Cálculo diferencial de funciones de una variable: problemas resueltos

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

5. Problemas resueltos

5.1. Propiedades de la derivada

Ejercicio 5.1. *Dada la ecuación de Van der Waals $(PV^2+a)(V-b)=kV^2$, deducir la variación de presión P por unidad de variación de volumen V.*

RESOLUCIÓN. Se nos pide considerar, a partir de la ecuación de Van der Waals, P como función de V, y obtener $P'(V)$. Despejando P en la ecuación, sigue que

$$\begin{aligned}(PV^2+a)(V-b)=kV^2 \quad &\Rightarrow \quad PV^2+a=k\frac{V^2}{V-b}\\ &\Rightarrow \quad PV^2=-a+k\frac{V^2}{V-b}\\ &\Rightarrow \quad P=-\frac{a}{V^2}+k\frac{1}{V-b}.\end{aligned}$$

Luego, $P(V)=-aV^{-2}+k(V-b)^{-1}$, y por lo tanto

$$P'(V)=2aV^{-3}-k(V-b)^{-2}=\frac{2a}{V^3}-\frac{k}{(V-b)^2}=\frac{2a(V-b)^2-kV^3}{V^3(V-b)^2}.$$

□

Ejercicio 5.2. *Según Bodenstein, si K es la constante de ionización del dióxido de nitrógeno, se tiene que*

$$\ln K=2.839-\frac{5749}{T}+1.75\ln T-0.0005T.$$

Además, si ΔH es el calor de disociación, se verifica la igualdad

$$\frac{d(\ln K)}{dT}=\frac{RT^2}{\Delta H}.$$

Hallar la expresión de ΔH como función de T.

RESOLUCIÓN. En primer lugar, observamos que

$$\frac{d(\ln K)}{dT}=\frac{5749}{T^2}+\frac{1.75}{T}-0.0005=\frac{5749+1.75T-0.0005T^2}{T^2}.$$

Despejando ΔH en la segunda igualdad ya sigue que

$$\Delta H = \frac{RT^2}{\frac{d(\ln K)}{dT}} = \frac{RT^2}{\frac{5749+1.75T-0.0005T^2}{T^2}} = \frac{RT^4}{5749+1.75T-0.0005T^2}.$$

$\square$

5.2. Cálculo de extremos

Ejercicio 5.3. *La efectividad de un cierto analgésico a las t horas de ser suministrado viene dada por*

$$E(t) = \frac{1}{27}(9t+3t^2-t^3) \quad (0 \le t \le 45).$$

a) *Hallar la velocidad media de variación de E en las primeras* 2 *horas.*

b) *Hallar la velocidad instantánea a las* 2 *horas.*

c) *Determinar en qué instante se alcanza la efectividad máxima.*

RESOLUCIÓN. *a*) La velocidad media de variación de E en las primeras 2 horas viene dada por su cociente incremental en el intervalo $[0,2]$, esto es:

$$v_m = T_m(E;[0,2]) = \frac{E(2)-E(0)}{2-0} = \frac{1}{2\cdot 27}(18+12-8) = \frac{22}{2\cdot 27} = \frac{11}{27} \simeq 0.407.$$

b) La velocidad instantánea a las 2 horas viene dada por la derivada de E respecto al tiempo en dicho instante, esto es:

$$v_2 = E'(2) = \frac{1}{27}(9+6t-3t^2)\Big|_{t=2} = \frac{1}{27}(9+12-12) = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} \simeq 0.333.$$

c) Para determinar en qué instante se alcanza la efectividad máxima, calculamos los extremos de $E(t)$. Estudiemos en primer lugar los puntos críticos de $E(t)$:

$$E'(t)=0 \quad \Rightarrow \quad 3t^2-6t-9=0 \quad \Rightarrow \quad t^2-2t-3=0 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_0=-1 \\ t_1=3. \end{cases}$$

Descartamos la opción $t_0=-1$, ya que carece de sentido en el contexto del problema. Luego, el candidato a máximo es $t_1=3$ horas. Veamos que efectivamente en dicho valor se alcanza un máximo para $E(t)$. Utilicemos por ejemplo el criterio de la derivada segunda:

$$E''(t) = \frac{1}{27}(6-6t) = \frac{2}{9}(1-t).$$

Luego $E''(3) = -4/9 < 0$, y la efectividad máxima se alcanza a las 3 horas de suministrar el analgésico. □

Ejercicio 5.4. *Un determinado fármaco se inyecta en la sangre con una concentración $c(t)$ que varía con el tiempo (en horas) de la siguiente forma:*

$$c(t) = \frac{3t}{t^2+1} \quad (t \geq 0).$$

a) *¿En qué instante es máxima la concentración?*

b) *¿Cuánto tiempo ha de transcurrir después de que alcance este valor máximo para que la concentración se reduzca a la mitad de dicho valor?*

RESOLUCIÓN. *a*) Para determinar en qué instante se produce la máxima concentración calculamos en primer lugar los puntos críticos de $c(t)$:

$$c'(t) = 3\frac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2} = 3\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 1.$$

Como t ha de ser no negativo tomamos $t_0 = 1$. Veamos que $c(t)$ alcanza su máximo en t_0.

