Funciones de varias variables: problemas resueltos

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

5. Problemas resueltos

5.1. Funciones de varias variables

Ejercicio 5.1. *Hallar el dominio de la función* $f(x,y) = x/y$.

RESOLUCIÓN. Su dominio, claramente, será $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, es decir, todo el plano menos la recta $y = 0$. □

Ejercicio 5.2. *Determinar el dominio de la función*

$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

RESOLUCIÓN. Es el conjunto $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, es decir, todo el plano menos el origen de coordenadas. □

5.2. Derivadas parciales

Ejercicio 5.3. *Hallar las derivadas parciales de la función* $f(x,y) = x^2 \operatorname{tg} xy$.

RESOLUCIÓN. Se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \operatorname{tg} xy + \frac{x^2 y}{\cos^2 xy},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3}{\cos^2 xy}.$$

□

Ejercicio 5.4. *Dada la función* $z = Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4$, *probar que* $xz_x + yz_y = 4z$.

RESOLUCIÓN. Se tiene:

$$z_x = 4Ax^3 + 4Bxy^2, \quad z_y = 4Bx^2y + 4Cy^3,$$

con lo cual:

$$xz_x + yz_y = 4Ax^4 + 4Bx^2y^2 + 4Bx^2y^2 + 4Cy^4 = 4Ax^4 + 8Bx^2y^2 + 4Cy^4 = 4z.$$

□

Ejercicio 5.5. *Hallar las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función $z = e^{xy}$.*

RESOLUCIÓN. Se tiene:

$$\begin{aligned} z_x &= ye^{xy}, & z_y &= xe^{xy}, \\ z_{xx} &= y^2e^{xy}, & z_{yy} &= x^2e^{xy}, \\ z_{xy} &= z_{yx} = e^{xy} + xye^{xy}. \end{aligned}$$

□

Ejercicio 5.6. *Sea $z = \ln(x^2+y)$. Comprobar que $z_{xy} = z_{yx}$, en los puntos donde esta igualdad tenga sentido.*

RESOLUCIÓN. Comenzamos calculando

$$z_x = \frac{2x}{x^2+y}.$$

Ahora,

$$z_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2+y}\right) = \frac{-2x}{(x^2+y)^2}.$$

Por otra parte,

$$z_y = \frac{1}{x^2+y}.$$

Si derivamos respecto a x obtenemos

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y}\right) = \frac{-2x}{(x^2+y)^2},$$

lo que prueba la igualdad. □

Ejercicio 5.7. *Probar que la función*

$$z = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

satisface la ecuación de Laplace $z_{xx} + z_{yy} = 0$.

RESOLUCIÓN. Tenemos:

$$z_x = \frac{\frac{-y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad z_y = \frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

De aquí, aplicando la regla de derivación de un cociente:

$$z_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad z_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

lo que prueba que se verifica dicha ecuación. □

5.3. Aplicaciones de la diferencial

Ejercicio 5.8. *El radio de la base y la altura de un cono circular recto se han medido dando como resultado* 10 *y* 25 *centímetros, respectivamente, con un posible error en la medida de* 0.1 *centímetros como máximo en cada medición. Utilizar la diferencial para estimar el error que se produce en el cálculo del volumen del cono.*

RESOLUCIÓN. Si un cono tiene por radio de la base x y por altura y, su volumen es

$$V = V(x,y) = \frac{\pi}{3}x^2y.$$

El error cometido en el cálculo del volumen es la diferencia entre el valor de esta función en $(10,25)$ y su valor en $(10+0.1, 25+0.1)$:

$$V(10+0.1, 25+0.1) - V(10,25),$$

la cual, aproximadamente, es la diferencial de V en $(10,25)$ evaluada en el punto $(0.1,0.1)$. Como la diferencial en un punto genérico (x,y) es

$$[dV(x,y)](h,k) = \frac{2\pi}{3}xyh + \frac{\pi}{3}x^2k,$$

en el punto $(10,25)$ será

$$[dV(10,25)](h,k) = \frac{500\pi}{3}h + \frac{100\pi}{3}k,$$

y, finalmente,

$$[dV(10,25)](0.1,0.1) = \frac{500\pi}{3}\cdot 0.1 + \frac{100\pi}{3}\cdot 0.1 = 20\pi \simeq 63 \text{ cm}^3.$$

□

5.4. Extremos de funciones de dos variables

Ejercicio 5.9. *Determinar los extremos relativos de* $f(x,y) = 1 - \sqrt[3]{x^2+y^2}$.

RESOLUCIÓN. Como

$$f_x(x,y) = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}, \quad f_y(x,y) = -\frac{2y}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}},$$

vemos que ambas derivadas parciales están definidas en todo $\mathbb{R}^2$, excepto en $(0,0)$. Además, este es el único punto crítico, ya que las derivadas parciales no pueden anularse simultáneamente salvo que x e y sean nulos. Se tiene $f(0,0) = 1$; para cualquier otro punto (x,y), es claro que

$$f(x,y) = 1 - \sqrt[3]{x^2+y^2} < 1.$$

Luego, $f(0,0)$ es un máximo relativo de f. □

Ejercicio 5.10. *Determinar los extremos relativos de la función* $z = x^3 - 6xy + y^3$.

RESOLUCIÓN. Para hallar los posible extremos calculamos las derivadas parciales de primer orden:

$$z_x = 3x^2 - 6y, \quad z_y = -6x + 3y^2;$$

a continuación, igualamos ambas a cero y resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 3y^2 = 0, \end{cases}$$

cuyas soluciones son $(0,0)$ y $(2,2)$.

Para saber si son puntos extremos y de qué tipo, calculamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$z_{xx} = 6x, \quad z_{xy} = -6, \quad z_{yy} = 6y.$$

El hessiano para el primer punto es entonces

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36,$$

por lo que $(0,0)$ es un punto de silla.

Para el segundo punto, el hessiano sería:

$$H = (2,2) \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = 108,$$

y como $z_{xx} = 12$, en $(2,2)$ tenemos un mínimo relativo. $\square$