Cálculo integral de funciones de una variable: problemas resueltos

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

3. Problemas resueltos

3.1. Integral indefinida

Ejercicio 3.1. *Calcular*

$$\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2}\, dx.$$

RESOLUCIÓN. Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, efectuamos la división de polinomios para obtener una fracción racional propia:

$$\frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} = x - \frac{x-1}{x^2(x-1)}.$$

A continuación, descomponemos el segundo sumando de la expresión anterior en fracciones simples:

$$\frac{x-1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{(A+C)x^2 + (-A+B)x - B}{x^2(x-1)}.$$

Igualando numeradores, encontramos que $B = -1$ $A = -2$, $C = 2$. Por tanto:

$$\int \frac{x-1}{x^2(x-1)}\, dx = \int x\, dx + \int \frac{2}{x}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx - \int \frac{2}{x-1}\, dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x} + C.$$

□

3.2. Integral definida

3.2.1. Cálculo de áreas

Ejercicio 3.2. *Calcular el área de la región limitada por la gráfica de las funciones $y = 2x$, $y = x^2 - 4x$.*

RESOLUCIÓN. Las abscisas de los puntos de intersección de las dos curvas (recta y parábola, respectivamente) se obtienen igualando los segundos miembros de las ecuaciones $y = 2x$, $y = x^2 - 4x$, y resultan ser $x = 0$, $x = 6$.

Por tanto, el área buscada (ver Figura 3.1) será

$$A = \int_0^6 [2x - (x^2 - 4x)]\, dx = \int_0^6 (6x - x^2)\, dx = \left[3x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^6 = 36.$$

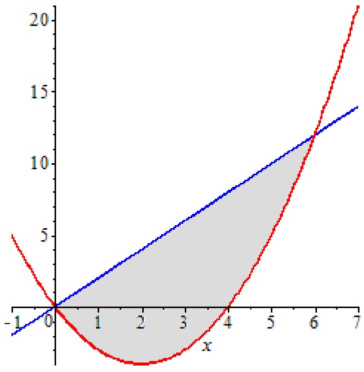

Figura 3.1.

□

3.2.2. Integración numérica

Ejercicio 3.3. *Se determinan experimentalmente los valores de cierta función que se muestran en la siguiente tabla:*

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$f(x)$	4	5	6	8	9	11	14

Estimar

$$\int_1^4 f(x)\,dx$$

mediante las Reglas Trapezoidal y de Simpson.

RESOLUCIÓN.

- Regla Trapezoidal:

$$\int_1^4 f(x)\,dx \simeq \frac{4-1}{6}\left[\frac{4}{2}+5+6+8+9+11+\frac{14}{2}\right]=24.$$

- Regla de Simpson:

$$\int_1^4 f(x)\,dx \simeq \frac{4-1}{3\cdot 6}\left[4+(4\cdot 5)+(2\cdot 6)+(4\cdot 8)+(2\cdot 9)+(4\cdot 11)+14\right]=24.$$

□

3.2.3. Aplicaciones: valor medio de una función

Ejercicio 3.4. *La concentración plasmática de cierto medicamento administrado por vía oral está dada en función del tiempo t, medido en horas, por la expresión* $C(t) = 5(e^{-0.3t} - e^{-57})$ $(t \geq 0)$. *¿Cuál es la concentración media en la primera hora?*

RESOLUCIÓN. Se verifica:

$$A(C) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 5(e^{-0.3t} - e^{-5t})\,dt = 5\left[\frac{e^{-0.3t}}{-0.3} - \frac{e^{-5t}}{-5}\right]_0^1 = 5\left[\frac{1}{0.3}(1-e^{-0.3}) - \frac{1}{5}(1-e^{-5})\right] = 3.3264.$$

□

Ejercicio 3.5. *La velocidad de una determinada reacción química varía con la temperatura a la que se realiza, de forma que*

$$V(T) = 16 - 0.3T + 0.0016T^2.$$

Obtener el valor medio de la velocidad en el rango $T \in [273, 300]$.

RESOLUCIÓN. Se tiene:

$$\begin{aligned} A(V) &= \frac{1}{300-273}\int_2 73^3 00(16 - 0.3T + 0.0016T^2)\,dT \\ &= \frac{1}{27}\left[16T - \frac{0.3}{2}T^2 + \frac{0.0016}{3}T^3\right]_2 73^3 00 = 61.4788. \end{aligned}$$

□