Aunque podemos recurrir al criterio de la derivada segunda, en este caso es inmediato estudiar el signo de la derivada primera alrededor de $t_0 = 1$. Así pues, observamos que $c'(t) > 0$ ($c(t)$ creciente) si $0 < t < 1$, mientras que $c'(t) < 0$ ($c(t)$ decreciente) si $t > 1$. En definitiva, podemos concluir que la concentración es máxima cuando $t = 1$ hora. El valor máximo de concentración en ese instante es

$$c(1) = \frac{3}{2} = 1.5.$$

b) Para que la concentración se reduzca a la mitad del valor máximo se ha de verificar que:

$$c(t) = \frac{3t}{t^2+1} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad t^2-4t+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Denotando por $t_1 = 2-\sqrt{3}$ y $t_2 = 2+\sqrt{3}$ observamos que $t_1 < 1$, mientras que $t_2 > 1$. Luego podemos concluir que el tiempo que debe transcurrir para que la concentración se reduzca a la mitad del valor máximo es de $t_2 = 2+\sqrt{3} \simeq 2.73$ horas. □

Ejercicio 5.5. *Dada la función $f(x) = x^4(4a^2 - x^2)$, se pide:*

a) *Determinar la velocidad media de $f(x)$ en el intervalo $[0,a]$.*

b) *Determinar la velocidad instantánea de $f(x)$ en $x = a$.*

c) *Determinar los extremos de $f(x)$.*

RESOLUCIÓN. *a*) La velocidad media v_m viene dada por la razón incremental de $f(x)$ en el intervalo $[0,a]$:

$$v_m = T_m(f;[0,a]) = \frac{f(a)-f(0)}{a-0} = \frac{a^4\left(4a^2-a^2\right)}{a} = \frac{3a^6}{a} = 3a^5.$$

b) La velocidad instantánea v_a de $f(x)$ en $x = a$ viene dada por el valor de su derivada en dicho punto. La derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = 4x^3(4a^2-x^2) - 2x^5 = 16a^2x^3 - 6x^5.$$

Luego:

$$v_a = f'(a) = \left(16a^2x^3 - 6x^5\right)\Big|_{x=a} = 16a^5 - 6a^5 = 10a^5.$$

c) Los puntos críticos de $f(x)$ vienen dados como solución de:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 16a^2x^3 - 6x^5 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x^3(16a^2 - 6x^2) \\ &\Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{ó} \quad 6x^2 = 16a^2 \\ &\Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{ó} \quad x = \pm a\sqrt{\frac{16}{6}} = \pm 2a\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Denotemos por

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 2a\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad x_2 = -2a\sqrt{\frac{2}{3}},$$

y veamos cuál es la naturaleza de estos puntos críticos. Para ello, calculamos la derivada segunda de $f(x)$, que es $f''(x) = 48a^2x^2 - 30x^4$. Evaluada en los puntos críticos:

$$f''(x_0) = 0$$

y

$$f''(x_1) = f''(x_2) = 48a^2\frac{8a^2}{3} - 30\frac{64a^4}{9} = \frac{384-640}{3}a^4 < 0.$$

Por tanto, podemos concluir que x_1 y x_2 son máximos relativos para la función f.

Por otra parte, como $f''(x_0) = 0$ nos encontramos frente a un caso dudoso. Para determinar la naturaleza del punto crítico $x_0 = 0$ utilizamos el criterio de las derivadas de orden superior. Se tiene que $f'''(x) = 96a^2x - 120x^3$, con lo cual $f'''(x_0) = 0$. Al ser esta última derivada nula en el punto crítico, evaluamos la siguiente derivada: $f^{(iv)}(x) = 96a^2 - 360x^2$, así que $f^{(iv)}(x_0) = 96a^2 > 0$. Podemos pues garantizar que x_0 es un mínimo.

