Cálculo diferencial de funciones de una variable: problemas propuestos

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

6. Problemas propuestos **1**
6.1. Propiedades de la derivada 1
6.2. Cálculo de extremos 2
6.3. Optimización 4

6. Problemas propuestos

6.1. Propiedades de la derivada

1. Hallar la razón $\Delta y/\Delta x$ para la función $y = 1/x$ en el punto $x = 2$, si: *a)* $\Delta x = 1$; *b)* $\Delta x = 0.1$; *c)* $\Delta x = 0.01$. Comprobar que $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(2)$.

   Solución. *a)* -0.167; *b)* -0.238; *c)* -0.249; $y'(2) = -0.25$.

2. Encontrar la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones:

   a) $y = \sqrt{1+\operatorname{tg} x}$; *b)* $y = \operatorname{ctg}(\ln x)$;

   c) $y = e^{x^x}$; *d)* $y = \ln(x^2 e^x)$;

   e) $y = \dfrac{2e^g - 1}{1-g^2}$, $g = \cos^2 2x$.

   Solución.

   a) $y' = \dfrac{\sec^2 x}{2\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$; *b)* $y' = -\dfrac{\operatorname{cosec}^2(\ln x)}{x}$;

   c) $y' = e^{x^x} x^x (1+\ln x)$; *d)* $y' = 1 + \dfrac{2}{x}$;

   e) $y' = \dfrac{2e^g(1-g^2) + 2g(2e^g - 1)}{(1-g^2)^2} g'$, $g' = -2\operatorname{sen} 4x$.

3. Demostrar:

   a) $\left(\ln\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg} x-1}}\right)' = \dfrac{1}{\cos 2x}$; *b)* $\left(\ln\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\right)' = \dfrac{-1}{2(1-x)\sqrt{x}}$;

   c) $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)' = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$;

   d) $\left(\ln\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)' = \dfrac{x}{x^2+x+1}$;

   e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2 - x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)' = \dfrac{2x^2}{1+x^4}$.

4. Dada la función $y = e^{ax}(m\cos bx + n\operatorname{sen} bx)$, donde a, b, m, n son constantes, demostrar que $y'' - 2ay' + (a^2+b^2)y = 0$.

5. La ecuación del movimiento armónico de un péndulo es $s = s_o \operatorname{sen} wt$. Calcular la velocidad $v = \dfrac{ds}{dt}$ y la aceleración $b = \dfrac{dv}{dt}$ del péndulo. ¿Cuál es la expresión que relaciona s y b?

   Solución. $b + w^2 s = 0$.

6. Denotando por R la resistencia eléctrica, en microohmios por centímetro cúbico, y por x el porcentaje de aluminio en el acero, se verifica para el acero pobre en carbono la relación $R = 12 + 12x - 0.3x^3$. Hallar el incremento relativo de R respecto a x cuando $x = 4$.

   Solución. $R'(4) = -2.4$.

7. Supóngase que una enzima actúa sobre un sustrato. Si $A(t) = 45\sqrt{t}$ es la función que da en cada instante la cantidad de sustrato transformado, se pide:

   a) Calcular la tasa media de variación de A en el intervalo [1,25].

   b) Calcular la velocidad de transformación.

   Solución. $T_m = 7.5$; $A'(t) = \dfrac{45}{2\sqrt{t}}$.

8. Si la cantidad de sustancia presente en una reacción química de tercer orden en el tiempo t (medido en segundos) es $x(t) = \dfrac{x_0}{\sqrt{2kx_0^2t+1}}$, donde x_0 denota la cantidad inicial, determinar la velocidad media de variación de sustancia en los 5 primeros minutos de la reacción.

   Solución. $v_m = \dfrac{x_0}{300}\left(\dfrac{1}{\sqrt{600kx_0^2+1}} - 1\right)$.

9. ¿Cuál es la velocidad media de variación de la función $y = x^3$ en el segmento $1 \leq x \leq 4$? ¿Y la velocidad (instantánea) en $x = 3$?

   Solución. $v_m = 21$; $y'(3) = 27$.

10. Hallar la pendiente media de la curva $y = 2^x$ en el segmento $1 \leq x \leq 5$. Hallar la pendiente en $x = 2$.

    Solución. $p_m = 7.5$; $y'(2) = 2.77$.

6.2. Cálculo de extremos

11. La fórmula para la potencia P (en vatios) de una batería viene dada por $P = VI - RI^2$, donde V es el voltaje, R la resistencia e I la intensidad. Hallar la intensidad (medida en amperios) que corresponde a un máximo de P en una batería donde $V = 12$ voltios y $R = 0.5$ ohmios.

    Solución. $I = 12$ A.

12. La concentración $C(t)$ de una cierta sustancia química en la sangre, tras t horas de su inyección en el tejido muscular, está dada por $C(t) = \dfrac{3t}{27+t^3}$. ¿Cuándo es máxima la concentración?

    Solución. $t = 2.38$ h.

13. La resistencia R de un cierto tipo de resistor está dada por $R = \sqrt{0.001T^4 - 4T + 100}$, donde R se mide en ohmios y la temperatura T en grados Celsius. ¿Qué temperatura produce una resistencia mínima para este tipo de resistor?

    Solución. $T = 10$ °C.

