante diferenciales) la variación aproximada de a, si b disminuye en 1 centímetro.

   d) Hallar el coeficiente de variación de a respecto de A, si b y c se mantienen constantes.

   Solución. a) 13.23; *b*) 0.19; *c*) -0.19; *d*) 9.82.

10. El área de un triángulo viene dada por la fórmula $K = \dfrac{1}{2}bc\operatorname{sen}A$. Supóngase que $b = 10$ y $c = 20$ centímetros, y $A = \pi/3$ radianes.

    a) Hallar el área del triángulo.

    b) Hallar la velocidad de cambio del área respecto al ángulo A si b y c se conservan constantes.

    c) Usando el resultado *b*), calcular (mediante diferenciales) la variación aproximada del área si se incrementa el ángulo en un grado.

    Solución. a) 86.60 cm^2; *b*) 50; *c*) 0.87 cm^2.

11. Estimar mediante diferenciales el cambio en $f(x,y) = yx^{2/5} + xy^{1/2}$ desde $(32,16)$ hasta $(35,18)$.

    Solución. 30.4.

12. Estimar mediante diferenciales el cambio de $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ desde $(4,2)$ hasta $(4.1,2.1)$.

    Solución. -0.01.

13. Estimar mediante diferenciales el cambio de $u=x^2-3xy+2y^2$ en el punto $(2,-3)$, si $\Delta x=-0.3$ y $\Delta y=0.2$.

    Solución. -7.5.

14. Estimar mediante diferenciales el cambio de $u=(x+y)(x-y)^{1/2}$ en $(6,2)$, si $\Delta x=0.25$ y $\Delta y=-0.5$.

    Solución. 1.

15. La presión P de un gas ideal encerrado está definida por $P=k\dfrac{T}{V}$, donde V es el volumen, T es la temperatura y k es una constante. Dado que los porcentajes de error al medir T y V son a lo sumo del $0.6\,\%$ y el $0.8\,\%$, respectivamente, evaluar, haciendo uso de diferenciales, el porcentaje máximo de error cometido al calcular P.

    Solución. $1.4\,\%$.

16. Calcular el incremento aproximado de volumen de un cilindro circular recto si su altura aumenta de 10 a 10.5 centímetros y su radio aumenta de 5 a 5.3 centímetros. ¿Cuál es el nuevo volumen aproximado?

    Solución. $\Delta V\simeq 133.52\ \text{cm}^3$; $V\simeq 918.92\ \text{cm}^3$.

17. La *ley de Poiseuille* mide la intensidad de sangre a través de una arteria y viene dada por $F=\dfrac{kR^4}{L}$, donde k es una constante, R es el radio de la arteria y L es su longitud. Si cometemos un error máximo del $3\,\%$ al medir R y de un $2\,\%$ al medir L, estimar, por medio de diferenciales, el error relativo máximo que se comete al calcular F.

    Solución. $14\,\%$.

18. Una función asociada a la velocidad v de una molécula de masa m en un gas uniforme es $f(v,m)=av^2e^{-mv^2}$ (a constante). Acotar, por medio de diferenciales, el error absoluto cometido al evaluar $f(v,m)$ en el punto $(1,0)$ si se comete un error máximo de una centésima al medir v y de una milésima al medir m.

    Solución. $\Delta\simeq 0.021\cdot|a|$.

19. Hallar un valor aproximado de $\sqrt[3]{5.01^2+2\cdot 0.98^2}$.

    Solución. $4051/1350=3.000740740740\ldots$.

20. Determinar, por medio de diferenciales, una aproximación de $\sqrt{2.98^2+4.01^2}$.

    Solución. 4.996.

21. El sistema cardiovascular humano se asemeja a circuitos eléctricos conectados en serie y en paralelo. Por ejemplo, cuando la sangre fluye a través de dos resistencias vasculares en paralelo, la resistencia equivalente del circuito es $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$. Si los porcentajes de error al medir R_1 y R_2 son 0.3 % y 0.6 %, respectivamente, calcular, por medio de diferenciales, el porcentaje máximo de error cometido al calcular R.

    Solución. 0.9 %.

22. La energía de una partícula encerrada (por ejemplo, una molécula de gas en una caja) viene dada por la fórmula $E = \dfrac{(h\pi)^2}{ma^2}$, donde $h = 1.0544 \cdot 10^{-34}$, m es la masa de la partícula y a su aceleración.

    a) Determinar la cota de variación de energía por unidad de masa para una partícula de masa $18.2182 \cdot 10^{-31}$ kilogramos en el instante de aceleración $a = 10$ metros por segundo al cuadrado.

    b) Determinar por medio de diferenciales el error porcentual que se comete al medir la energía, si al medir la masa y la aceleración de la partícula se cometen errores del 2 % y el 3 %, respectivamente.

    Solución. a) $-3.3 \cdot 10^{-10}$; *b*) 8 %.

23. La aceleración centrípeta de una partícula que se mueve en una circunferencia es $a = \dfrac{v^2}{R}$, siendo v su velocidad y R el radio de la circunferencia. Hallar, mediante diferenciales, el error porcentual máximo cometido al medir a si, como máximo, se cometen errores del 2 % al medir v y del 3 % al medir R.

    Solución. 7 %

24. Sea A el área de un triángulo de lados a y b que forman un ángulo de θ radianes. Supongamos que $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ y que a crece un 4 %, mientras que b decrece un 3 %. Utilizar diferenciales para estimar el cambio porcentual de A. SUGERENCIA: el área del triángulo es $A = \dfrac{1}{2}ab\,\operatorname{sen}\theta$.

    Solución. 7 %.

25. Se miden el radio y la altura de un cono recto con errores de, a lo más, 3 % y 2 %, respectivamente. Usar incrementos para aproximar el porcentaje máximo de error que se puede cometer al calcular el volumen del cono si se utilizan esas medidas. SUGERENCIA: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$, donde R es el radio de la base y H es la altura.

    Solución. 8 %.

6.3. Extremos de funciones de dos variables

26. Hallar los extremos de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = 2x - x^2 - y^2$; b) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$; *c*) $f(x,y) = x^3 - y^2 + 2y$;

d) $f(x,y) = x^2 + y^2$; *e*) $f(x,y) = e^x \cos y$; (f) $f(x,y) = x \operatorname{sen} y$;

g) $f(x,y) = -x^2 - y^2$; *h*) $f(x,y) = x^2 - y^2$; *i*) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$;

j) $f(x,y) = x^2 + 4x + y^2$; *k*) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x - 4y$; *l*) $f(x,y) = x^3 + 2x + y^3 - y^2$;

m) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$; *n*) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$; *o*) $f(x,y) = x^2 - 4y^2$;

p) $z = xy - x^4 - y^4$.

Solución.

a) $(1,0)$ máximo relativo; *b*) $(0,0)$ mínimo relativo; *c*) criterio no concluyente;

d) $(0,0)$ mínimo relativo; *e*) no tiene; *f*) $(0,k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$ puntos de silla;

g) $(0,0)$ máximo relativo; *h*) $(0,0)$ punto de silla; *i*) $(0,0)$ mínimo relativo;

j) $(-2,0)$ mínimo relativo; *k*) $(1-2)$ máximo relativo; *l*) no tiene;

m) $(0,0)$ máximo relativo; *n*) $(0,0)$ máximo relativo; *o*) $(0,0)$ punto de silla;

p) $(0,0)$ punto de silla , $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ máximos relativos.