OBSERVACIÓN: No obstante lo anterior, también podemos deducir que $x_0 = 0$ es un mínimo relativo para f atendiendo al criterio del signo local de la derivada primera. En efecto, dado que $f'(x) = x^3(16a^2 - 6x^2)$, deducimos que $f'(x) < 0$ (f decreciente) si $x < 0$ es suficientemente pequeño, mientras que $f'(x) > 0$ (f creciente) para $x > 0$, suficientemente pequeño. Luego, en definitiva, la función f pasa de ser decreciente a creciente en el punto $x_0 = 0$, y éste es necesariamente un mínimo relativo. □

Ejercicio 5.6. *En algunas reacciones químicas autocatalizadas la velocidad de reacción v viene dada por la fórmula $v(x) = kx^p(a-x)^q$ ($0 \leq x \leq a$), donde a denota la concentración de la sustancia de partida, x la de la sustancia que se forma, y k, p, q son determinados números reales positivos. Hallar la concentración x que da la máxima velocidad.*

RESOLUCIÓN. Consideremos $v(x) = kx^p(a-x)^q$, con $0 \leq x \leq a$, y determinemos sus puntos críticos:

$$\begin{aligned} v'(x) &= k\left[px^{p-1}(a-x)^q + x^p q(a-x)^{q-1}(-1)\right] \\ &= kx^{p-1}(a-x)^{q-1}\left[p(a-x) - qx\right] \\ &= kx^{p-1}(a-x)^{q-1}\left[ap - x(p+q)\right]. \end{aligned}$$

Luego

$$v'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ x = a, \\ x = \dfrac{ap}{p+q}. \end{cases}$$

Obtenemos por tanto un único punto crítico

$$x_0 = \frac{ap}{p+q}$$

interior al intervalo $(0,a)$ (obsérvese que $0 < p/(p+q) < 1$). Por otra parte, dado que $v(x) \geq 0$ para todo

$x \in [0, a]$ mientras que $v(0) = v(a) = 0$, se deduce que los valores $x = 0$ y $x = a$ corresponden a mínimos (absolutos) de la velocidad de reacción, cuando $0 \le x \le a$.

Veamos finalmente que x_0 proporciona un máximo para la velocidad de reacción. A tal fin, analizamos el signo de la derivada primera cerca de x_0. Notemos que

$$v'(x) = k(p+q)x^{p-1}(a-x)^{q-1}\left(\frac{ap}{p+q} - x\right) = k(p+q)x^{p-1}(a-x)^{q-1}(x_0 - x).$$

Ambos factores x^{p-1} y $(a-x)^{p-1}$ son positivos si $0 < x < a$, mientras que el factor $(x_0 - x)$ es positivo si $x < x_0$, y negativo si $x > x_0$. Luego $v(x)$ pasa de ser creciente a decreciente en el punto $x = x_0$ y, en consecuencia, este punto es un máximo relativo (y absoluto) de la velocidad de reacción cuando $0 \le x \le a$. □

5.3. Optimización

Ejercicio 5.7. *Hallar la proporción en que deben encontrarse en el agua los iones H^+ y OH^- de manera que la suma total de contenidos en la unidad de volumen sea mínima, sabiendo que por la ley de acción de masas se verifica $[H^+][OH^-] = K$, donde $K = 10^{-14}$ es la constante de disociación del agua.* SUGERENCIA: *póngase $x = [H^+]$ e $y = [OH^-]$.*

RESOLUCIÓN. Se trata de resolver un problema de optimización de modo que $x + y$ sea mínimo, sujeto a la restricción $xy = 10^{-14}$, siendo $x = [H^+]$ e $y = [OH^-]$.

Dado que

$$y = 10^{-14}\frac{1}{x},$$

obtenemos que la función a minimizar es

$$f(x) = x + 10^{-14}\frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

Determinamos ahora sus puntos críticos anulando la primera derivada:

$$f'(x) = 1 - 10^{-14}\frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 10^{-14}\frac{1}{x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 10^{-14} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 10^{-7}.$$

Dado que debemos considerar sólo la opción $x > 0$, obtenemos un único candidato a mínimo: $x_0 = 10^{-7}$. Por otra parte, estudiando el signo de la derivada segunda:

$$f''(x) = 10^{-14}\,\frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f''(10^{-7}) > 0,$$

deducimos que, en efecto, $x_0 = 10^{-7} = [H^+]$ produce un mínimo para la suma de concentraciones.