14. La potencia eléctrica P en vatios de un circuito (de corriente continua) con dos resistores de resistencias R_1 y R_2 conectados en paralelo es $P = \dfrac{vR_1R_2}{(R_1+R_2)^2}$, donde v es el voltaje. Si v y R_1 se mantienen constantes, ¿qué resistencia R_2 da lugar a la potencia máxima?

    Solución. $R_2 = R_1$.

15. Dadas dos reacciones químicas consecutivas, la concentración de sustancia que se origina en la primera etapa viene dada por

    $$C(t) = e^{-K_2 t}\frac{K_1C_0}{K_2-K_1}\left[e^{(K_2-K_1)t} - 1\right].$$

    Sabiendo que $K_1 = 0.2$ min^{-1}, $K_2 = 0.1$ min^{-1} y $C_0 = 1$, hallar el instante, a partir del comienzo de la reacción, en el que se presenta la mayor concentración, y hallar dicha concentración máxima.

    Solución. $t_0 = 10\ln 2$; $C(t_0) = 0.5$.

16. La concentración de oxígeno en un estanque contaminado con un residuo orgánico viene dada por la ecuación $C(t) = \dfrac{t^2-t+1}{t^2+1}$ $(0 \le t < \infty)$, donde t representa el tiempo en semanas. Hallar los valores de t que dan las concentraciones extremas.

    Solución. Máximo: $t_0 = 0$ semanas; mínimo: $t_1 = 1$ semana.

17. Suponiendo que la potencia suministrada por una pila de Volta es $W = RI^2$, siendo R la resistencia del circuito, $I = \dfrac{E}{R+r}$ la intensidad de la corriente que produce, E su fuerza electromotriz y r la resistencia interior de la pila, hallar R para que W sea máxima y calcular el valor máximo de la potencia.

    Solución. $W = \dfrac{E^2}{4r}$; $R = r$.

18. El rendimiento de un tornillo de un aparato de rayos X viene dado por $R = \dfrac{h(1-h\,tg\theta)}{h+tg\theta}$, siendo θ el ángulo de rozamiento y h el paso del tornillo. Determinar el valor de h que hace máximo el rendimiento cuando $\theta = \pi/4$.

    Solución. $h = \sqrt{2} - 1 \simeq 0.41$.

19. La cantidad de producto transformado que se produce en un reactor homogéneo depende del tiempo que pasan los componentes en el reactor, y viene dada por $m(t) = \dfrac{1200}{t+1.5}e^{-1/t}$. Determinar en qué instante

se obtiene la máxima cantidad de producto transformado.

Solución. $t = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2} \simeq 1.82.$

6.3. Optimización

20. Hallar los puntos de la hipérbola $\frac{1}{2}x^2 - y^2 = 1$ más próximos a $(3,0)$.

    Solución. $(2,1)$, $(2,-1)$.

21. Una página ha de contener 30 centímetros cuadrados de texto. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 centímetros, y los laterales de 1 centímetro. Hallar las dimensiones de la página que permiten ahorrar más papel.

    Solución. $\sqrt{15}$ cm, $2\sqrt{15}$ cm.

22. Una lata de conservas tiene forma cilíndrica. Hallar las dimensiones más ventajosas de la lata, esto es, determinar la relación entre el diámetro de la base y la altura del cilindro, de modo que se obtenga el volumen máximo con la superficie total prefijada.

    Solución. $h = 2R$ ($R =$ radio de la base, $h =$ altura).

23. Se requiere construir un oleoducto desde una plataforma marina que está localizada al Norte, 20 kilómetros mar adentro, hasta unos tanques de almacenamiento situados en la playa, 15 kilómetros al Este. Si el costo de construcción de cada kilómetro de oleoducto en el mar es de 2000000 euros y en tierra es de 1000000 euros, ¿a qué distancia hacia el Este debe salir el oleoducto submarino en la playa para que el costo de la construcción sea mínimo?

    Solución. $\dfrac{20}{\sqrt{3}} \simeq 11.547$ km.

24. Un observador se encuentra frente a un cuadro colgado de una pared vertical. El borde inferior del cuadro está situado a una distancia de 1 metro sobre el nivel de los ojos del observador, mientras que el borde superior está a una distancia de 2 metros. ¿A qué distancia de la pared debe situarse el observador para que el ángulo bajo el que ve el cuadro sea el máximo?

    Solución. $\sqrt{2}$ m.

25. En un concurso de resistencia, los participantes están 2 millas mar adentro y tienen que llegar a un sitio en la orilla que está a 5 millas al Oeste (la orilla va de Este a Oeste). Suponiendo que un concursante

puede nadar 4 millas por hora y correr 10 millas por hora, ¿hacia qué punto de la orilla debe nadar para minimizar el tiempo total de recorrido?

Solución. Hacia el punto ubicado a $\sqrt{\dfrac{16}{21}} \simeq 0.873$ mi.

26. Dos barcos salen al mismo tiempo: uno de un muelle, con dirección Sur y con velocidad de 20 kilómetros por hora; el otro parte hacia el muelle desde un punto que se encuentra a 15 kilómetros al Oeste, a 10 kilómetros por hora. ¿En qué momento se encuentran más próximos entre sí?

    Solución. 0.3 h.

27. Una ventana normanda tiene forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de P metros, encontrar las dimensiones de la ventana de modo que se admita la cantidad más grande posible de luz.

    Solución. $x = \dfrac{2P}{4+\pi}$ m, $y = \dfrac{P}{4+\pi}$ m.