Obsérvese, asimismo, que la concentración de iones OH^- que da este mínimo es $y_0 = [OH^-] = 10^{-14}\,\frac{1}{x_0} = 10^{-7} = [H^+]$. □

Ejercicio 5.8. *Un fabricante, en la promoción de cierto cosmético, ha descubierto que la demanda del mismo viene representada por $x = 2500/p^2$, siendo p su precio de venta al público. Suponiendo que el ingreso total R viene dado por $R = x\,p$ y que el coste de la producción de x artículos viene dado por $C = 0.5x + 500$, hallar el precio por unidad que maximiza el beneficio.* SUGERENCIA: *Beneficio = Ingreso − Coste.*

RESOLUCIÓN. Calculamos el beneficio B como función del precio p. Sabemos que:

- Demanda: $x = \dfrac{2500}{p^2}$ unidades.
- Ingreso total: $R = x\,p$ unidades monetarias.
- Coste: $C = 0.5x + 500$ unidades monetarias.

Por tanto, el beneficio viene dado por:

$$\begin{aligned} B(p) &= R - C = x\,p - 0.5x - 500 \\ &= \frac{2500}{p^2}\,p - 0.5\,\frac{2500}{p^2} - 500 \\ &= \frac{2500}{p} - \frac{1250}{p^2} - 500. \end{aligned}$$

Veamos ahora cuál es el precio p que maximiza el beneficio. Para ello calculamos los puntos críticos de $B(p)$:

$$B'(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2500}{p^2} + \frac{2500}{p^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2500\left(\frac{1-p}{p^3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 1.$$

Luego el precio por unidad candidato a maximizar el beneficio es $p_0 = 1$. Veamos que en efecto se trata de un máximo. Podemos usar el criterio de la derivada segunda:

$$B''(p) = 2500\left(\frac{2}{p^3} - \frac{3}{p^4}\right) = \frac{2500}{p^3}\left(2 - \frac{3}{p}\right),$$

de tal modo que $B''(p_0) = B''(1) = 2500(2-3) < 0$ y, por tanto, podemos garantizar que $p_0 = 1$ es el precio por unidad que maximiza el beneficio obtenido. □

Ejercicio 5.9. *Un controlador aéreo sitúa dos aviones a la misma altitud convergiendo en un punto, conforme vuelan formando un ángulo recto (Figura 5.1). Un avión está a* 150 *millas del punto y se mueve a* 450 *millas por hora. El otro avión está a* 200 *millas del punto y tiene una velocidad de* 600 *millas por hora.*

a) *¿A qué razón está decreciendo la distancia entre los aviones?*

b) *¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situar alguno de los aviones en una trayectoria de vuelo distinta?*

SUGERENCIA: *En la Figura 5.1,* $s = \sqrt{(150-x)^2 + (200-y)^2}$.

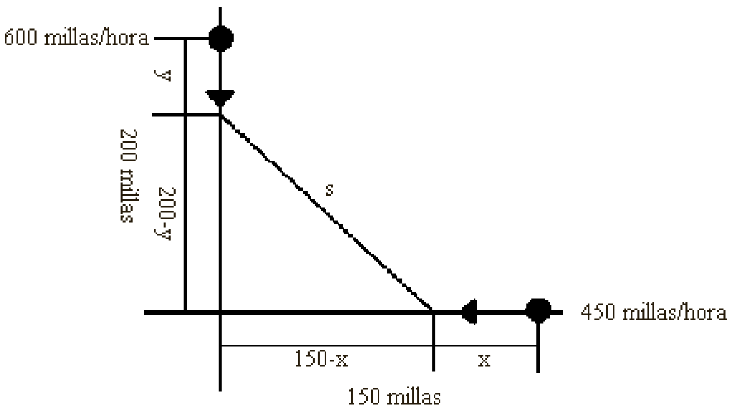

Figura 5.1.

RESOLUCIÓN.

La distancia s entre los aviones viene dada, en función del tiempo t (en horas), como

$$s(t) = \sqrt{[150 - x(t)]^2 + [200 - y(t)]^2}.$$

siendo $x(t)$ e $y(t)$ las distancias respectivas que han recorrido el primer y segundo avión (en sus respectivas direcciones) desde que se ha comenzado a contabilizar el tiempo. Así pues, $x(0) = 0 = y(0)$ son las distancias inicialmente recorridas por cada avión.

Dado que el primer avión vuela a velocidad constante de 450 mph, tendremos entonces que la distancia recorrida en cualquier tiempo t viene dada por $x(t) = \text{velocidad} \times \text{tiempo} = 450t$. Análogamente, para el segundo avión tendremos $y(t) = 600t$.

En consecuencia, la distancia s entre los aviones como función del tiempo es:

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{[150 - x(t)]^2 + [200 - y(t)]^2} \\ &= \sqrt{(150 - 450t)^2 + (200 - 600t)^2} \\ &= \sqrt{150^2(1 - 3t)^2 + 200^2(1 - 3t)^2} \\ &= |1 - 3t| \sqrt{22500 + 40000} = |1 - 3t| \sqrt{62500} \\ &= 250\,|1 - 3t|, \end{aligned}$$

siendo $|\cdot|$ la función valor absoluto.

a) Para responder a la primera cuestión, tendremos en cuenta que la razón de cambio de la distancia entre los aviones es precisamente $s'(t)$, y en particular se nos pide dicha razón de cambio en el instante inicial $t = 0$, esto es, $s'(0)$. Dado que para $t \leq 1/3$ tenemos que $s(t) = 250(1 - 3t)$, sigue entonces que

$$s'(t) = -750 \quad \left(t < \frac{1}{3}\right).$$

Luego, $s'(0) = -750$, y la distancia entre los aviones en el instante inicial decrece al ritmo de 750 mph.

b) Los aviones colisionarán cuando $s(t) = 0$, y esto ocurre si, y sólo si, $250\,|1 - 3t| = 0$, esto es, $t = 1/3$ de hora.

En definitiva, el controlador dispone de 20 minutos para desviar la trayectoria de alguno de los aviones. □

Ejercicio 5.10. *Un camión debe recorrer* 300 *kilómetros por una carretera a una velocidad constante de* v *kilómetros por hora. Se asume que el carburante cuesta* 1.50 *euros por litro, mientras que el consumo del camión aumenta cuadráticamente con la velocidad según la relación* $10 + v^2/120$ *litros por hora. Si el conductor cobra* 20 *euros por hora de transporte, determinar la velocidad para la que el trayecto tiene un costo económico mínimo. Para tal opción óptima, indicar además el tiempo empleado en el trayecto y el importe total que recibirá el conductor.*

RESOLUCIÓN. Determinemos en primer lugar el costo en euros asociado a un trayecto realizado a una velocidad genérica de v km/h.

- Dado que el recorrido es de 300 kilómetros y la velocidad del trayecto es constante, ésta viene dada por $v = 300/t$. Por tanto, el tiempo de trayecto en función de la velocidad es:

$$t = \frac{300}{v} \text{ h.}$$

- El carburante cuesta 1.5 €/L, mientras que el consumo en función de la velocidad es de $10 + v^2/120$ L/h. Por tanto, el gasto de carburante por hora es de:

$$\frac{3}{2} \cdot \left(10 + \frac{v^2}{120}\right) \text{ €/h.}$$

- La tarifa del conductor es de 20 €/h. Luego, el gasto total que se produce por hora es de:

$$20 + \frac{3}{2}\left(10 + \frac{v^2}{120}\right) \text{ €/h.}$$

En consecuencia, el gasto producido durante el trayecto como función de la velocidad v es:

$$\begin{aligned} g(v) &= \left[20 + \frac{3}{2}\left(10 + \frac{v^2}{120}\right)\right] \frac{300}{v} \\ &= \left(35 + \frac{v^2}{80}\right) \frac{300}{v} \\ &= \frac{10500}{v} + \frac{15v}{4}. \end{aligned}$$

Los puntos críticos de $g(v)$ vienen dados por:

$$\begin{aligned} g'(v) = -\frac{10500}{v^2} + \frac{15}{4} = 0 \quad &\Rightarrow \quad 15v^2 = 42000 \\ &\Rightarrow \quad v^2 = 2800 \quad \Rightarrow \quad v = \pm\sqrt{2800} \simeq \pm 52.92. \end{aligned}$$

Dado que en nuestro contexto la velocidad ha de considerarse positiva, tomamos $v_0 = \sqrt{2800}$. Veamos que, en efecto, dicha velocidad minimiza el gasto:

$$g''(v) = \frac{21000}{v^3},$$

y claramente $g''(v_0) > 0$, pues $v_0 > 0$. En definitiva, deducimos entonces que el costo económico del trayecto se minimiza si se conduce a una velocidad de $v = \sqrt{2800} \simeq 52.92$ km/h. Para esta velocidad, el tiempo total del trayecto es

$$t = \frac{300}{\sqrt{2800}} \simeq 5.67 \text{ h},$$

mientras que el importe que recibe el conductor será de $20\,\frac{300}{\sqrt{2800}} \simeq 113.39$ €. $\square$